УДК 514.75
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_2(5)_20

$\mathbf{E_6}$ МЕЙКИНДИГИН БӨЛҮКТӨП ЧАГЫЛТУУДА ҮЧ ЧЕНЕМДҮҮ БӨЛҮШТҮРҮҮЛӨРДҮН ТҮГӨЙҮНҮН КВАЗИКОШМОК СЫЗЫКТАРЫНЫН ЖАШАШЫ

Папиева Толкун Мататаевна, ф.-м.и.к., доцент
tpapka73@mail.ru
Артыкова Жылдыз Абдисаламовна, ф.-м.и.к., доцент
jartykova@oshsu.kg
Мустапакулова Чолпон Абакуловна, окутуучу
chmustapakulova@oshsu.kg
Ош мамлекеттик университети
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *$\Omega \subset E_6$ аймагында ушундай жылма сызыктардын көптүгү берилген: ар бир $X \in \Omega$ чекити аркылуу берилген көптүктүн бир гана ω^1 сызыгы өтөт. Ушул сызык үчүн Френенин репери [1] боло тургандай кыймылдуу репер тандалып алынган. Бул репердин координаталык векторлорунун интегралдык сызыктары Френенин торчосун [2] түзүшөт. Ушул торчонун ω^3 сызыгынын жанымасында F_3^2 чекити инварианттык түрдө аныкталат. X чекити Ω аймагында кыймылга келгенде F_3^2 чекити өзүнүн $\Omega_3^2 \subset E_6$ аймагын "сызып" чыгат. Натыйжада $f_3^2(X) = F_3^2$ боло тургандай $f_3^2: \Omega \to \Omega_3^2$ бөлүктөп чагылтуусу аныкталат.*

$\Delta_{(145)} = (X, \vec{e}_1, \vec{e}_4, \vec{e}_5)$ жана $f_3^2(\Delta_{(145)}) = \Delta'_{(145)}$ үч ченемдүү бөлүштүрүүлөрү каралган.

Аныктама. Эгерде $\beta \subset \Delta_{(145)}$ сызыгынын X чекитиндеги жанымасы жана $\bar{\beta} = f_3^2(\beta)$ сызыгынын F_3^2 чекитиндеги жанымасы бир эле үч ченемдүү мейкиндикте ($\vec{e}_1, \vec{e}_4, \vec{e}_5$ векторлоруна керилген) жатышса, анда β жана $\bar{\beta}$ сызыктары f_3^2 бөлүктөп чагылтуусунда $(\Delta_{(145)}, \Delta'_{(145)})$ түгөй бөлүштүрүүлөрүнүн квазикошмок сызыктары деп аталышат.

f_3^2 бөлүктөп чагылтуусунда $\beta \subset \Delta_{(145)}$ жана $f_3^2(\beta) = \bar{\beta}$ сызыктары үч ченемдүү бөлүштүрүүлөрдүн $(\Delta_{(145)}, \Delta'_{(145)})$ түгөйүнүн квазикошмок сызыктары болушунун зарыл жана жетиштүү шарттары далилденген.

Ачкыч сөздөр: *евклиддик мейкиндик, Френенин репери, Френенин торчосу, бөлүктөп чагылтуу, бөлүштүрүү, түгөй бөлүштүрүүлөрдүн квазикошмок сызыгы.*

СУЩЕСТВОВАНИЕ КВАЗИДВОЙНЫХ ЛИНИЙ ПАРЫ ТРЕХМЕРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ В ЧАСТИЧНОМ ОТОБРАЖЕНИИ ПРОСТРАНСТВА $\mathbf{E_6}$

