УДК 514.75
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_2(5)_17

ЕВКЛИДДИК МЕЙКИНДИКТИ БӨЛҮКТӨП ЧАГЫЛТУУДА ТӨРТ ЧЕНЕМДҮҮ БӨЛҮШТҮРҮҮЛӨРДҮН ТҮГӨЙҮНҮН КВАЗИКОШМОК СЫЗЫКТАРЫНЫН ЖАШАШЫ

Матиева Гулбадан, ф.-м.и.д., профессор
gulbadan_57@mail.ru
Папиева Толкун Маматаевна, ф.-м.и.к., доцент
tpapka73@mail.ru
Шамшиева Гулмира Асилидиновна, улук окутуучу
gshamsbieva@mail.ru
Ош мамлекеттик университети
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *$\Omega \subset E_5$ аймагында ушундай жылма сызыктардын көптүгү берилген: ар бир $X \in \Omega$ чекити аркылуу берилген көптүктүн бир гана ω^1 сызыгы өтөт. Ушул сызык үчүн Френенин репери [1] боло тургандай кыймылдуу репер тандалып алынган. Бул репердин координаталык векторлорунун интегралдык сызыктары Френенин торчосун [2] түзүшөт. Ушул торчонун ω^1 сызыгынын жанымасында F_1^5 чекити инварианттык түрдө аныкталат. X чекити Ω аймагында кыймылга келгенде F_1^5 чекити өзүнүн $\Omega_1^5 \subset E_5$ аймагын "сызып" чыгат. Натыйжада $f_1^5(X) = F_1^5$ боло тургандай $f_1^5: \Omega \to \Omega_1^5$ бөлүктөп чагылтуусу аныкталат.*

$\Delta_4 = (X,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3, \vec{e}_4,\ \vec{e}_5)$, $\Delta'_4 = f_1^5(\Delta_4)$ бөлүштүрүүлөрү каралат.

$\gamma \subset \Delta_4$ жана $f_1^5(\gamma) = \bar{\gamma}$ сызыктары (Δ_4, Δ'_4) түгөйүнүн квазикошмок сызыктары болушу үчүн γ сызыгынын жаныма векторунун координаталары төмөндөгү шарттарды канаатандырышы зарыл жана жетиштүү шарттары табылган.

Ачкыч сөздөр: *бөлүктөп чагылтуу, Френенин репери, евклиддик мейкиндик, бөлүштүрүү, Френенин циклдик торчосу, квазикошмок сызык.*

СУЩЕСТВОВАНИЕ КВАЗИДВОЙНЫХ ЛИНИЙ ПАРЫ ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ В ЧАСТИЧНОМ ОТОБРАЖЕНИИ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

Матиева Гулбадан, д.ф.-м.н., профессор
gulbadan_57@mail.ru
Папиева Толкун Маматаевна, к.ф.-м.н., доцент
tpapka73@mail.ru
Шамшиева Гулмира Асилидиновна, старший преподаватель
gshamsbieva@mail.ru
Ошский государственный университет
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *В области $\Omega \subset E_5$ рассмотрено семейство гладких линий: через каждую точку $X \in \Omega$ проходит одна линия ω^1 заданного семейства. Подвижной репер пространства E_5 выбран так, что он является репером Френе [1] для линии ω^1. Интегральные линии координатных векторов этого репера образуют сеть Френе [2]. На касательной к линии ω^1 этой сети инвариантным образом определяется точка F_1^5. Когда точка X смещается в области Ω, точка F_1^5 описывает свою область $\Omega_1^5 \subset E_5$. В результате получается частичное отображение $f_1^5: \Omega \to \Omega_1^5$ такое, что $f_1^5(X) = F_1^5$.*

Рассмотрены четырехмерные распределения $\Delta_4 = (X,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3, \vec{e}_4,\ \vec{e}_5)$ и $\Delta'_4 = f_1^5(\Delta_4)$. Найдены необходимое и достаточное условия для того, чтобы линии $\gamma \subset \Delta_4$ и $f_1^5(\gamma) = \bar{\gamma}$ являлись квазидвойными линиями пары распределений (Δ_4, Δ'_4) в частичном отображении f_1^5.

