УДК: 517.928

DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_2(5)_19

СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ В КОМПЛЕКСНЫХ ОБЛАСТЯХ.

Мусакулова Назгул Куралбековна, преподаватель
kuralbekovna79@inbox.ru
ЖАГУ им. Б. Осмонова
Джалал-Абад, Кыргызстан

Аннотация. *В данной работе проведен структурный анализ решений сингулярно возмущенных уравнений в комплексных областях. Необходимость такого подхода объясняется тем, что асимптотическое поведение решений сингулярно возмущенных уравнений в разных частях рассматриваемых комплексных областях разное. Данная работа посвящается решению этой задачи для систем СВУ состоящих из двух уравнений первого порядка. Решение задачи состоит из двух частей. В первой части проведены некоторые геометрические построения, которые служат базой для дальнейших исследований. Во второй его части, согласно геометрических построений, проведено исследование асимптотического поведения решений поставленной задачи.*

Для структурного анализа решение рассматриваемой задачи расщепляется на три составляющие. Одна из них решение невозмущенного уравнения, а вторая характеризует погранслойные линии и области, а третья область притяжения.

Ключевые слова: *сингулярно возмущенные уравнения, аналитические и гармонические функции, расщепление решений, погранслойные линии и области, линии уровня, асимптотическое поведение решений.*

СИНГУЛЯРДЫК КОЗГОЛГОН ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН ЧЕЧИМДЕРИНИН КОМПЛЕКСТИК АЙМАКТАРДАГЫ СТРУКТУРАЛЫК АНАЛИЗИ.

Мусакулова Назгул Куралбековна, окутуучу
kuralbekovna79@inbox.ru
Б. Осмонов атындагы ЖАМУ
Жалал-Абад, Кыргызстан

Аннотация. *Бул макалада комплекстик областтардагы сингулярдуу козголгон теңдемелердин чечимдеринин структуралык анализи жүргүзүлөт. Мындай зарылдыг каралып жаткан комплекстүү областтардын ар кайсы бөлүктөрүндө сингулярдуу козголгон теңдемелердин чечимдеринин асимптотикалык жүрүм-туруму ар түрдүү экендиги менен түшүндүрүлөт. Бул эмгек эки биринчи даражадагы теңдемелерден турган СКТ (сингулярдуу козголгон теңдемелердин) системалары үчүн бул маселени чечүүгө арналган. Маселени чечүү эки бөлүктөн турат. Биринчи бөлүгүндө кийинки изилдөөлөр үчүн негиз болуп кызмат кыла турган кээ бир геометриялык түзүүлөр жүргүзүлдү. Анын экинчи бөлүгүндө геометриялык түзүүлөр боюнча маселенин чечимдеринин асимптотикалык жүрүм-турумун изилдөө жүргүзүлгөн.*

Структуралык талдоо үчүн каралып жаткан маселени чечүү үч компонентке бөлүнөт. Алардын бири козголбогон теңдеменин чечими, экинчиси чек ара катмарынын сызыктарын жана аймактарын мүнөздөйт, үчүнчүсү тартылуу аймагын аныктайт.

Ачкыч сөздөр: *сингулярдуу козголгон теңдемелер, аналитикалык жана гармоникалык функциялар, чечимдердин ажыралышы, чек ара катмар сызыктары жана аймактары, деңгээл сызыктары, чечимдердин асимптотикалык жүрүм-туруму.*

STRUCTURAL ANALYSIS OF SOLUTIONS TO SINGULARLY PERTURBED EQUATIONS IN COMPLEX DOMAINS.

Musakulova Nazgul Kuralbekovna, teacher
kuralbekovna79@inbox.ru
JAGU named after B. Osmonov
Jalal-Abad, Kyrgyzstan

Abstract. *This paper presents a structural analysis of solutions to singularly perturbed equations in complex domains. The need for such an approach is explained by the fact that the asymptotic behavior of solutions to singularly perturbed equations in different parts of the considered complex domains is different. This paper is devoted to solving this problem for SPE systems consisting of two first-order equations. The solution to the problem consists of two parts. The first part presents some geometric constructions that serve as a basis for further research. The second part, according to the geometric constructions, presents a study of the asymptotic behavior of solutions to the problem.*

For structural analysis, the solution to the problem under consideration is split into three components. One of them is the solution to the unperturbed equation, the second characterizes the boundary layer lines and domains, and the third is the attraction domain.

