ВЕСТНИК ОШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
МАТЕМАТИКА. ФИЗИКА. ТЕХНИКА. 2024, № 2(5)

УДК 517.956.6
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_2(5)_16

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В ПЯТИУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ С ТРЕМЯ ЛИНИЯМИ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА

Мамажонов Мирза
mirzamamajonov@gmail.com
КГПИ, «Математика»
Шерматова Хилолахон Мирзаевна
shilola-1978@mail.ru
Ферганский государственный университет
Фергана, Узбекистан

Аннотация. *В данной работе ставится и исследуется одна краевая задача для параболо-гиперболического уравнения четвертого порядка в смешанной области с тремя линиями изменения типа. Доказана теорема существования и единственности решения этой поставленной задачи. В ходе доказательства этой теоремы применены методы построения решения, дифференциальных и интегральных уравнений, а также метод продолжения.*

Ключевые слова: *Дифференциальные и интегральные уравнения, метод построения решения, метод продолжения, краевая задача, параболо-гиперболический тип, однозначная разрешимость.*

ON A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A FOURTH ORDER EQUATION OF PARABOLIC-HYPERBOLIC TYPE IN A PENTAGONAL DOMAIN WITH THREE LINES OF CHANGE IN TYPE

Mamajonov Mirza
mirzamamajonov@gmail.com
KSPI, "Mathematics"
Shermatova Hilolaxon Mirzayevna
shilola-1978@mail.ru
Fergana State University
Fergana, Uzbekistan

Abstract. *In this paper, we pose and study a boundary value problem for a fourth-order parabolic-hyperbolic equation in a mixed domain with three lines of type change. We prove a theorem of existence and uniqueness of a solution to this problem. In proving this theorem, we apply methods of constructing a solution, differential and integral equations, and a continuation method.*

Keywords: *Differential and integral equations, solution construction method, continuation method, boundary value problem, parabolic-hyperbolic type, unique solvability.*

Начиная с семидесятых годов XX века началось интенсивно развиваться изучение краевых задач для уравнений третьего, четвертого и высокого порядков параболо-гиперболического типа. Краевые задачи для таких уравнений изучены в основном в работах [1], [2] и др.

После этого началось исследование краевых задач для таких уравнений в различных областях с двумя и тремя линиями изменения типа {см. [3]-[18]}.

В настоящей статье ставится и исследуется одна краевая задача для параболо-гиперболического уравнения четвёртого порядка вида

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)(Lu)=0\,, \qquad (1)$$

в пятиугольной области G плоскости xOy, где $G=G_1\cup G_2\cup G_3\cup G_4\cup\ J_1\cup J_2\cup J_3$, G_1- прямоугольник с вершинами в точках $A(0;0)$, $B(1;0)$, $B_0(1,1)$, $A_0(0,1)$; G_2- треугольник с вершинами в точках $D(-1,0)$, $E(1/2,-3/2)$, $C(2,0)$; G_3 и G_4- прямоугольники с вершинами в точках A, D, $D_0(-1,1)$, A_0 и B, B_0, $C_0(2,1)$, $C(2,0)$ соответственно; J_1, J_2 и J_3- открытые отрезки с вершинами в точках C, D; A, A_0 и B, B_0 соответственно; $u=u(x,y)-$ неизвестная функция, а $Lu=\begin{cases}u_{xx}-u_y,\ (x,y)\in G_1,\\ u_{xx}-u_{yy},\ (x,y)\in G_j,\ j=2,3,4.\end{cases}$

Для уравнения (1) ставится следующая задача:

<u>Задача-1.</u> Найти функцию $u(x,y)$, которая 1) непрерывна в $\overline{G}$ и в области $G\setminus J_1\setminus J_2\setminus J_3$ имеет непрерывные производные, участвующие в уравнение (1), причем u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} – непрерывны в G вплоть до части границы области G, указанные в краевых условиях; 2) удовлетворяет уравнению (1) в области $G\setminus J_1\setminus J_2\setminus J_3$; 3) удовлетворяет следующим краевым условиям:

$$u(2,y)=\varphi_1(y),\quad 0\le y\le 1; \qquad (2)$$

$$u(-1,y)=\varphi_2(y),\quad 0\le y\le 1; \qquad (3)$$

$$u_x(2,y)=\varphi_3(y),\ \ 0\le y\le 1; \qquad (4)$$

$$u_{xx}(2,y)=\varphi_5(y),\ \ 0\le y\le 1; \qquad (5)$$

$$u\big|_{CE}=\psi_1(x),\ 1/2\le x\le 2\,; \qquad (6)$$

$$u\big|_{DP}=\psi_2(x),\ -1\le x\le -1/2\,; \qquad (7)$$

$$u\big|_{QE}=\psi_3(x),\ 0\le x\le 1/2\,; \qquad (8)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{CE}=\psi_6(x),\ 1/2\le x\le 2\,; \qquad (9)$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\right|_{CE}=\psi_7(x),\ 1/2< x< 2\,; \qquad (10)$$

4) удовлетворяет следующим условия склеивания на линиях изменения типа:

$$u(x,+0)=u(x,-0)=T(x),\ -1\le x\le 1\,; \qquad (11)$$

$$u_y(x,+0)=u_y(x,-0)=N(x),\ -1\le x\le 1\,; \qquad (12)$$

$$u_{yy}(x,+0)=u_{yy}(x,-0)=M(x),\ -1< x< 2\,; \qquad (13)$$

$$u(+0,y)=u(-0,y)=\tau_4(y),\ 0\le y\le 1\,; \qquad (14)$$

$$u_x(+0,y)=u_x(-0,y)=\nu_4(y),\ 0\le y\le 1\,; \qquad (15)$$

$$u_{xx}(+0,y)=u_{xx}(-0,y)=\mu_4(y),\ 0< y< 1\,; \qquad (16)$$

$$u_{xxx}(+0,y)=u_{xxx}(-0,y)=\theta_4(y),\ 0<y<1; \tag{17}$$
$$u(1+0,y)=u(1-0,y)=\tau_5(y),\ 0\le y\le 1; \tag{18}$$
$$u_x(1+0,y)=u_x(1-0,y)=\nu_5(y),\ 0\le y\le 1; \tag{19}$$
$$u_{xx}(1+0,y)=u_{xx}(1-0,y)=\mu_5(y),\ 0<y<1; \tag{20}$$
$$u_{xxx}(1+0,y)=u_{xxx}(1-0,y)=\theta_5(y),\ 0<y<1, \tag{21}$$

где $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_5$, $\psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_6,\psi_7$ – заданные достаточно гладкие функции, $n-$ внутренняя нормаль к прямой $x-y=2$, а $P(-1/2,-1/2)$, $Q(0,-1)$, $T(x)=\begin{cases}\tau_1(x), & если\ \ 0\le x\le 1,\\ \tau_2(x), & если\ \ -1\le x\le 0,\\ \tau_3(x), & если\ \ 1\le x\le 2;\end{cases}$

$N(x)=\begin{cases}\nu_1(x), & если\ \ 0\le x\le 1,\\ \nu_2(x), & если\ \ -1\le x\le 0,\\ \nu_3(x), & если\ \ 1\le x\le 2;\end{cases}$ $M(x)=\begin{cases}\mu_1(x), & если\ \ 0<x<1,\\ \mu_2(x), & если\ \ -1<x<0,\\ \mu_3(x), & если\ \ 1<x<2;\end{cases}$ $\tau_i,\ \nu_i,\ \mu_i\ (i=\overline{1,5})$,

θ_4,θ_5 – неизвестные пока достаточно гладкие функции.

Теорема. Если $\varphi_1,\varphi_2\in C^4[0,1]$, $\varphi_3\in C^3[0,1]$, $\varphi_5\in C^2[0,1]$, $\psi_1\in C^4[1/2,2]$, $\psi_2\in C^4[-1,-1/2]$, $\psi_3\in C^4[0,1/2]$, $\psi_6\in C^3[1/2,2]$, $\psi_7\in C^2[1/2,2]$, причем выполняется условие согласования $\tau_2(-1)=\psi_2(-1)=\varphi_2(0)$, $\tau_3(2)=\varphi_1(0)=\psi_1(2)$, $\psi_1(1/2)=\psi_3(1/2)$, $\tau_1(1)=\tau_3(1)$, $\tau_1(0)=\tau_2(0)$, $\tau_1'(1)=\tau_3'(1)$, $\tau_1'(0)=\tau_2'(0)$, то задача-1 допускает единственное решение.