Папиева Толкун Маматаевна, к.ф.-м.н., доцент
tpapka73@mail.ru
Артыкова Жылдыз Абдисаламовна, к.ф.-м.н., доцент
jartykova@oshsu.kg
Мустапакулова Чолпон Абакуловна, преподаватель
chmustapakulova@oshsu.kg
Ошский государственный университет
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *В области $\Omega \subset E_6$ задано семейство гладких линий так, что через каждую точку $X \in \Omega$ проходит одна линия ω^1 заданного семейства. Выбран подвижный репер так, чтобы он был репером Френе [1] для линии ω^1. Интегральные линии координатных векторов этого репера образуют сеть Френе [2]. На* *касательной к линии ω^1 этой сети инвариантным образом определяется точка F_3^2. Когда точка X смещается в области Ω, точка F_3^2 описывает свою область $\Omega_3^2 \subset E_6$. В результате получается частичное отображение $f_3^2: \Omega \to \Omega_3^2$ такое, что $f_3^2(X) = F_3^2$.*

Рассматриваются трехмерные распределения $\Delta_{(145)} = (X,\ \vec{e}_1, \vec{e}_4,\ \vec{e}_5)$ и $f_3^2(\Delta_{(145)}) = \Delta'_{(145)}$.

Аныктама. Если касательная к линии $\beta \subset \Delta_{(145)}$ в точке X и касательная к линии $\bar{\beta} = f_3^2(\beta)$ сызыгынын в точке F_3^2 принадлежат одному и тому же трехмерному пространству (натянутому на векторах $\vec{e}_1, \vec{e}_4,\ \vec{e}_5$), то линии β и $\bar{\beta}$ называются квазидвойными линиями пары распределений $(\Delta_{(145)}, \Delta'_{(145)})$ в частичном отображении f_3^2.

Доказаны необходимое и достаточное условия для того, чтобы линии $\beta \subset \Delta_{(145)}$ и $f_3^2(\beta) = \bar{\beta}$ являлись квазидвойными линиями пары распределений $(\Delta_{(145)}, \Delta'_{(145)})$ в частичном отображении f_3^2.

Ключевые слова: *евклидово пространство, репер Френе, сеть Френе, частичное отображение, распределение, квазидвойная линия пары распределений.*

EXISTENCE OF QUASI-DOUBLE LINES OF THE PAIR OF THREE DIMENSIONAL DISTRIBUTIONS IN THE PARTIAL MAPPING OF SPACE E_6

Papieva Tolkun Mamataevna, Candidate of Ph. & Math. Sc., docent
tpapka73@mail.ru
Artykova Zhyldyz Abdisalamovna, Candidate of Ph. & Math. Sc., docent
jartykova@oshsu.kg
Mustapakulova Cholpon Abakulovna, teacher
chmustapakulova@oshsu.kg
Osh State University
Osh, Kyrgyzstan

Abstract. *A family of smooth lines given in the domain $\Omega \subset E_6$ so that through each point $X \in \Omega$ passes one line ω^1 of given family. A movable frame is chosen so that it was Frenet's frame for the line ω^1 of the given family. The integral lines of the coordinate vectors fields of this frame form a Frenet's net. On a tangent to the line ω^1 of this net a point F_3^2 is defined in an invariant way. When the point X moves in the domain Ω, the point F_3^2 describes it's domain $\Omega_3^2 \subset E_6$.. In this way we get a partial mapping $f_3^2: \Omega \to \Omega_3^2$ such, that $f_3^2(X) = F_3^2$.*

It is considered the three dimensional distributions $\Delta_{(145)} = (X,\ \vec{e}_1, \vec{e}_4,\ \vec{e}_5)$ and $f_3^2(\Delta_{(145)}) = \Delta'_{(145)}$.

Definition. Lines $\beta \subset \Delta_{(145)}$ and $\bar{\beta} = f_3^2(\beta)$ are called quasi-double lines of the pair of distributions $(\Delta_{(145)}, \Delta'_{(145)})$, If the tangent to line β at the point X and the tangent to line $\bar{\beta} = f_3^2(\beta)$ at point $f_3^2(X) = F_3^2$ belong to the same three dimensional space, spanned by vectors $\vec{e}_1, \vec{e}_4,\ \vec{e}_5$.