Key words: *singularly perturbed equations, analytic and harmonic functions, splitting of solutions, boundary layer lines and domains, level lines, asymptotic behavior of solutions.*

Введение

Исследованию асимптотического поведения решений сингулярно возмущенных уранений (СВУ) в комплексных областях, посвящены работы [1,2,3,4,6]. Таким образом возник вопрос: можно ли провести структурный анализ решения разделением решений на несколько составляющих? Для полной картины асимптотического поведения решений были введены понятия: погранслойная линия, погранслойные регулярные и сингулярные области. При этом исследования проведены без структорного анализа решений. В [5] для линейных СВУ первого порядка проведено расщепление решения при иррегулярном вырождении т.е. решение невозмущенного уравнения имеет особенность в одной точке.

Объект исследования и постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$\varepsilon z' = \left(\Lambda(t) + \varepsilon A(t)\right) z(t,\varepsilon) + b(t), \tag{1}$$

с начальным условием

$$z(t_0,\varepsilon) = z^0 \tag{2}$$

где 0< $\varepsilon -$ малый вещественный параметр; $t \in D \subset C -$ множество комплексных чисел, а $D -$ ограниченная область,

$$z(t,\varepsilon) = colon\left(z_1(t,\varepsilon), z_2(t,\varepsilon)\right), \Lambda(t) = diag\left(\lambda_1(t), \lambda_2(t)\right),$$
$$A(t) = \left(a_{mk}(t)\right)\,(m,k = 1,2), b(t) = colon\,\left(b_1(t), b_2(t)\right).$$

Поставим задачу о расщеплении решения задачи (1)-(2) на несколько составляющих. Задачу решим при следующих предположениях:

П1. $\lambda_j(t), a_{mk}(t), b_j(t) \in D$ – простанство аналитических функций в $D, j = 1,2\,, m,k = 1,2$.

П2. $\forall t \in D\ \left(\lambda_j(t) \neq 0\right)$.

В (1) пологая $\varepsilon = 0$ получим невозмущенное уравнение

$$\Lambda(t)\xi(t) + b(t) = 0. \tag{3}$$

Уравнение (3) имеет решение

$$\xi(t) = -\Lambda^{-1}(t)b(t), \tag{4}$$

где $\Lambda^{-1}(t) = diag(1/\lambda_1(t), 1/\lambda_2(t))$.

Согласно П2 $\xi(t) \in Q(D)$.

В (1) произведем замену

$$z(t,\varepsilon) = u(t,\varepsilon) + \xi(t), \qquad (5)$$

где $u(t,\varepsilon)$ – новая неизвестная функция. (5) подставляя в (1) получим

$$\varepsilon u'(t,\varepsilon) + \varepsilon\xi'(t) = \big(\Lambda(t) + \varepsilon A(t)\big)(u(t,\varepsilon) + \xi(t) + b(t))$$

или

$$\varepsilon u'(t,\varepsilon) = \big(\Lambda(t) + \varepsilon A(t)\big)\, u(t,\varepsilon) + \varepsilon A(t)\xi(t). \qquad (6)$$

Введем обозначение

$$A(t)\xi(t) \equiv \varphi(t).$$

Тогда (6) можем переписать в виде (далее аргументы неизвестной функции будем опускать)

$$\varepsilon u' = \big(\Lambda(t) + \varepsilon A(t)\big)u + \varepsilon\varphi(t), \qquad (7)$$

с начальным условием

$$u(t_0,\varepsilon) = u^0 \equiv z^0 - \xi(t_0). \qquad (8)$$

Таким образом поставленная задача сводится к расщеплению решения задачи (7) - (8). В (7) произведем замену

$$u = x(t,\varepsilon) + \Pi(t,\varepsilon), \qquad (9)$$

где $x(t,\varepsilon), \Pi(t,\varepsilon)$ – новые неизвестные функции.

