УДК 519.622
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_2(5)_18

ЖЫЛУУЛУК ПРОЦЕССТЕРИН ОПТИМАЛДАШТЫРУУДАГЫ ОПТИМАЛДУУ ЧЕКТИК БАШКАРУУНУ СИНТЕЗДӨӨ

Момбекова Гулназ Береновна, улук окутуучу
gmombekova78@mail.ru
Ош мамлекеттик университети
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *Макалада интегралдык-дифференциалдык теңдемелер менен сүрөттөлгөн жылуулук процесстерин оптималдаштыруудагы чек аралык оптималдуу башкаруунун синтез маселесинин чечилимге ээ болушу жөнүндөгү суроолор изилденген. Чек аралык таасир берүүчү функциясы башкаруу функциясына салыштырмалуу сызыктуу эмес болгон учур каралган. Синтездөөдө оптималдуу башкарууну тургузуунун алгоритми иштелип чыккан жана Беллман тибиндеги теңдеменин чечиминин түзүлүшү аныкталган.*

Ачкыч сөздөр: *чек аралык маселе, жалпыланган чечим, функционал, Беллман-Егоровдун схемасы, Беллман тибиндеги интегралдык-дифференциалдык теңдеме, чек аралык башкаруунун синтези.*

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИ ОПТИМИЗАЦИИ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ

Момбекова Гулназ Береновна, ст. преподаватель
gmombekova78@mail.ru
Ошский государственный университет
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *В статье исследованы вопросы разрешимости задачи синтеза оптимального граничного управления при оптимизации тепловых процессов в случае, когда процесс описывается интегро-дифференциальным уравнением и функция граничного источника нелинейна относительно функции управления. Разработан алгоритм построения синтезирующего оптимального управления и определена структура решения нелинейного интегро-дифференциального уравнения типа Беллмана.*

Ключевые слова: *Краевая задача, обобщенное решение, функционал, схема Беллмана-Егорова, интегро-дифференциальное уравнение типа Беллмана, синтез граничного управления.*

SYNTHESIS OF OPTIMAL BOUNDARY CONTROL WHEN MINIMIZING OF THERMAL PROCESSES

Mombekova Gulnaz Berenovna, teacher
gmombekova78@mail.ru
Osh State University
Osh, Kyrgyzstan

Abstract. *The paper studies the solvability of the optimal boundary control synthesis problem in the optimization of thermal processes described by partial integro-differential equations. The case when the function of the boundary action depends nonlinearly on the control function is considered. An algorithm for constructing a synthesizing optimal control has been developed. The structure of the solution to a nonlinear integro-differential equation of Bellman type is determined.*

Keywords: *Boundary value problem, generalized solution, functional, Bellman-Egorov scheme, Bellman-type integro-differential equation, synthesis of boundary control.*

Киришүү

Синтездөө маселесин чечүү жана бул багытта илимий изилдөөлөрдү жүргүзүү А.И.Егоровдун [1] эмгектери пайда болгондон кийин мүмкүн болду. Жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелер менен сүрөттөлгөн жылуулук процесстерин оптималдаштыруунун синтездик маселелерин изилдөөгө арналган аз сандагы эмгектер жарык көрдү. Макалада интегралдык-дифференциалдык теңдемелер менен сүрөттөлгөн жылуулук процесстерин оптималдаштыруудагы чек аралык оптималдуу башкаруунун синтез маселесинин чечилимге ээ болушу жөнүндөгү суроолор изилденген. Чек аралык таасир берүүчү функциясы башкаруу функциясына салыштырмалуу сызыктуу эмес болгон учур каралган. Синтездөөдө оптималдуу башкарууну тургузуунун алгоритми иштелип чыккан жана Беллман тибиндеги теңдеменин чечиминин түзүлүшү аныкталган