Ключевые слова: *частичное отображение, репер Френе, евклидово пространство, распределение, циклическая сеть Френе, квазидвойная линия.*

EXISTENCE OF QUASI-DOUBLE LINES OF THE PAIR OF FOUR DIMENSIONAL DISTRIBUTIONS IN PARTIAL MAPPING OF EUCLIDEAN SPACE

Matieva Gulbadan, Doctor of Ph. and Math. Sc., Professor
gulbadan_57@mail.ru
Papieva Tolkun Mamataevna, Candidate of Ph. & Math. Sc., docent
tpapka73@mail.ru
Shamshieva Gulmira Asilidinovna, Senior Lecturer
gshamsbieva@mail.ru
Osh State University
Osh, Kyrgyzstan

Abstract. *A family of smooth lines given in the domain $\Omega \subset E_5$ so that through each point $X \in \Omega$ passes one line ω^1 of given family. A movable frame is chosen so that it was Frenet's frame for the line ω^1 of the given family. The integral lines of the coordinate vectors fields of this frame form a Frenet's net. On a tangent to the line ω^1 a point F_1^5 is defined in an invariant way. When the point X moves in the domain Ω, the point F_1^5 describes it's domain $\Omega_1^5 \subset E_5$. In this way we get a partial mapping $f_1^5 : \Omega \to \Omega_1^5$ such, that $f_1^5(X) = F_1^5$.*

It is considered the four dimensional distributions $\Delta_4 = (X,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3, \vec{e}_4,\ \vec{e}_5)$ and $\Delta'_4 = f_1^5(\Delta_4)$. It is found the necessary and sufficient conditions for lines $\gamma \subset \Delta_4$ and $f_1^5(\gamma) = \bar{\gamma}$ to be quasi-double lines of the pair of distributions (Δ_4, Δ'_4) in the partial mapping f_1^5.

Key words: *partial mapping, Frenet's frame, Euclidean space, distribution, cyclic net of Frenet, quasi-double line.*

Киришүү. $\Omega \subset E_5$ мейкиндигинин Ω аймагында ушундай жылма сызыктардын көптүгү берилген $X \in \Omega$ ар бир чекити аркылуу берилген көптүктүн бирден гана сызыгы өтөт. Ортонормаланган, $\mathcal{R} = (X, \vec{e}_i)$ $(i, j, k = \overline{1,5})$ реперин Ω аймагында бул репер берилген көптүктүн ω^1 сызыгы үчүн Френенин репери [1], [2] боло тургандай тандап алабыз. $\mathcal{R}$ реперинин деривациондук формулалары төмөнкүдөй көрүнүштө болушат:

$$d\vec{X} = \omega^i \vec{e}_i, d\vec{e}_i = \omega_i^k \vec{e}_k. \qquad (1)$$

Мындагы ω^i, ω_i^k дифференциалдык формалары евклиддик мейкиндиктин структуралык теңдемелерин канаатандырышат:

$$D\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i, D\omega_i^k = \omega_i^j \wedge \omega_j^k, \omega_i^j + \omega_j^i = 0. \qquad (2)$$

$\vec{e}_i$ вектордук талааларынын интегралдык сызыктары берилген көптүктүн ω^1 сызыгы үчүн Френенин торчосун [1] Σ_5 түзүшөт. $\mathcal{R}$ репери Σ_5, торчосунун сызыктарынын жанымаларына тургузулгандыктан, ω_i^k формалары башкы формалар болушат, б.а.