Доказательство. Теорему докажем методом построения решения. Для этого уравнение (1) перепишем в виде

$$u_{1xx}-u_{1y}=\omega_{11}(y)+\omega_{12}(x+y),\ (x,y)\in G_1, \tag{22}$$
$$u_{ixx}-u_{iyy}=\omega_{i1}(y)+\omega_{i2}(x+y),\ (x,y)\in G_i\quad (i=2,3,4), \tag{23}$$

где введено обозначение $u(x,y)=u_i(x,y),\ (x,y)\in G_i\ \left(i=\overline{1,4}\right)$, причем функции $\omega_{i1}(y),\ \omega_{i2}(x+y)\ \left(i=\overline{1,4}\right)$ неизвестные пока достаточно гладкие функции, подлежащие определению.

Исследование будем провести сначала в области G_2. Решение уравнения (23) $(i=2)$, удовлетворяющее условиям (11), (12) представляется в виде

$$u_2(x,y)=\frac{1}{2}\left[T(x+y)+T(x-y)\right]+\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}N(t)\,dt-$$
$$-\int_0^y(y-\eta)\omega_{21}(\eta)\,d\eta-\frac{1}{2}\int_0^y d\eta\int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta}\omega_{22}(\xi+\eta)\,d\xi. \tag{24}$$

Подставляя (24) в условия (9) и (10) после упрощений, имеем

$$\omega_{21}(x-2)+\omega_{22}(2x-2)=-\sqrt{2}\psi_6'(x),\ 1/2\le x\le 2, \tag{25}$$
$$-\omega_{21}(x-2)+\omega_{22}(2x-2)=2\psi_7(x)-2T''(2)+2N'(2)+\omega_{22}(2),\ 1/2\le x\le 2. \tag{26}$$

Из (25) и (26) находим

$$\omega_{22}(2x-2)=\psi_7(x)-\frac{\sqrt{2}}{2}\psi_6'(x)-T''(2)+N'(2)+\frac{1}{2}\omega_{22}(2),\ 1/2\le x\le 2,$$

$$\omega_{21}(x-2)=-\psi_7(x)-\frac{\sqrt{2}}{2}\psi_6'(x)+T''(2)-N'(2)-\frac{1}{2}\omega_{22}(2),\ 1/2\le x\le 2.$$

В первом равенстве меняя аргумент $2x-2$ на $x+y$, а во втором – аргумент $x-2$ на y, получим

$$\omega_{22}(x+y)=\psi_7\left(\frac{x+y+2}{2}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\psi_6'\left(\frac{x+y+2}{2}\right)-T''(2)+N'(2)+\frac{1}{2}\omega_{22}(2),-1\le x+y\le 2,\quad(27)$$

$$\omega_{21}(y)=-\psi_7(y+2)-\frac{\sqrt{2}}{2}\psi_6'(y+2)+T''(2)-N'(2)-\frac{1}{2}\omega_{22}(2),\ -3/2\le y\le 0.\qquad(28)$$

Слагая (27) и (28), имеем

$$\omega_{21}(y)+\omega_{22}(x+y)=\psi_7\left(\frac{x+y+2}{2}\right)-\psi_7(y+2)-\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\psi_6'\left(\frac{x+y+2}{2}\right)+\psi_6'(y+2)\right],$$

$$-3/2\le y\le 0,\ -1\le x+y\le 2.$$

Теперь подставляя (24) в (6), имеем первое соотношение между неизвестными функциями $T(x)$ и $N(x)$:

$$T'(x)+N(x)=\alpha_1(x),\ -1\le x\le 2,\qquad(29)$$

где $\alpha_1(x)=\psi_1'\left(\frac{x+2}{2}\right)+\int_0^{-\frac{x-2}{2}}\omega_{21}(\eta)\,d\eta-\frac{x-2}{2}\omega_{22}(x)$.