(9) подставляя в (7) получим

$$\varepsilon\Pi_1' = (\lambda_1(t) + \varepsilon a_{11}(t))\Pi_1, \qquad \Pi_1(t_0,\varepsilon) = u_1^0, \qquad (10)$$

$$\varepsilon\Pi_2' = (\lambda_2(t) + \varepsilon a_{22}(t))\Pi_2 \qquad \Pi_2(t_0,\varepsilon) = u_2^0, \qquad (11)$$

$$\varepsilon x_1' = (\lambda_1(t) + \varepsilon a_{11})x_1 + \varepsilon a_{12}(t)x_2 + \varepsilon\varphi_1(t) + \varepsilon a_{12}(t)\Pi_2,$$
$$x_1(t_0,\varepsilon) = 0, \qquad (12)$$

$$\varepsilon x_2' = (\lambda_2(t) + \varepsilon a_{22})x_2 + \varepsilon a_{21}(t)x_1 + \varepsilon\varphi_2(t) + \varepsilon a_{21}(t)\Pi_1,$$
$$x_2(t_0,\varepsilon) = 0, \qquad (13)$$

Если учесть (5), (9), решение $\xi(t) \in Q(D)$ т.е. не имеет особенностей в области D. Таким образом для представления полной картины асимптотического поведения решения $z(t,\varepsilon)$остаётся исследовать задачи (10) – (11) и (12) - (13).

Решение задачи

Решение задачи разделим на две части. В первой части проведём некоторые геометрические построения в области D, а во второй его части, согласно геометрических построений, проведём исследование асимптотического поведения решений задач (10) – (11) и (12) - (13).

Задачи (10) – (11) и (12) - (13) заменим следующими:

$$\Pi_1 = u_1^0 exp\frac{F_1(t)}{\varepsilon}, \qquad (14)$$

$$\Pi_2 = u_2^0 exp\frac{F_2(t)}{\varepsilon}, \qquad (15)$$

$$x_1 = \int_{t_0}^{t} [a_{12}(\tau)x_2 + \varphi_1(\tau) + a_{12}(\tau)\Pi_2] exp\frac{F_1(t) - F_1(\tau)}{\varepsilon} d\tau, \qquad (16)$$

$$x_2 = \int_{t_0}^{t} [a_{21}(\tau)x_1 + \varphi_2(\tau) + a_{21}(\tau)\Pi_1] exp\frac{F_2(t) - F_2(\tau)}{\varepsilon} d\tau, \qquad (17)$$

где $F_j(t) = \int_{t_0}^{t}\big(\lambda_j(\tau) + \varepsilon a_{jj}(\tau)\big)d\tau, \quad j = 1,2.$

1. Геометрические построения

На асимптотическое поведение решений уравнений (14), (15), (16), (17) существенное влияние оказывают функции

$$F_{j0}(t) = \int_{t_0}^{t} \lambda_j(\tau)d\tau, \qquad j = 1,2.$$

Для геометрических построений используем линии уровня функций

$$ReF_{j0}(t), \qquad ImF_{j0}(t).$$

Определение. Множества

$$\left(p^j\right) = \{t \in D, ReF_{j0}(t) = p^j - const\},$$

$$(q^j) = \{t \in D, ImF_{j0}(t) = q^j - const\}$$

назовём линиями уровней функций $ReF_{j0}(t), ImF_{j0}(t)$.

Введем в рассмотрение линии уровня

$$\left(p_0^j\right) = \{t \in D, ReF_{j0}(t) = 0\}.$$

Линии $\left(p_0^j\right)$, согласно определения функций $F_{j0}(t)$, проходят через точку t_0. Относительно $\left(p_0^j\right)$ сделаем следующее предположение:

П3. $\forall t \in D$ линии $\left(p_0^j\right)$ не имеют общих точек, кроме t_0.

Возьмём линию (p_0^1). Согласно П2 линия уровня (p_0^1) не имеет точек ветвления и область D разделяется на части D_1^1 и D_1^2 линией (p_0^1). Анологично (p_0^2) разделяет область D на частти D_2^1 и D_2^2 (рис. 1).

Если рассмотреть (p_0^1) и (p_0^2) совместно, то область D разделяется на четыре части (рис. 1).