$$\omega_i^k = \Lambda_{ij}^k \omega^j. \qquad (3)$$

(2) формулалардын акыркы барбардыгын эске алсак, анда төмөндөгү келип чыгат:

$$\Lambda_{ij}^k = -\Lambda_{kj}^i. \qquad (4)$$

(3) барабардыкты сырттан дифференцирлеп төмөндөгүнү алабыз:

$$D\omega_i^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k D\omega^j.$$

Мындан, (2) формуланы колдонсок, төмөндөгү келип чыгат:

$$.\omega_i^j \wedge \omega_j^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k \wedge \omega^\ell \wedge \omega_\ell^j.$$

(3) формуланын негизинде акыркы барабардык төмөндөгүдөй көрүнүшкө келет:

$$\omega_i^j \wedge \Lambda_{j\ell}^k \omega^\ell = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \omega_\ell^j \wedge \omega^\ell,$$

же

$$\Lambda_{j\ell}^k \omega_i^j \wedge \omega^\ell = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{i\ell}^k \wedge \omega_j^\ell \wedge \omega^j.$$

(барабардыктын оң жагындагы экинчи мүчөдө жана индекстеринин ордун алмаштырдык). Мындан төмөндөгүнү алабыз:

$$d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell \wedge \omega^j - \Lambda_{j\ell}^k \omega_i^j \wedge \omega^\ell = 0\ ,$$

же

$$\left(d\Lambda_{ij}^k - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell - \Lambda_{\ell j}^k \omega_i^\ell\right) \wedge \omega^j = 0.$$

Акыркы барабардыкка Картандын леммасын [3] колдонуп төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$d\Lambda_{ij}^k - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell - \Lambda_{\ell j}^k \omega_i^\ell = \Lambda_{ijm}^k \omega^m,$$

же

$$d\Lambda_{ij}^k = \left(\Lambda_{ijm}^k + \Lambda_{il}^k \Lambda_{jm}^l + \Lambda_{lj}^k \Lambda_{im}^l\right)\omega^m. \qquad (5)$$

Чоңдуктардын $\{\Lambda_{ij}^k, \Lambda_{ijm}^k\}$ системасы экинчи тартиптеги геометриялык объектти түзүшөт.

Берилген көптүктүн ω^1 сызыгы үчүн Френенин формулалары төмөндөгүдөй көрүнүштө болушат:

$$d_1\vec{e}_1 = \Lambda_{11}^2 \vec{e}_2,$$

$$d_1\vec{e}_2 = \Lambda_{21}^1 \vec{e}_1 + \Lambda_{21}^3 \vec{e}_3,$$

$$d_1\vec{e}_3 = \Lambda_{31}^2 \vec{e}_2 + \Lambda_{31}^4 \vec{e}_4,$$

$$d_1\vec{e}_4 = \Lambda_{41}^3 \vec{e}_3 + \Lambda_{41}^5 \vec{e}_5,$$

$$d_1\vec{e}_5 = \Lambda_{51}^4 \vec{e}_4$$

жана

$$\Lambda_{11}^3 = -\Lambda_{11}^3 = 0, \Lambda_{11}^4 = -\Lambda_{41}^1 = 0, \Lambda_{11}^5 = -\Lambda_{51}^1 = 0 \qquad (6)$$

$$\Lambda_{21}^5 = -\Lambda_{51}^2 = 0, \Lambda_{21}^4 = -\Lambda_{41}^2 = 0, \Lambda_{31}^5 = -\Lambda_{51}^3 = 0. \qquad (7)$$

Мындагы $k_1^1 = \Lambda_{11}^2$, $k_2^1 = \Lambda_{21}^3$, $k_3^1 = \Lambda_{31}^4$, $k_4^1 = \Lambda_{41}^5 = -\Lambda_{51}^4$ – ω^1 сызыгынын биринчи, экинчи, үчүнчү, төртүнчү жана бешинчи ийриликтери (тиешелеш түрдө), d_1 – ω^1 сызыгы боюнча дифференцирлөөнүн символу.