Синтез маселесинин коюлушу

$$J[u(t)] = \int_0^T\int_0^1 \left[V(t,x)-\xi(t,x)\right]^2 dxdt + \beta\int_0^T p\left[t,u(t)\right]dt,\ \beta>0 \tag{1}$$

функционалынын

$$\begin{aligned} &V_t = V_{xx} + \gamma\int_0^T K(t,\tau)V(t,x)d\tau, \quad 0<x<1, 0<t<T \\ &V(0,x)=\varphi(x), \quad 0<x<1 \\ &V_x(t,0) = f[t,u(t)],\ V_x(t,1)=0,\ 0<t<T \end{aligned} \tag{2}$$

чектик маселесинин жалпыланган чечимдеринин көптүгүндөгү минималдаштыруу маселесин карайлы, мында

$$\xi(t,x)\in H(Q), Q=(0,1)\times(0,T),\ \psi(x)\in H(0,1),$$
$$P[t,u(t)]\in H(0,T),\ f[t,u(t)]\in H(0,T), K(t,\tau)\in H(D), D=(0,T)\times(0,T)$$

- квадраттык суммалануучу функциялардын H Гильберттик мейкиндиктеринин тиешелеш келген элементтери болушкан берилген функциялар,

$u(t)]\in H(0,T)$ - башкаруу функциясы, мында $f[t,u(t)]$ чек ара булагы функциясы $u(t)$ функционалдык өзгөрүлмөсү боюнча монотондуулук шартын канаттандырат, б.а.

$$f[t,u(t)]\neq 0, \forall t\in(0,T) \tag{3}$$

Синтез маселесинде $V(t,x)$ башкарылуучу процессинин абалына жараша

$$u^0(t) = \varphi[t,V(t,x)] \tag{4}$$

функциясы (же функционалы) түрүндөгү керектүү башкарууну табуу талап кылынат.

(2) - чектик маселесинин жалпыланган чечими катары $V_x(t,x)\in H(Q)$ жалпыланган туундусуна ээ болгон жана

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \left(V(t,x)\Phi(t,x)\right)_{t_1}^{t_2} dx = \int_{t_1}^{t_2}\int_0^1 \left[V(t,x)\Phi_t(t,x) - V_x(t,x)\Phi_x(t,x)\right]dxdt + \\ &+\int_{t_1}^{t_2}\int_0^1 \left(\gamma\int_0^t K(t,\tau)V(\tau,x)d\tau\right)\Phi(t,x)dxdt - \int_{t_1}^{t_2}\Phi(t,0)f[t,u(t)]dt \end{aligned} \tag{5}$$

интегралдык теңдештигин канааттандырган $V(t,x)\in H(Q)$ функциясын түшүнөбүз. Мында, (5)-шарт каалагандай $t\in[t_1,t_2]$ жана каалагандай $\Phi(t,x)\in H_1(Q)$ функциясы үчүн, ошондой эле алсыз маанидеги баштапкы шарт аткарылат, б.а.

$$\lim_{t\to 0}\int_0^1 [V(t,x)-\Phi(x)]\Phi_0(x)dx = 0 \quad \forall \Phi_0(x) \in H(0,1). \tag{6}$$

(2) - чектик маселесинин жалпыланган чечимин

$$V(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty} V_n(t) z_n(x), \;\; V_n(t)=\int_0^1 V(t,x) z_n(x)dx, \tag{7}$$

Фурье катары түрүндө тургузабыз. Мында $z_n(x)$ - бул

$$z_n''(x)+\lambda_n^2 z_n(x), \; z_n'(0)=0, z_n'(1)=0 \tag{8}$$

чектик маселесинин чечими жана төмөнкү көрүнүштө:

$$z_n(x)=\begin{cases} 1, n=0 \\ \sqrt{2}\cos\lambda_n x, n\neq 1,2,3,..., \lambda_n = n\pi \end{cases} \tag{9}$$

Ал эми $v_n(t)$ Фурье коэффициенттери 2-түрдөгү Фредгольм теңдемесинин чечимдери катары аныкталат:

$$V_n(t)=\gamma\int_0^T K_n(t,s)V_n(s)ds + a_n(t) \tag{10}$$

Мында

$$K_n(t,s)=\int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} K(\tau,s)d\tau \,, \tag{11}$$

ядро, ал эми

$$a_n(t)=e^{-\lambda_n^2 t} - \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)} z_n(0) f(\tau,u(\tau))d\tau \tag{12}$$

бош мүчө.