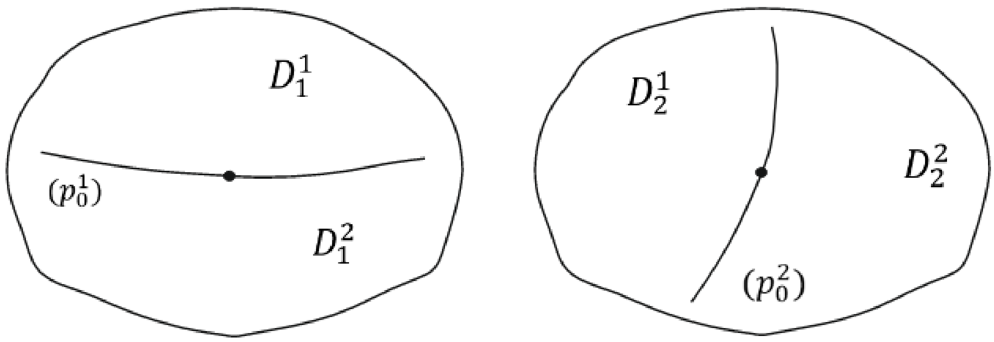

Рис. 1. Деление области D линиями (p_0^1), (p_0^2).

Лемма1. Пусть выполняются П1, П2, П3. Тогда существует область $D_0 \subset D$ и выполняется соотношение

$$\forall t \in D_0 \ (ReF_{j0}(t) \leq 0),$$

причем равенство имеет место только на границе области D_0.

Доказательство. Если выполняется П1, П2, то область D линиями $\left(p_0^j\right)$ разделяется на части D_j^k $(k, j = 1,2)$. На линии $\left(p_0^j\right)$ возьмём произвольную точку $\tilde{t}_0$ и проведём линию

$$(q^j) = \{t \in D, ImF_{j0}(t) = q^j - const\}.$$

Функцию $ReF_{j0}(t)$ рассмотрим вдоль (q^j). Известно [6,7] вдоль (q^j) функция $ReF_{j0}(t)$ строго монотонна. Если учесть $ReF_{j0}(t)$=0, то справедливы, одно из следующих соотношений:

$$\forall t \in D_1^1 \ (ReF_{10}(t) \leq 0 \vee ReF_{10}(t) \geq 0,$$

$$\forall t \in D_1^2 \ (ReF_{10}(t) \geq 0 \vee ReF_{10}(t) \leq 0;$$

$$\forall t \in D_2^1\ (ReF_{20}(t) \leq 0 \vee ReF_{20}(t) \geq 0, \qquad (18)$$
$$\forall t \in D_2^2\ (ReF_{20}(t) \geq 0 \vee ReF_{20}(t) \leq 0.$$

Соотношения (18) взаимно-равнозначны. Пусть выполняются соотношения

$$\forall t \in D_1^1\ (ReF_{10}(t) \leq 0), \forall t \in D_1^2\ (ReF_{10}(t) \geq 0); \qquad (19)$$
$$\forall t \in D_2^1\ (ReF_{20}(t) \leq 0), \forall t \in D_2^2\ (ReF_{20}(t) \geq 0) \text{ (рис.2).}$$

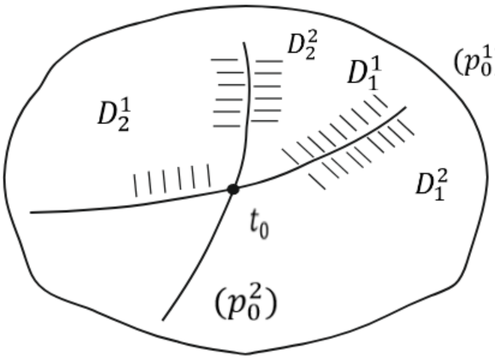

Рис. 2. Области D_j^k $(k, j = 1,2)$.

Из соотношений (19) следует

$$D_1^1 \cap D_2^1 = D_0 \quad \text{и}$$
$$\forall t \in D_0 \quad ReF_{j0}(t) \leq 0,\ j=1,2),$$

причем равенства имеют место на границах (p_0^1) и (p_0^2), ограничивающие D_0 (рис.3).

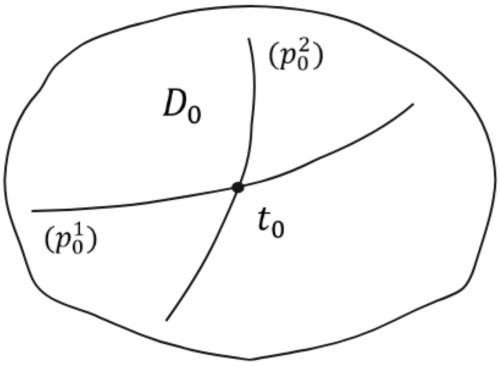

Рис. 3. Область D_0.

Лемма доказана.