Necessary and sufficient conditions have been proven for lines $\beta \subset \Delta_{(145)}$ and $\bar{\beta} = f_3^2(\beta)$ to be quasi-double lines of the pair of distributions $(\Delta_{(145)}, \Delta'_{(145)})$, in the partial mapping f_3^2.

Key words: *Euclidean space, Frenet's frame, net of Frenet, partial mapping, distribution, the quasi-double line of a pair of distributions.*

$\Omega \subset E_6$ мейкиндигинин Ω аймагында ушундай жылма сызыктардын көптүгү берилген $X \in \Omega$ ар бир чекити аркылуу берилген көптүктүн бирден гана сызыгы өтөт. Ортонормаланган, $\mathcal{R} = (X, \vec{e}_{i,})$ $(i, j, k = \overline{1,6})$ реперин Ω аймагында бул репер берилген көптүктүн ω^1 сызыгы үчүн Френенин репери [1,2] боло тургандай тандап алабыз. $\mathcal{R}$ реперинин деривациондук формулалары төмөнкүдөй көрүнүштө болушат:

$$d\,\overrightarrow{X} = \omega^i \vec{e}_i, d\vec{e}_i = \omega_i^k \vec{e}_k. \qquad (1)$$

Мындагы ω^i, ω_i^k дифференциалдык формалары евклиддик мейкиндиктин структуралык теңдемелерин канаатандырышат:

$$D\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i, D\omega_i^k = \omega_i^j \wedge \omega_j^k, \omega_i^j + \omega_j^i = 0. \qquad (2)$$

$\overrightarrow{e_i}$ вектордук талааларынын интегралдык сызыктары берилген көптүктүн ω^1 сызыгы үчун Френенин торчосун Σ_6 түзүшөт. $\mathcal{R}$ репери Σ_6, торчосунун сызыктарынын жанымаларына тургузулгандыктан, ω_i^k формалары башкы формалар болушат, б.а.

$$\omega_i^k = \Lambda_{ij}^k \omega^j. \qquad (3)$$

(3) формулалардын акыркы барбардыгын эске алсак, анда төмөндөгү келип чыгат:

$$\Lambda_{ij}^k = -\Lambda_{kj}^i. \qquad (4)$$

(4) барабардыкты сырттан дифференцирлеп төмөндөгүнү алабыз:

$$D\omega_i^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k D\omega^j.$$

Мындан, (2) формуланы колдонсок, төмөндөгү келип чыгат:

$$\omega_i^j \wedge \omega_j^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k \omega^\ell \wedge \omega_\ell^j.$$

(3) формуланын негизинде акыркы барабардык төмөндөгүдөй көрүнүшкө келет:

$$\omega_i^j \wedge \Lambda_{j\ell}^k \omega^\ell = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \omega_\ell^j \wedge \omega^\ell,$$

же

$$\Lambda_{j\ell}^k \omega_i^j \wedge \omega^\ell = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell \wedge \omega^j.$$

(барабардыктын оң жагындагы экинчи мүчөдө жана индекстеринин ордун алмаштырдык). Мындан төмөндөгүнү алабыз:

$$d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell \wedge \omega^j - \Lambda_{j\ell}^k \omega_i^j \wedge \omega^\ell = 0\ ,$$

же

$$\left(d\Lambda_{ij}^k - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell - \Lambda_{\ell j}^k \omega_i^\ell\right) \wedge \omega^j = 0.$$

Акыркы барабардыкка Картандын леммасын [3] колдонуп төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$d\Lambda_{ij}^k - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell - \Lambda_{\ell j}^k \omega_i^\ell = \Lambda_{ijm}^k \omega^m,$$

Же

$$d\Lambda_{ij}^k = \left(\Lambda_{ijm}^k + \Lambda_{il}^k \Lambda_{jm}^l + \Lambda_{lj}^k \Lambda_{im}^l\right)\omega^m. \qquad (5)$$

Чондуктардын $\{\Lambda_{ij}^k, \Lambda_{ijm}^k\}$ системасы экинчи тартиптеги геометриялык обьектти түзүшөт.