(4)-формулага ылайык Фурье коэффициенттери

$$V_n(t)=\gamma\int_0^T R_n(t,s,\gamma)a_n(s)ds + a_n(t), \tag{13}$$

формула боюнча аныкталышат. Бул жерде

$$R_n(t,s,\gamma)=\sum_{i=1}^{\infty}\gamma^{i-1}K_{n,i}(t,s), \tag{14}$$

резольвентасы жана

$$K_{n,i+1}(t,s)=\int_0^t K_n(t,\eta)K_{n,i}(\eta,s)d\eta, \; K_{n,1}(t,s)\equiv K_n(t,s)$$

интеграцияланган ядролору белгилүү функциялар болушат.

Төмөнкү баалоолор далилденди:

$$\left|K_{n,i}(t,s)\right|^2 \le \frac{\left(K_0T\right)^{i-1}}{\left(2\lambda_n^2\right)^i}\int_0^T K^2(\tau,s)d\tau,\ n=0,1,2,...$$

$$\left|R_n(t,s,\gamma)\right| \le \left(\frac{\int_0^T K^2(\tau,s)d\tau}{\sqrt{2\lambda_n^2}-|\gamma|\sqrt{K_0T}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\int_0^T R_n^2(t,s,\gamma)ds \le \frac{\int_0^0\int_0^T K^2(\tau,s)d\tau ds}{\left(\sqrt{2\lambda_n^2}-|\gamma|\sqrt{K_0T}\right)^2} = \frac{K_0}{\left(\sqrt{2\lambda_n^2}-|\gamma|\sqrt{K_0T}\right)^2},$$

Анын негизинде (14) Нейман функциясы

$$|\gamma|\sqrt{\frac{K_0T}{2\lambda_n^2}}<1,\ \left(|\gamma|<\frac{\sqrt{2\lambda_n^2}}{\sqrt{K_0T}}\xrightarrow{n\to\infty}\infty\right) \qquad (15)$$

шартында үзгүлтүксүз функцияга жыйналат.

Андан ары (7), (13) формулалар менен аныкталган $V(t,x)$ функциясы квадраттык суммалануучу функция экендиги, б.а. $V(t,x)\in H(Q)$ далилденди.

Синтез маселесинин чечилиши

Синтез маселесинин чечилишин Беллман-Егоров схемасына ылайык изилдейбиз. Беллман функционалын

$$S[t,V(t,x)] = \min_{\substack{u\in \mathrm{P}\\ t\le\tau\le T}}\left\{\beta\int_t^T P^2[\tau,u(\tau)]d\tau + \int_0^T\int_0^1\left[V(\tau,x)-\xi(t,x)\right]^2 dxdt\right\} \qquad (16)$$

көрүнүшүндө аныктайбыз.

Беллман тибиндеги теңдеменин алынышы

$$S[t,V(t,x)] = \min_{\substack{u\in \mathrm{P}\\ t\le\tau\le t+\Delta t}}\left\{\beta\int_t^{t+\Delta t} P[\tau,u(\tau)]d\tau + \min_{\substack{u\in \mathrm{P}\\ t+\Delta t\le\tau\le t}}\left[\beta\int_{t+\Delta t}^T P[\tau,u(\tau)]d\tau + \int_0^T\int_0^1\left[V(t,x)-\xi(t,x)\right]^2 dxdt\right]\right\} =$$

$$= \min_{\substack{u\in \mathrm{P}\\ t\le\tau\le t+\Delta t}}\left\{\beta\int_t^{t+\Delta t} P[\tau,u(\tau)]d\tau + S[t+\Delta t, V(t+\Delta t,x)]\right\} \qquad (17)$$

Андан ары $S[t+\Delta t, V(t+\Delta t,x)]$ ти карайбыз жана $S[t,V(t,x)]$ функциясын t боюнча дифференцирленүүчү функция, ал эми $V(t,x)$ боюнча Фреше эрежесинин негизинде дифференцирленүүчү деп болжолдойбуз.