Определим линии уровня

$$\left(p_0^{j-\varepsilon}\right) = \left\{t \in D_0, ReF_{j0}(t) = \varepsilon ln\varepsilon\right\} (j = 1,2).$$

Часть области D_0 ограниченные $\left(p_0^j\right), \left(p_0^{j-\varepsilon}\right)$ $(j = 1,2)$ обозначим $D_{0\varepsilon}$, а $D_0 \setminus D_{0\varepsilon} = D_{01}$, причем будем считать части $(p_0^{1-\varepsilon}) \cup (p_0^{2-\varepsilon}) \in D_{01}$ (рис.4).

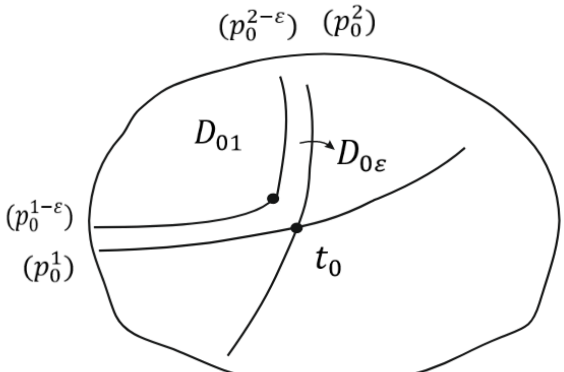

Рис. 4. Области $D_{01}, D_{0\varepsilon}$.

Определим множества линии уровней

$$\{(q^j)\}\,(j=1{,}2)$$

Сделаем следующее предположение:

П4. Произвольная линия из множества $\{(q^1)\}$, часть (p_0^2) (границу D_0), пересекает только в одной точке и произвольная линия из множества $\{(q^2)\}$, часть (p_0^1) (граница D_0), пересекает только в одной точке (рис. 5).

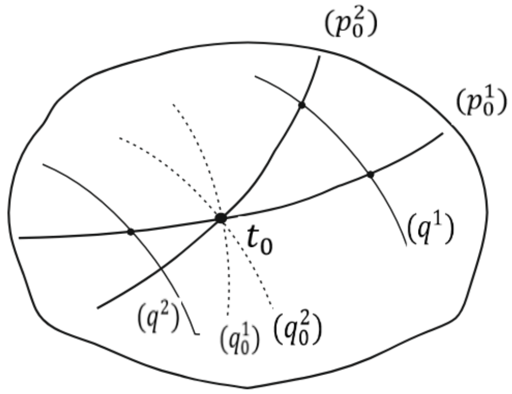

Рис. 5. Линии $(q^1), (q^2)$.

П5. По части (p_0^2)(граница D_0) функция $ReF_{10}(t)$ убывает, по части (p_0^1) (граница D_0) функция $ReF_{20}(t)$ убывает.

Примечание. Предположения П4, П5 носят локальный характер и сформулированы для простоты дальнейших вычислений.

В каждом конкретном случае эти предположения можно заменить другими.

Справедлива

Лемма 2. По выбранным путям функции $ReF_{j0}(t)$ не возрастают.

Доказательство. По $\left(p_0^j\right)$ согласно П5 функции $ReF_{j0}(t)$ постоянны или убывают, а по $\left(q^j\right)$ убывают. Лемма доказана.

2. Аналитическая часть.

Функции (14) – (15) и уравнения (16) – (17) будем рассматривать в области D_0.

Рассмотрим функции (14) – (15).

Если $t \in D_{0\varepsilon}$, то $(\Pi = colon(\Pi_1, \Pi_2))$

$\|\Pi\| \leq M_1 max\, exp\,\frac{ReF_{j0}(t)}{\varepsilon} \leq M_1.$

Если $t \in D_{01}$, то

$$\|\Pi\| \leq M_1\varepsilon^n, n \in N.$$

Объединяя полученные оценки имеем

$$\|\Pi\| \leq M_1 \begin{cases} 1, \ t \in D_{0\varepsilon}; \\ \varepsilon^n, t \in D_{01} \end{cases} \qquad (20)$$

Таким образом функция $\Pi(t,\varepsilon)$ существенна только в области $D_{0\varepsilon}$ и как только t пересекает границу области D_{01}, функция $\Pi(t,\varepsilon)$ становится достаточно малой по ε.

Теперь рассмотрим функции (16) – (17).

Сначала определим пути интегрирования.