Берилген көптүктүн ω^1 сызыгы үчүн Френенин формулалары төмөндөгүдөй көрүнүштө болушат:

$$\begin{aligned}
d_1\vec{e}_1 &= \Lambda_{11}^2 \vec{e}_2,\\
d_1\vec{e}_2 &= \Lambda_{21}^1 \vec{e}_1 + \Lambda_{21}^3 \vec{e}_3,\\
d_1\vec{e}_3 &= \Lambda_{31}^2 \vec{e}_2 + \Lambda_{31}^4 \vec{e}_4,\\
d_1\vec{e}_4 &= \Lambda_{41}^3 \vec{e}_3 + \Lambda_{41}^5 \vec{e}_5,\\
d_1\vec{e}_5 &= \Lambda_{51}^4 \vec{e}_4 + \Lambda_{51}^6 \vec{e}_6,\\
d_1\vec{e}_6 &= \Lambda_{61}^5 \vec{e}_5,
\end{aligned}$$

жана

$$\Lambda_{11}^3 = -\Lambda_{11}^3 = 0, \Lambda_{11}^4 = -\Lambda_{41}^1 = 0, \Lambda_{11}^5 = -\Lambda_{51}^1 = 0, \Lambda_{11}^6 = -\Lambda_{61}^1 = 0 \quad (6)$$

$$\Lambda_{21}^5 = -\Lambda_{51}^2 = 0, \Lambda_{21}^4 = -\Lambda_{41}^2 = 0, \Lambda_{31}^5 = -\Lambda_{51}^3 = 0.$$

$$\Lambda_{21}^6 = -\Lambda_{61}^2 = 0, \Lambda_{31}^6 = -\Lambda_{61}^3 == 0,\ \Lambda_{61}^4 = -\Lambda_{41}^6 = 0 \qquad (7)$$

Мындагы $k_1^1 = \Lambda_{11}^2,\ k_2^1 = \Lambda_{21}^3,\ k_3^1 = \Lambda_{31}^4,\ k_4^1 = \Lambda_{41}^5 = -\Lambda_{51}^4,\ k_5^1 = \Lambda_{51}^6 = -\Lambda_{61}^5$ – ω^1 сызыгынын биринчи, экинчи, үчүнчү, төртүнчү жана бешинчи ийриликтери (тиешелеш түрдө), $d_1 - \omega^1$ сызыгы боюнча дифференцирлөөнүн символу.

Σ_6 торчосунун ω^iсызыгынын жанымасындагы $F_i{}^j$ $(i \neq j)$ псевдофокусу төмөндөгүдөй радиус-вектор менен аныкталат:

$$\overrightarrow{F_i^j} = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{ij}^j}\vec{e}_i = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{jj}^i}\vec{e}_i. \tag{8}$$

Ар бир $(X, \vec{e}_i)$ жанымасында бештен псевдофокус жашайт:

$(X, \vec{e}_1)$ жанымасында – $F_1^2,\ F_1^3,\ F_1^4,\ F_1^5,\ F_1^6$;

$(X, \vec{e}_2)$ жанымасында – $F_2^1, F_2^3, F_2^4, F_2^5, F_2^6$;

$(X, \vec{e}_3)$ жанымасында – $F_3^1, F_3^2, F_3^4, F_3^5, F_3^6$;

$(X, \vec{e}_4)$ жанымасында – $F_4^1, F_4^2, F_4^3, F_4^5, F_4^6$;

$(X, \vec{e}_5)$ жанымасында – $F_5^1, F_5^2, F_5^3, F_5^4, F_5^6$;

$(X, \vec{e}_6)$ жанымасында – $F_6^1, F_6^2, F_6^3, F_6^4, F_6^5$.