$V(t+\Delta t,x)=V(t,x)+\Delta V(t,x)$ экендигин эске алып,

$$\begin{aligned} &S[t+\Delta t, V(t+\Delta t,x)] = S[t+\Delta t, V(t,x)+\Delta V(t,x)] = \\ &= S[t,V(t,x)] + \frac{\partial S[t,V]}{\partial t}\Delta t + dS[t,V(t,x);\Delta V(t,x)] + \\ &+o(\Delta t)+\tau[t,V(t,x);\Delta V] \end{aligned} \qquad (18)$$

барабардык алынат. Мында $o(\Delta t)$ жана $\tau[t,V(t,x);\Delta V]$ – чексиз кичине чоңдуктар, ал эми $dS[t,V(t,x);\Delta V(t,x)]$- Фреше дифференциалы жана $\Delta V(t,x)$ өсүндүсүнө салыштырмалуу сызыктуу функционал болот. Фреше дифференциалы үчүн

$$dS[t,V(t,x);\Delta V(t,x)] = \int_0^1 m(t,x)\Delta V(t,x)dx \qquad (19)$$

катышы (Рисстин теоремасы) орун алат, мында $m(t,x)$ - Беллман функционалынын градиенти.

$$\int_0^1 m(t,x)\Delta V(t,x)dx = \int_0^1 \left(m(t,x)\Delta V(t,x)\right)_t^{t+\Delta t} dx - \int_0^1 V(t+\Delta t,x)\Delta m(t,x)dx$$

экендигин жана (18)-көрүнүштү эске алып, (17)-катышты төмөнкүчө жазууга болот:

$$-\frac{\partial S[t,V(t,x)]}{\partial t}\Delta t + \min_{\substack{u\in P\\ t\le\tau\le t+\Delta t}} \left\{ \beta \int_t^{t+\Delta t} p[\tau,u(\tau)]d\tau + \int_0^1 \left(m(t,x)V(t,x)\right)_t^{t+\Delta t} dx - \right.$$
$$\left. -\int_0^1 V(t+\Delta t,x)\Delta m(t,x)dx + o(\Delta x) + r[t,V(t,x);\Delta V(t,x)] \right\} \qquad (20)$$

Эми (5) интегралдык катышын колдонобуз. $\Phi(t,x)\equiv m(t,x)$ деп алып төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\int_0^1 \left(V(t,x)m(t,x)\right)_t^{t+\Delta t} dx = \int_t^{t+\Delta t}\int_0^1 \left\{ m_t(t,x)V(t,x) - m_x(t,x)V_x(t,x) + \right.$$
$$\left. + \left(\gamma\int_0^T K(t,\tau)V(\tau,x)d\tau\right) m(t,x)\right\} dxdt - \int_t^{t+\Delta t} m(t,0)f[\tau,u(\tau)]d\tau \, .$$

Бул барабардыкты (20)-формулага коюп жана Δt га бөлөбүз:

$$-\frac{\partial S[t,V(t,x)]}{\partial t} = \min_{\substack{u\in P\\ t\le\tau\le t+\Delta t}} \left\{ \beta p[t,u(t)] + \frac{o_1(\Delta t)}{\Delta t} + \int_0^1 \left\{ m_x(t,x)V(t,x) - \right.\right.$$
$$\left. -m_x(t,x)V(t,x) + \left(\mu\int_0^T K(t,\tau)V(\tau,x)d\tau\right) m(t,x)] \right\} dx -$$
$$-m(t,0)f[t,u(t)] + \frac{o_2(\Delta t)}{\Delta t} - \int_0^1 V(t+\Delta t,x)\frac{\Delta m(t,x)}{\Delta t}dx + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} +$$
$$\left. + \frac{1}{\Delta t} r[t,V(t,x);\Delta V(t,x)] \right\}$$