Пути интегрирования выберем, согласно предположений П3, П4, П5, для каждой компоненты $x_j(t,\varepsilon)(j=1{,}2)$.

Для: $x_1(t,\varepsilon)$ путь состоит из части: $(p_0^1)[t_0,\tilde{t}]$ или $(p_0^2)[t_0,\tilde{t}]$ и $(q^1)[\tilde{t},t]$; $x_2(t,\varepsilon)$ путь состоит из части $(p_0^2)[t_0,\tilde{t}]$ или $(p_0^1)[t_0,\tilde{t}]$ и $(q^1)[\tilde{t},t]$.

К (16), (17) применим метод последовательных приближений, которые определим следующим образом:

$$x_{1m} = \int_{t_0}^{t} [\varphi_1(\tau) + a_{12}(\tau)\Pi_2 + a_{12}(\tau)x_{2m-1}] exp \frac{F_1(t) - F_1(\tau)}{\varepsilon} d\tau, \quad (21)$$

$$x_{10} \equiv 0, m = 1,2, \dots,$$

$$x_{2m} = \int_{t_0}^{t} [\varphi_2(\tau) + a_{21}(\tau)\Pi_1 + a_{21}(\tau)x_{1m-1}] exp \frac{F_2(t) - F_1(\tau)}{\varepsilon} d\tau,$$

$$x_{20} \equiv 0, m = 1,2, \dots .$$

Оценим и докажем равномерную сходимость последовательных приближений. Случай $t \in (p_0^1) \cup (p_0^2)$ рассмотрим отдельно.

Из (21) при $m = 1$ имеем

$$x_{11} = \int_{t_0}^{t} [\varphi_1(\tau) + a_{12}(\tau)\Pi_2] exp \frac{F_1(t) - F_1(\tau)}{\varepsilon} d\tau, \quad (22)$$

$$x_{21} = \int_{t_0}^{t} [\varphi_2(\tau) + a_{21}(\tau)\Pi_2] exp \frac{F_2(t) - F_1(\tau)}{\varepsilon} d\tau.$$

Оценим x_{11} для $t \in (p_0^1)$. Учитывая выбранный путь интегрирования имеем

$$x_{11} = \int_{(p_0^1)} [\varphi_1(\tau) + a_{12}(\tau)\Pi_2] exp \frac{F_1(t) - F_1(\tau)}{\varepsilon} d\tau.$$

Интеграл в правой части разделим на два

$$x_{11} = \int_{(p_0^1)} \varphi_1(\tau) exp \frac{F_1(t) - F_1(\tau)}{\varepsilon} d\tau + \int_{(p_0^1)} a_{12}(\tau)\Pi_2 exp \frac{F_1(t) - F_1(\tau)}{\varepsilon} d\tau. \quad (23)$$

Примечание. При оценке последовательных приближений используем параметрические уравнения кривых $\left(p_0^j\right)$ $(j = 1,2)$ [7], которые можно записать в виде $t_1 = t_1(s), t_2 = t_2(s)$, где $0 \le s \le s_0$ и s длина кривой от точки t_0 до $t \in \left(p_0^j\right)$.

В (23), первый интеграл проинтегрировав по частям (согласно принятых предположений эта операция выполнима), получим, что он имеет порядок ε.

Во втором интеграле перейдем к модулю

$$\left| \int_{(p_0^1)} a_{12}(\tau)\Pi_2 exp \frac{F_1(t) - F_1(\tau)}{\varepsilon} d\tau \right| \le M_2 \left| \int_{(p_0^1)} exp \frac{ReF_{02}(\tau)}{\varepsilon} d\tau \right|.$$

Согласно П5 функция $ReF_{02}(\tau)$ убывает по выбранному пути интегрирования. Если учесть $ReF_{02}(t_0) = 0$, то $\forall t \in (p_0^1)$ $(ReF_{02}(t) \le 0)$.

Учитывая сказанное, интеграл $\int_{(p_0^1)} exp\frac{ReF_{02}(\tau)}{\varepsilon}|d\tau|$ проинтегрировав по частям, получим, что он имеет порядок ε. На основе проведенных оценок получим

$$|x_{11}| \leq M_2\ \varepsilon, t \in (p_0^1).$$

Пусть $t \in (p_0^2)$. Для этого случая имеем

$$x_{11} = \int\limits_{(p_0^2)} [\varphi_1(\tau) + a_{12}(\tau)\Pi_2] exp\frac{F_1(t) - F_1(\tau)}{\varepsilon} d\tau.$$

В рассматриваемом случае, согласно П5, функция $ReF_{01}(t)$ убывает и $\forall t \in (p_0^2)$ $(ReF_{01}(t) \leq 0)$, причем только при $t = t_0, (ReF_{01}(t_0) = 0)$.