Σ_5 торчосунун ω^i сызыгынын жанымасындагы F_i^j $(i \neq j)$ псевдофокусу төмөндөгүдөй радиус-вектор менен аныкталат:

$$\overrightarrow{F_i^j} = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{ij}^j}\vec{e}_i = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{jj}^i}\vec{e}_i. \qquad (8)$$

Ар бир $(X, \vec{e}_i)$ жанымасында бештен псевдофокус жашайт:
$(X, \vec{e}_1)$ жанымасында – $F_1^2,\ F_1^3,\ F_1^4,\ F_1^5,\ F_1^6$;

$(X, \vec{e}_2)$ жанымасында – $F_2^1, F_2^3, F_2^4, F_2^5, F_2^6$;

$(X, \vec{e}_3)$ жанымасында – $F_3^1, F_3^2, F_3^4, F_3^5, F_3^6$;

$(X, \vec{e}_4)$ жанымасында – $F_4^1, F_4^2, F_4^3, F_4^5, F_4^6$;

$(X, \vec{e}_5)$ жанымасында – $F_5^1, F_5^2, F_5^3, F_5^4, F_5^6$;

Σ_5 торчосу Френенин циклдик торчосу [4] болсун деп алабыз.

Изилдөөнүн материалдары.

$\overrightarrow{F_1^5} \in (X, \vec{e}_1)$ псевдофокусу төмөндөгүдөй радиус-вектор менен аныкталат:

$$\overrightarrow{F_1^5} = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_1 = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{55}^1}\vec{e}_1. \qquad (9)$$

X чекити $\Omega \subset E_5$ аймагында кыймылга келгенде, F_1^5 чекити өзүнүн $\Omega_1^5 \subset E_5$ аймагын “сызып” чыгат Натыйжада $f_1^5(X) = F_1^5$ боло тургандай $f_1^5 \colon \Omega \to \Omega_1^5$ бөлүктөп чагылтуусуна ээ болобуз.

(9) барабардыктарды дифференцирлеп, деривациялык формулаларды колдонуп, төмөндөгүнү алабыз.

$$\overrightarrow{dF_1^5} = d\left(\vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_1\right) = d\,\vec{X} + d\left(\frac{1}{\Lambda_{15}^5}\right)\vec{e}_1 - \frac{1}{\Lambda_{15}^5}d\vec{e}_1 == \omega^i\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{15}^5}{(\Lambda_{15}^5)^2}\vec{e}_1 + \frac{1}{\Lambda_{15}^5}\omega^i\vec{e}_i,$$

(3), (5) формулаларды эске алсак, анда

$$\overrightarrow{dF_1^5} = \omega^i\vec{e}_i + \frac{B_{15m}^5\omega^m}{(\Lambda_{15}^5)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{1m}^i\omega^m}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_i$$

келип чыгат. Мында

$$B_{15m}^5 = \Lambda_{15m}^5 + \Lambda_{1\ell}^5\Lambda_{5m}^\ell + \Lambda_{\ell 5}^5\Lambda_{1m}^\ell$$

Акыркы барабардыкты төмөндөгүдөй жазууга болот:

$$\overrightarrow{dF_1^5} = \omega^i\vec{e}_i + \frac{B_{15m}^5}{(\Lambda_{15}^5)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{1m}^i\omega^m}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_i$$

$$\text{же } d_1\,\overrightarrow{F_1^5}\left[\vec{e}_1 + \frac{B_{151}^5}{(\Lambda_{15}^5)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{11}^i}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_i\right]\omega^1 + \left[\vec{e}_2 + \frac{B_{152}^5}{(\Lambda_{15}^5)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{12}^i}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_i\right]\omega^2$$
$$+ \left[\vec{e}_3 + \frac{B_{153}^5}{(\Lambda_{15}^5)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{13}^i}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_i\right]\omega^3 + \left[\vec{e}_4 + \frac{B_{154}^5}{(\Lambda_{15}^5)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{14}^i}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_i\right]\omega^4$$
$$+ \left[\vec{e}_5 + \frac{B_{155}^5}{(\Lambda_{15}^5)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{15}^i}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_i\right]\omega^5$$