Андан ары $\Delta t \to 0$ пределге өтөбүз жана

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\Delta t} \to 0, \; \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t} r[t,V(t,x);\Delta V(t,x)] = 0$$

экендигин эске алып,

$$-\frac{\partial S[t,V(t,x)]}{\partial t} = \min_{u\in P}\left\{ \beta p[t,u(t)] - m(t,0)f[t,u(t)] + \int_0^1 \left\{ -m_x(t,x)V_x(t,x) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(\gamma\int_0^T K(t,\tau)V(\tau,x)d\tau\right) m(t,x)]dx \right\}\right. \qquad (21)$$

көрүнүшүндөгү бардык $t\in[0,T]$ өзгөрүлмөсү боюнча ар дайым аткарылган Беллман тибиндеги интегро-дифференциалдык теңдемени алабыз.

Бул теңдемени (16) формуланын негизинде Беллман функционалынын негизинде алынган

$$S[t,V(t,x)]=\int_0^T\int_0^1\left[V(t,x)-\xi(t,x)\right]^2 dx \qquad (22),$$

шарт менен бирге кароо керек.

(21)-(22) маселелер Коши-Беллман маселеси деп аталат. Ал эки этапта чыгарылат. Биринчи этапта min маселесин чыгарабыз. Мүмкүн болгон чечимдердин көптүгү ачык көптүк болгондуктан, функцияны минималдаштыруу маселеси

$$\Pi(\cdot,u)=\beta P[t,u(t)]-m(t,0)f[t,u(t)]\to\min$$

классикалык усулдар менен чыгарылат. Биринчи тартиптеги оптималдуулук шарты

$$\Pi_u(\cdot,u)=\beta P_u(t,u(t))-m(t,0)f_u(t,u(t))=0 \qquad (23)$$

көрүнүшүндө, ал эми экинчи тартиптеги оптималдуулук шарты

$$\Pi_{uu}(\cdot,u)=\beta P_{uu}(t,u(t))-m(t,0)f_{uu}(t,u(t))>0$$

көрүнүшүндөгү дифференциалдык барабарсыздык түрүндө болот.

Оптималдуулуктун экинчи шартын

$$\Pi_{uu}(\cdot,u)=\beta f_u(t,u(t))\left(\frac{P_u(t,u(t))}{f_u(t,u(t))}\right)_u>0 \qquad (24)$$

көрүнүшүндө жазсак болот.

Эгерде (23)-шартты

$$\beta\frac{P_u(t,u(t))}{f_u(t,u(t))}=m(t,0), \qquad (25)$$

түрүнө өзгөртсөк, анда (24)-шарттын негизинде бул барабардык $u(t)$ га салыштырмалуу бир маанилүү чечилет, б.а. бир маанилүү $\varphi(\cdot)$ функциясы табылып,

$$u^0(t)=\varphi[t,\beta,m(t,0)]=\varphi\left(t,\beta,gradS[t,V(t,x)]\right) \qquad (26)$$

орун алат.

(26)-формуланын негизинде $u(t)$ чектик башкаруунун синтези ишке ашат.

Экинчи этапта $u^0(t)$ ны (21)-теңдемеге коебуз жана min белгиси жок теңдемени алабыз, б.а.

$$-\frac{\partial S[t,V]}{\partial t}=\beta p[t,u^0(t)]-m(t,0)f[t,u^0(t)]+\int_0^1[-m_x(t,x)V_x(t,x)+$$
$$+(\gamma\int_0^T K(t,\tau)V(\tau,x)d\tau)m(t,x)]dx \qquad (27)$$

мында $u^0(t)$ (26)-көрүнүшүндө болот.