Таким образом для оценки x_{11} достаточно перейти к модулю и проинтегрировать $\int_{(p_0^2)} exp\frac{ReF_{01}(t) - ReF_{01}(\tau)}{\varepsilon}|d\tau|$ по частям. Тогда получим

$$|x_{11}| \leq M_2\ \varepsilon, t \in (p_0^2).$$

В итоге имеем

$$|x_{11}| \leq M_2\ \varepsilon, t \in (p_0^1) \cup (p_0^2).$$

Для $x_{11}(t, \varepsilon)$ оценка рассматривается аналогично и

$$|x_{21}| \leq M_2\ \varepsilon, t \in (p_0^1) \cup (p_0^2).$$

Оценим последующие приближения. Имеем

$$x_{12} = x_{11} + \int\limits_{t_0}^{t} a_{12}(\tau) x_{12} exp\frac{F_1(t) - F_1(\tau)}{\varepsilon} d\tau. \tag{24}$$

Учитывая Лемму 2 и переходя в (24) к модулю получим

$$|x_{12}| \leq M_2\varepsilon\ (1 + M_3 s).$$

Аналогично

$$|x_{22}| \leq M_2\varepsilon\ (1 + M_3 s).$$

Продолжая процесс получим

$$|x_{1m}| \leq M_2\varepsilon \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(M_3 s)^k}{k!}, \tag{25}$$

$$|x_{2m}| \leq M_2\varepsilon \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(M_3 s)^k}{k!}, \quad t \in (p_0^1) \cup (p_0^2).$$

Из (25) следует

$$|x_{1m}| \leq M_2\varepsilon\ expM_3 s < M_2\varepsilon\ expM_3 s_0, \tag{26}$$

$$|x_{2m}| \leq M_2\varepsilon\ expM_3 s < M_2\varepsilon\ expM_3 s_0, \qquad m = 1,2, \dots .$$

Для доказательства сходимости (21) оценим

$$\|x_m - x_{m-1}\|, \qquad m = 1,2, \dots .$$

Если $m = 1$, то учитывая (26), получим $\|x_m\| < M_4\varepsilon$, где $M_4 = M_2 expM_3 s_0$.

Далее имеем

$$\|x_m - x_{m-1}\| < M_4\varepsilon \frac{(M_3 s)^{m-1}}{(m-1)!}, \tag{27}$$

Учитывая (27), можем утверждать, ряд

$\sum_{m=1}^{\infty}(x_m - x_{m-1})$ $\forall t \in (p_0^1) \cup (p_0^2)$ сходится равномерно. Отсюда следует равномерная сходимость (21) к некоторой функции $x(t,\varepsilon)$ – которая является решением (16) – (17) и для этого решения, согласно (26), справедлива оценка

$$\|x(t,\varepsilon)\| < M_4\varepsilon, t \in (p_0^1) \cup (p_0^2). \tag{28}$$

Прежде, до рассмотрения случая $t \in D_{0\varepsilon} \cup D_{01}$, в (16) – (17) проведем некоторые преобразования, с учетом выбранных путей интегрирования.

Пусть $\tilde{t} \in (p_0^1) \cup (p_0^2)$.

$$x_1 = \int_{t_0}^{\tilde{t}} [a_{12}(\tau)x_2 + \varphi_1(\tau) + a_{12}(\tau)\Pi_2] exp\frac{F_1(t) - F_1(\tau)}{\varepsilon} d\tau +$$

$$+ \int_{\tilde{t}}^{t} [a_{12}(\tau)x_2 + \varphi_1(\tau) + a_{12}(\tau)\Pi_2] exp\frac{F_1(t) - F_1(\tau)}{\varepsilon} d\tau =$$

$$= exp\frac{F_1(t) - F_1(\tilde{t})}{\varepsilon}\left\{\int_{t_0}^{\tilde{t}} [a_{12}(\tau)x_2 + \varphi_1(\tau) + a_{12}(\tau)\Pi_2] exp\frac{F_1(\tilde{t}) - F_1(\tau)}{\varepsilon} d\tau\right\} +$$

$$+ \int_{\tilde{t}}^{t} [a_{12}(\tau)x_2 + \varphi_1(\tau) + a_{12}(\tau)\Pi_2] exp\frac{F_1(t) - F_1(\tau)}{\varepsilon} d\tau.$$