$\Omega \subset E_6$ аймагындагы Σ_6 торчосу Френенин циклдик торчосу деп аталат, эгерде төмөндөгү реперлер бир учурда ω^1, ω^2, ω^3, ω^4, ω^5, ω^6 сызыктары үчүн (тиешелеш түрдө) Френенин реперлери болушса:

$\mathcal{R}_1 = (X, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5, \vec{e}_6)$, $\mathcal{R}_2 = (X, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5, \vec{e}_6, \vec{e}_1)$,

$\mathcal{R}_3 = (X, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5, \vec{e}_6, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $\mathcal{R}_4 = (X, \vec{e}_4, \vec{e}_5, \vec{e}_6, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$,

$\mathcal{R}_5 = (X, \vec{e}_5, \vec{e}_6, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$, $\mathcal{R}_5 = (X, \vec{e}_6, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5)$.

Σ_6 торчосу Френенин циклдик торчосу болсун деп эсептейли жана аны $\tilde{\Sigma}_6$ көрүнүшүндө белгилейбиз.

Изилдөөнүн материалдары.

$F_3^2 \in (X, \vec{e}_3)$ псевдофокусу төмөндөгүдөй радиус-вектор менен аныкталат:

$$\overrightarrow{F_3^2} = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_3 = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{22}^3}\vec{e}_3. \tag{9}$$

X чекити $\Omega \subset E_6$ аймагында кыймылга келгенде, F_3^2 чекити өзүнүн $\Omega_3^2 \subset E_6$ аймагын “сызып” чыгат Натыйжада $f_3^2(X) = F_3^2$ боло тургандай $f_3^2 : \Omega \to \Omega_3^2$ бөлүктөп чагылтуусуна ээ болобуз.

Ω_3^2 аймагында $\mathcal{R}' = \left(F_3^2, \vec{c}_{i,}\right)$ кыймылдуу репери пайда болот жана $\vec{c}_i = f_3^2(\vec{e}_{i,})$ векторлору төмөнкүдөй көрүнүштө болушат [4]:

$$\begin{gathered}
\vec{c}_1 = \vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{31}^2}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_2 + \frac{C_{321}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{31}^5}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_5;\\
\vec{c}_2 = \frac{C_{322}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{32}^4}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_4;\\
\vec{c}_3 = \left[1 + \frac{C_{323}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\right]\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{33}^4}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_4;\\
\vec{c}_4 = -\frac{\Lambda_{34}^2}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_2 + \frac{C_{324}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\vec{e}_3 + \vec{e}_4;\\
\vec{c}_5 = -\frac{\Lambda_{35}^2}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_2 + \frac{C_{325}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{35}^4}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_4 + \vec{e}_5;\\
\vec{c}_6 = -\frac{\Lambda_{36}^2}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_2 + \frac{C_{326}^2}{(\Lambda_{32}^2)^2}\vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{36}^4}{\Lambda_{32}^2}\vec{e}_4 + \vec{e}_6.
\end{gathered} \tag{10}$$

$\Delta_{(145)} = (x, \vec{e}_1, \vec{e}_4, \vec{e}_5)$ бөлүштүрүүсүнө таандык болгон β сызыгынын жаныма вектору $\vec{\beta} = \beta^1\vec{e}_1 + \beta^4\vec{e}_4 + \beta^5\vec{e}_5$көрүнүшүндө болот.

$f_3^2(\beta) = \overline{\beta}$ сызыгынын жаныма вектору төмөнкүдөй табылат.