Мындан ары бул теңдемени (22)-шарт менен бирге чыгаруу керек. Теңдемедеги Фредгольм интегралдык операторунун бар болушу анын чечимин тургузуу процедурасына таасир этет. Бирок, эгерде чечимдин түзүлүшүн

$$S[t,V(t,x)]=S_0[t,V(t,x)]+\gamma S_1[t,V(t,x)] \qquad (28)$$

көрүнүшүндө аныктасак, анда маселе бир аз жөнөкөйлөнөт, мында $S_0[t,V(t,x)]$ жана $S_1[t,V(t,x)]$ аныкталышы керек болгон функциялар. (28)-ни (27)-ге коебуз.

Анда

$$-\frac{\partial S_0[t,V]}{\partial t}-\gamma\frac{\partial S_1[t,V]}{\partial t}=\beta p[t,u^0(t)]-m(t,0)f[t,u^0(t)]+$$
$$+\int_0^1[-m_x(t,x)V_x(t,x)+(\gamma\int_0^T K(t,\tau)V(\tau,x)d\tau)m(t,x)]dx$$

теңдемеси $\{1,\gamma\}$ системасынын элементтеринин сызыктуу көз каранды эместигинин негизинде төмөнкү көрүнүштөгү эки теңдемеге ажырайт:

$$-\frac{\partial S_0[t,V(t,x)]}{\partial t}=\beta p[t,u^0(t)]-m(t,0)f[t,u^0(t)]+\int_0^1[-m_x(t,x)V_x(t,x)]dx, \qquad (29)$$

жана

$$-\frac{\partial S_1[t,V(t,x)]}{\partial t}=\int_0^1\left(\int_0^T K(t,\tau)V(\tau,x)d\tau\right)m(t,x)dx, \qquad (30)$$

Бул теңдемелерди (22) жана (28) негизинде

$$S_0[T,V(t,x)]=\int_0^1[V(T,x)-\xi(T,x)]^2dx, \qquad (31)$$

жана

$$S_1[T,V(t,x)]=0 \qquad (32)$$

шарттары менен бирге кароо керек.

Ошентип, (28) дин түзүлүшүнө ылайык, интегро-дифференциалдык теңдеменин чечимин тургузуу маселеси эки маселеге ажырайт жана алардын бири экинчисинен көз карандысыз чечилет. Бул шарт болсо башкарылуучу процесс жекече туундулуу интегро-дифференциалдык теңдеме менен сүрөттөлгөн учурда чек аралык оптималдуу башкаруунун синтез маселесинин чечимин тургузуу процедурасын бир кыйла жөнөкөйлөтөт.

Литература

1. Egorov A.I. Optimal stabilization of systems with distributed parameters // Optimization Techniques IFIP Technical Conference (1974) / ed. G.I. Marchuk. Novosibirsk, 1974. Berlin; Heidelberg: Springer, 1975. P. 167–172 . (Lecture Notes in Computer Science; vol 27). doi: 10.1007/3-540-07165-2_22 .
2. Керимбеков А. О разрешимости задачи синтеза распределенного и граничного управлений при оптимизации колебательных процессов //Труды института математики и механики. Уральское Отделение Российской Академии Наук 2021 С-128-140
3. Керимбеков А. Синтез распределенного оптимального управления в задаче слежения при оптимизации тепловых процессов, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями //Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. Том 183 (2020). DOL:10/36535/0233-6723-2020-283-85-97. С. 85-97
4. Kerimbekov A., Abdyldaeva E. On the solvability of a nonlinear optimization problem for thermal processes described by Fredholm integro-differential equations with external and boundary controls // Applied Mathematics & Information Sciences, An International Journal - 2016, Vol. 10, No. I, P. 215-223.