При $0\le x\le 1$ уравнение (29) имеет вид

$$\tau_1'(x)+\nu_1(x)=\alpha_1(x),\ 0\le x\le 1,\qquad(30)$$

б) При $-1\le x\le 0$ –

$$\tau_2'(x)+\nu_2(x)=\alpha_1(x),\ -1\le x\le 0,\qquad(31)$$

в) а при $1\le x\le 2$ –

$$\tau_3'(x)+\nu_3(x)=\alpha_1(x),\ 1\le x\le 2.\qquad(32)$$

Далее, подставляя (24) в (7), получим соотношение

$$\tau_2'(x)-\nu_2(x)=\delta_1(x),\ -1\le x\le 0,\qquad(33)$$

где $\delta_1(x)=\psi_2'\left(\frac{x-1}{2}\right)-\int_0^{-\frac{x+1}{2}}\left[\omega_{21}(\eta)+\omega_{22}(x+2\eta)\right]d\eta$.

А подставляя (24) в (8), имеем

$$\tau_3'(x)-\nu_3(x)=\delta_2(x),\ 1\le x\le 2,\qquad(34)$$

где $\delta_2(x)=\psi_3'\left(\frac{x-1}{2}\right)-\int_0^{-\frac{x+1}{2}}\left[\omega_{21}(\eta)+\omega_{22}(x+2\eta)\right]d\eta$.

Из (31) и (33) находим функции $\tau_2'(x)$ и $\nu_2(x)$:

$$\tau_2'(x)=\frac{1}{2}\left[\alpha_1(x)+\delta_1(x)\right],\qquad \nu_2(x)=\frac{1}{2}\left[\delta_1(x)-\alpha_1(x)\right].\qquad(35)$$

Интегрируя первое равенство из (35) от -1 до x, находим

$$\tau_2(x)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{x}\left[\alpha_1(t)+\delta_1(t)\right]dt+\psi_2(-1).$$

Далее, из (32) и (34) находим функции $\tau_3'(x)$ и $\nu_3(x)$:

$$\tau_3'(x)=\frac{1}{2}\left[\alpha_1(x)+\delta_2(x)\right], \qquad \nu_3(x)=\frac{1}{2}\left[\delta_2(x)-\alpha_1(x)\right]. \tag{36}$$

Интегрируя первое равенство из (36) от 2 до x, находим

$$\tau_3(x)=\frac{1}{2}\int_{2}^{x}\left[\alpha_1(t)+\delta_2(t)\right]dt+\psi_1(2).$$

Теперь переходя в уравнении (23) $(i=2)$, к пределу при $y\to 0$, в силу (11) и (13) получим соотношение между функциями $\tau_1(x)$ и $\mu_1(x)$:

$$\mu_1(x)=\tau_1''(x)-\omega_{21}(0)-\omega_{22}(x). \tag{37}$$

Далее, применяя оператор $-\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}$ к уравнению (22) и устремляя y к нулю, получим еще одно соотношение между $\tau_1(x)$, $\nu_1(x)$ и $\mu_1(x)$:

$$-\tau_1'''(x)+\nu_1''(x)+\nu_1'(x)-\mu_1(x)=\omega_{11}'(0). \tag{38}$$

Исключая из (30), (37) и (38) функции $\nu_1(x)$ и $\mu_1(x)$, затем интегрируя полученное уравнение дважды от 0 до x, имеем

$$\tau_1'(x)+\tau_1(x)=\alpha_2(x)+\frac{1}{2}\omega_{11}'(0)\frac{x^2}{2}+k_1x+k_2,\ 0\le x\le 1,$$

где $\alpha_2(x)=\frac{1}{2}\left[\alpha_1(x)+\int_0^x\alpha_1(t)\,dt+\int_0^x(x-t)\left[\omega_{21}(0)+\omega_{22}(t)\right]dt\right]$, а $\omega_{11}'(0)$, k_1, k_2 – неизвестные пока постоянные.