$\vec{\beta} = \beta^1\vec{C}_1 + \beta^4\vec{C}_4 + \beta^5\vec{C}_5$. Мындан (10) формулаларды эске алуу менен төмөндөгүнү алабыз:

$$\vec{\beta} = \beta^1\vec{e}_1 + (\beta^1 C_1^2 + \beta^4 C_4^2 + \beta^5 C_5^2)\vec{e}_2 + (\beta^1 C_1^3 + \beta^4 C_4^3 + \beta^5 C_5^3)\vec{e}_3 + (\beta^1 C_1^4 + \beta^4 + \beta^5 C_5^4)\vec{e}_4 + \beta^5\vec{e}_5,$$

мында $C_i^j - \vec{c}_i$ векторунун j-координатасы.

$\overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{\overline{\beta}} \in \Delta_{(145)}$ шартынан төмөндөгү келип чыгат.

$$\begin{cases}\beta^1 C_1^2 + \beta^4 C_4^2 + \beta^5 C_5^2 = 0,\\ \beta^1 C_1^3 + \beta^4 C_4^3 + \beta^5 C_5^3 = 0.\end{cases}$$

Мындан (10) формулаларды колдонуу менен төмөндөгүнү алабыз:

$$\begin{cases}\beta^1 \Delta_{31}^2 + \beta^4 \Delta_{34}^2 + \beta^5 \Delta_{35}^2 = 0\\ \beta^1 \mathrm{C}_{321}^2 + \beta^4 \mathrm{C}_{324}^2 + \beta^5 \Delta_{325}^2 = 0.\end{cases}$$

Мындан

$$\beta^1 = \begin{vmatrix}\Lambda_{34}^2 & \Lambda_{35}^2\\ \mathrm{C}_{324}^2 & \mathrm{C}_{325}^2\end{vmatrix}; \beta^4 = \begin{vmatrix}\Lambda_{35}^2 & \Lambda_{31}^2\\ \mathrm{C}_{325}^2 & \mathrm{C}_{321}^2\end{vmatrix}; \beta^5 = \begin{vmatrix}\Lambda_{31}^2 & \Lambda_{34}^2\\ \mathrm{C}_{321}^2 & \mathrm{C}_{324}^2\end{vmatrix}; \qquad (11)$$

Тескерисинче эгерде $\beta \subset \Delta_{(145)}$ сызыгынын жанымa векторунун координаталары (11) шарттарды канааттандырышса, анда β жана $f_3^2(\beta) = \overline{\beta}$ сызыктары f_3^2 бөлүктөп чагылтуусунда $(\Delta_{(145)}, \Delta'_{(145)})$ түгөй бөлүштүрүүлөрүнүн квазикошмок сызыктары болушат.

Төмөндөгүдөй теорема далилденген:

Теорема. $\beta \subset \Delta_{(145)}$ жана $f_3^2(\beta) = \bar{\beta}$ сызыктары $\left(\Delta_{(145)}, \Delta'_{(145)}\right)$ түгөйүнүн квазикошмок сызыктары болушу үчүн β сызыгынын жанымa векторунун координаталары (11) шарттарды канааттандырышы зарыл жана жетиштүү.

Ушул эле теорема E_5 мейкиндигинде да орун ала тургандыгы көрсөтүлгөн.

Адабияттар

1. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ // Москва: Наука, 1967. – С. 481-482.
2. Матиева Г., Абдуллаева Ч.Х., Нышанбаева Н.Т. Е5 евклиддик мейкиндигинде бөлүктөп чагылтуусунун квазикошмок сызыктарынын жашашынын зарыл жана жетиштүү шарттары [текст] // Илим. Билим. Техника. – Ош, 2022. – № 3 (75). – С. 32-39.
3. Фиников, С. П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии [Текст] / С. П. Фиников. – М.-Л.: Госттехиздат, 1948. – 432 с.
4. Матиева Г, Абдуллаева Ч.Х. Евклиддик мейкиндигинде бөлүктөп чагылтуусунун квазикошмок сызыктарынын жашашы жөнүндө / ОшМУнун жарчысы. – Ош, 2023. №1(2). – Б. 141-152.