Төмөндөгүдөй белгилөөлөрдү киргизебиз:

$$\overrightarrow{b_1} = \vec{e}_1 + \frac{B_{151}^5}{(\Lambda_{15}^5)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{11}^i}{\Lambda_{15}^5}\vec{e}_i$$

$$\overrightarrow{b_2} = \vec{e}_2 + \frac{B^5_{152}}{(\Lambda^5_{15})^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^i_{12}}{\Lambda^5_{15}}\vec{e}_i$$

$$\overrightarrow{b_3} = \vec{e}_3 + \frac{B^5_{153}}{(\Lambda^5_{15})^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^i_{13}}{\Lambda^5_{15}}\vec{e}_i$$

$$\overrightarrow{b_4} = \vec{e}_4 + \frac{B^5_{154}}{(\Lambda^5_{15})^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^i_{14}}{\Lambda^5_{15}}\vec{e}_i$$

$$\overrightarrow{b_5} = \vec{e}_5 + \frac{B^5_{155}}{(\Lambda^5_{15})^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^i_{15}}{\Lambda^5_{15}}\vec{e}_i$$

Анда

$d\,\overrightarrow{F^5_1} = \omega^1\,\overrightarrow{b_1} + \omega^2\,\overrightarrow{b_2} + \omega^3\,\overrightarrow{b_3} + \omega^4\,\overrightarrow{b_4} + \omega^5\,\overrightarrow{b_5}$ барабардыгына ээ болобуз. Берилген Френенин торчосу $\widetilde{\Sigma_5}$ циклдик торчо болгон учурда $\overrightarrow{b_i}$ векторлору төмөндөгүдөй көрүнүштө болушат:

$$\overrightarrow{b_1} = \left[1 + \frac{B^5_{151}}{(\Lambda^5_{15})^2}\right]\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^i_{11}}{\Lambda^5_{15}}\vec{e}_2;$$

$$\overrightarrow{b_2} = \frac{B^5_{152}}{(\Lambda^5_{15})^2}\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \frac{\Lambda^i_{12}}{\Lambda^5_{15}}\vec{e}_5;$$

$$\overrightarrow{b_3} = \frac{B^5_{153}}{(\Lambda^5_{15})^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^i_{13}}{\Lambda^5_{15}}\vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \frac{\Lambda^i_{13}}{\Lambda^5_{15}}\vec{e}_5;$$

$$\overrightarrow{b_4} = \frac{B^5_{154}}{(\Lambda^5_{15})^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^i_{14}}{\Lambda^5_{15}}\vec{e}_2 + \vec{e}_4 - \frac{\Lambda^i_{14}}{\Lambda^5_{15}}\vec{e}_5;$$

$$\overrightarrow{b_5} = \frac{B^5_{155}}{(\Lambda^5_{15})^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda^i_{15}}{\Lambda^5_{15}}\vec{e}_2.$$

Жалпы учурда бул векторлор сызыктуу көз каранды болушпайт. Ω^5_1 аймагында $\mathcal{R}' = \left(F^5_1, \vec{b}_{i,}\right)$ реперин карайбыз.

$\Delta_4 = (X, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5)$, $\Delta'_4 = F^5_1(\Delta_4)$ бөлүштүрүүлөрүн карайбыз.