Выражение, содержащееся в скобке $\{\ldots\}$, даёт решение (16) при

$t = \tilde{t} \in (p_0^1) \cup (p_0^2)$. Тогда

$$x_1 = x_1(\tilde{t},\varepsilon) exp\frac{F_1(t) - F_1(\tilde{t})}{\varepsilon} +$$

$$+ \int_{\tilde{t}}^{t} [a_{12}(\tau)x_2 + \varphi_1(\tau) + a_{12}(\tau)\Pi_2] exp\frac{F_1(t) - F_1(\tau)}{\varepsilon} d\tau. \tag{29}$$

Аналогично

$$x_2 = x_2(\tilde{t},\varepsilon) exp\frac{F_2(t) - F_2(\tilde{t})}{\varepsilon} +$$

$$+ \int_{\tilde{t}}^{t} [a_{21}(\tau)x_1 + \varphi_2(\tau) + a_{21}(\tau)\Pi_1] exp\frac{F_2(t) - F_2(\tau)}{\varepsilon} d\tau. \tag{30}$$

Для исследования асимптотического поведения решений (29) - (30), применим метод последовательных приближений, которые определяются как в (21). Проведём оценку последовательных приближений и докажем равномерную сходимость. Повторяются все вычисления, проведенные для случая $t \in (p_0^1) \cup (p_0^2)$. Только в этом случае надо учесть

$$\left|\int_{t_0}^{t} exp\frac{F_j(t)-F_j(\tau)}{\varepsilon}|d\tau|\right| = O(\varepsilon).$$

Для этого достаточно проинтегрировать этот интеграл по частям.

В итоге получается

$$\|x(t,\varepsilon)\| < M_5\varepsilon, t \in D_{0\varepsilon} \cup D_{01}. \quad (31)$$

Таким образом доказана

Теорема (о расщеплении решений). Пусть рассматривается задача (1) – (2) и выполняются предположения П1, П2, П3, П4, П5. Тогда существует область

$D_0 = D_{0\varepsilon} \cup D_{01}$ и решение $z(t,\varepsilon)$ задачи (1) – (2) определенное в D_0 и это решение представляется в виде

$$z(t,\varepsilon) = \xi(t) + \Pi(t,\varepsilon) + x(t,\varepsilon),$$

причем для $\Pi(t,\varepsilon)$ справедлива оценка (20), а для $x(t,\varepsilon)$ оценка (31),

$\xi(t) -$ решение невозмущённого уравнения.

Вывод

Из доказанной Теоремы вытекает: Решение рассматриваемой задачи расщепляется на три составляющие. Одна из них решение невозмущенного уравнения, а вторая характеризует погранслойные линии и области, а третья область притяжения $z(t,\varepsilon)$ к $\xi(t)$.

Литература

1. Алыбаев, К.С. (2001) Метод линий уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости. Вестник КГНУ, сер. 3, вып. 6. Бишкек,.
2. Панков П.С., Алыбаев К.С., Тампагаров К.Б., Нарбаев М.Р. Явление погранслойных линий и асимптотика решений сингулярно возмущенных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими функциями. Вестник ОшГУ, 2013-№1 (специальный выпуск). – С. 227-231.
3. Мурзабаева, А. Б. (2019) Исследование сингулярно возмущенных уравнений с разделением множеств при вырождении. .(кандидатская диссертация). ОшГУ, Ош.
4. Нарымбетов, Т. К. (2022) Существования и связь областей притяжения решений сингулярно возмущенных уравнений.(кандидатская диссертация). ОшГУ, Ош.
5. Алыбаев, К.С., Мусакулова, Н.К. (2022) Расщепление решений иррегулярно вырожденных линейных сингулярно возмущенных уравнений в комплексных областях Наука. Образование. Техника. № 3. сс. 22–32, https://doi: 10.54834/16945220_2022_3_22.
6. Лаврентьев, М. А. (1973). Методы теории функций комплексного. Москва: Издательство Наука.
7. Федорюк, М. В. (1977). Метод перевала. Москва: Издательство Наука.