Теперь решая последнее уравнение при условиях $\tau_1(0)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\left[\alpha_1(t)+\delta_1(t)\right]dt+\psi_2(-1)$,

$$\tau_1'(0)=\frac{1}{2}\left[\alpha_1(0)+\delta_1(0)\right], \qquad \tau_1'(1)=\frac{1}{2}\left[\alpha_1(1)+\delta_2(1)\right], \qquad \tau_1(1)=\psi_1(2)-\frac{1}{2}\int_1^2\left[\alpha_1(t)+\delta_2(t)\right]dt,$$

находим функцию $\tau_1(x)$:

$$\tau_1(x)=\int_0^x e^{t-x}\alpha_2(t)\,dt+\frac{\omega_{11}'(0)}{2}\left(\frac{x^2}{2}-x+1-e^{-x}\right)+k_1\left(x-1+e^{-x}\right)+k_2\left(1-e^{-x}\right)+k_3e^{-x},$$

где $k_3=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\left[\alpha_1(t)+\delta_1(t)\right]dt+\psi_2(-1)$, $k_2=\frac{1}{2}\left[\alpha_1(0)+\delta_1(0)\right]-\alpha_2(0)+k_3$,

$$k_1=\frac{e-2}{2(e-3)}\left[\alpha_1(1)+\delta_2(1)\right]+\frac{e-2}{3-e}\alpha_2(1)+\frac{2}{3-e}\psi_1(2)+\frac{1}{e-3}\int_1^2\left[\alpha_1(t)+\delta_2(t)\right]dt+$$

$$+\frac{1}{e-3}\int_0^x e^t\alpha_2(t)\,dt+\frac{1}{3-e}k_2+\frac{1}{3-e}k_3,$$

$$\omega_{12}'(0)=-2(e-1)k_1+e\left[\alpha_1(1)+\delta_2(1)\right]-2e\alpha_2(1)+2\int_0^1 e^t\alpha_2(t)\,dt+2k_2-2k_3.$$

Тогда будут известными и функции $\nu_1(x)$, $\mu_1(x)$, $u_2(x,y)$.

Теперь переходим к рассмотрению задачи в области G_4. Переходя в уравнениях (23) $(i=2)$ и (23) $(i=4)$ к пределу при $y \to 0$ с учетом условий (11), (13) и производя замену $x \Box x+y$, находим

$$\omega_{42}(x+y) = \omega_{22}(x+y) + \omega_{21}(0) - \omega_{41}(0),\ 1 \le x+y \le 2. \tag{39}$$

Далее, сначала рассмотрим следующую вспомогательную задачу:

$$\begin{cases} u_{4xx} - u_{4yy} = \omega_{41}(y) + \Omega_{42}(x+y), \\ u_4(x,0) = T_3(x),\ u_{4y}(x,0) = N_3(x),\ 0 \le x \le 3, \\ u_4(1,y) = \tau_5(y),\ u_4(2,y) = \varphi_1(y),\ u_{4x}(2,y) = \varphi_3(y),\ u_{4xx}(2,y) = \varphi_5(y),\ 0 \le y \le 1, \end{cases}$$

где функции $T_3(x)$, $N_3(x)$, $\Omega_{42}(x+y)$ определяются следующим образом: в промежутке $1 \le x \le 2$ функции $T_3(x)$, $N_3(x)$ имеют вид: $T_3(x) = \tau_3(x)$, $N_3(x) = \nu_3(x)$, функция $\Omega_{42}(x+y)$ при $1 \le x+y \le 2$ имеет вид: $\Omega_{42}(x+y) = \omega_{22}(x+y) + \omega_{21}(0) - \omega_{41}(0)$, а в промежутках $0 \le x \le 1$ и $2 \le x \le 3$ функции $T_3(x)$, $N_3(x)$ и в промежутках $0 \le x+y \le 1$ и $2 \le x+y \le 3$ функция $\Omega_{42}(x+y)$ пока неизвестны.