Аныктама. Эгерде $\gamma \subset \Delta_4$ сызыгынын X чекитиндеги жанымасы жана $\bar{\gamma} = f^5_1(\gamma)$ сызыгынын F^5_1 чекитиндеги жанымасы бир эле төрт ченемдүү мейкиндикте ($\vec{e}_2$,$\vec{e}_3$, $\vec{e}_4$ $\vec{e}_5$, векторлоруна керилген) жатышса, анда γ жана $\bar{\gamma}$ сызыктары f^5_1 бөлүктөп чагылтуусунда (Δ_4, Δ'_4) түгөй бөлүштүрүүлөрүнүн квазикошмок сызыктары деп аталышат. [4]

$\gamma \subset \Delta_4$ сызыгынын жаныма вектору $\bar{\gamma} = \gamma^2\vec{e}_2 + \gamma^3\vec{e}_3 + \gamma^4\vec{e}_4 + \gamma^5\vec{e}_5$ көрүнүшүндө болот. $\bar{\gamma}$ сызыгынын F^5_1 чекитиндеги жаныма вектору төмөндөгүдөй аныкталат:

$$\vec{\bar{\gamma}} = \gamma^2\vec{b}_2 + \gamma^3\vec{b}_3 + \gamma^4\vec{b}_4 + \gamma^5\vec{b}_5.$$

Мындан (10) формулаларды эске алуу менен төмөндөгүнү алабыз:

$$\vec{\bar{\gamma}} = (\gamma^2 b^1_2 + \gamma^3 b^1_3 + \gamma^4 b^1_4 + \gamma^5 b^1_5)\vec{e}_1 + (\gamma^2 + \gamma^3 b^2_3 + \gamma^4 b^2_4 + \gamma^5 b^2_5)\vec{e}_2 +$$

$$+\gamma^3\vec{e}_3 + \gamma^4\vec{e}_4 + (\gamma^2 b^5_2 + \gamma^3 b^5_3 + \gamma^4 b^5_4)\vec{e}_5, \qquad (11)$$

мында b_i^j $-\vec{b}_i$ векторунун j-чы координаталары.

$\vec{\gamma},\ \vec{\bar{\gamma}}\epsilon(X,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4,\vec{e}_5)$ шарттарынан

$$\gamma^2 b_2^1 + \gamma^3 b_3^1 + \gamma^4 b_4^1 + \gamma^5 b_5^1 = 0$$

келип чыгат. Мындан (10) формуланы колдонуу менен төмөндөгүнү алабыз:

$$\gamma^2 B_{152}^5 + \gamma^3 B_{153}^5 + \gamma^4 B_{154}^5 + \gamma^5 B_{155}^5 = 0. \qquad (12)$$

Тескерисинче, (12) шарт орун алса, анда $\gamma, \bar{\gamma}$ сызыктары (Δ_4, Δ'_4) түгөй бөлүштүрүүлөрдүн f_1^5 бөлүктөп чагылтуусундагы квазикошмок сызытары болушат.

Төмөндөгүдөй теорема далилденди.

Теорема. $\gamma \subset \Delta_5$ жана $\bar{\gamma} = f_1^5(\gamma)$ сызыктары f_1^6 бөлүктөп чагылтуусунда (Δ_4, Δ'_4) түгөй бөлүштүрүүлөрүнүн квазикошмок сызыктары болушу үчүн (12) шартынын орун алышы зарыл жана жетиштүү.

Адабияттар

1. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ // Москва: Наука, 1967. – С. 481-482.
2. Матиева Г., Абуллаева Ч.Х., Нышанбаева Н.Т. Е5 евклиддик мейкиндигинде бөлүктөп чагылтуусунун квазикошмок сызыктарынын жашашынын зарыл жана жетиштүү шарттары [текст] // Илим. Билим. Техника. – Ош, 2022. – № 3 (75). – С. 32-39.
3. Фиников, С. П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии [Текст] / С. П. Фиников. – М.-Л.: Госттехиздат, 1948. – 432 с.
4. Матиева Г., Папиева Т.М., Курбанбаева Н.Н. Геометрия частичных отображений евклидова пространства, порождаемых заданной сетью Френе / Монография. – Ош: «Билим»ОшГУ, 2022. – 130 с.