Решение этой задачи, удовлетворяющее всем условиям кроме условий $u_{4x}(2,y) = \varphi_3(y)$, $u_{4xx}(2,y) = \varphi_5(y)$, будем искать в виде

$$u_4(x,y) = u_{41}(x,y) + u_{42}(x,y) + u_{43}(x,y), \tag{40}$$

где $u_{41}(x,y)$ – решение задачи

$$\begin{cases} u_{41xx} - u_{41yy} = 0, \\ u_{41}(x,0) = T_3(x),\ u_{41y}(x,0) = 0,\ 0 \le x \le 3, \\ u_{41}(1,y) = \tau_5(y),\ u_{41}(2,y) = \varphi_1(y),\ 0 \le y \le 1; \end{cases} \tag{41}$$

$u_{42}(x,y)$ – решение задачи

$$\begin{cases} u_{42xx} - u_{42yy} = \omega_{41}(y), \\ u_{42}(x,0) = 0,\ u_{42y}(x,0) = N_2(x),\ 0 \le x \le 3, \\ u_{42}(1,y) = 0,\ u_{42}(2,y) = 0,\ 0 \le y \le 1; \end{cases} \tag{42}$$

$u_{43}(x,y)$ – решение задачи

$$\begin{cases} u_{43xx} - u_{43yy} = \Omega_{42}(x+y), \\ u_{43}(x,0) = 0,\ u_{43y}(x,0) = 0,\ 0 \le x \le 3, \\ u_{43}(1,y) = 0,\ u_{43}(2,y) = 0,\ 0 \le y \le 1. \end{cases} \tag{43}$$

Методом продолжения находим решения задач (41)-(43). Они имеют вид

$$u_{41}(x,y) = \frac{1}{2}\left[T_3(x+y) + T_3(x-y)\right], \tag{44}$$

$$u_{42}(x,y) = \frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y} N_3(t)\,dt - \int_0^y (y-\eta)\left[\omega_{41}(\eta) - \omega_{41}(0)\right]d\eta, \tag{45}$$

$$u_{43}(x,y)=-\frac{1}{2}\int_0^y d\eta\int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta}\left[\overline{\Omega}_{22}(\xi-\eta)+\omega_{21}(0)\right]d\xi, \tag{46}$$

где

$$T_3(x)=\begin{cases}2\tau_5(1-x)-\tau_3(2-x),\ 0\le x\le 1,\\ \tau_3(x),\ 1\le x\le 2,\\ 2\varphi_1(x-2)-\tau_3(4-x),\ 2\le x\le 3,\end{cases}\qquad N_3(x)=\begin{cases}2\int_0^{1-x}\omega_{41}(\eta)d\eta-\nu_3(2-x),\ 0\le x\le 1,\\ \nu_3(x),\ 1\le x\le 2,\\ 2\int_0^{x-2}\omega_{41}(\eta)d\eta-\nu_3(4-x),\ 2\le x\le 3.\end{cases}$$

А функция $\Omega_{42}(x+y)$ определяется следующим образом. Первые два условия задачи (43) для функции (46) выполняются автоматически. Удовлетворяя третье условие, после некоторых преобразований находим

$$\Omega_{42}(1-y)=3\omega_{42}(1+y)-2y\omega_{42}'(1+y). \tag{47}$$

Далее, удовлетворяя четвертое условие задачи (43), после некоторых преобразований, имеем

$$y\Omega_{42}(2+y)=-\frac{1}{2}\int_0^y\Omega_{42}(2+z)dz-\frac{1}{2}\int_0^y\omega_{22}(2-z)dz. \tag{48}$$

Подставляя (44), (45), (46) в (40), получим

$$u_4(x,y)=\frac{1}{2}\left[T_3(x+y)+T_3(x-y)\right]+\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}N_3(t)dt-$$
$$-\int_0^y(y-\eta)\omega_{41}(\eta)d\eta-\frac{1}{2}\int_0^y d\eta\int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta}\Omega_{42}(\xi+\eta)d\xi. \tag{49}$$

Дифференцируя (49) по x дважды, имеем

$$u_{4x}(x,y)=\frac{1}{2}\left[T_3'(x+y)+T_3'(x-y)\right]+\frac{1}{2}\left[N_3(x+y)-N_3(x-y)\right]-$$
$$-\frac{1}{2}y\Omega_{42}(x+y)+\frac{1}{2}\int_0^y\Omega_{42}(x-y+2\eta)d\eta, \tag{50}$$

$$u_{4xx}(x,y)=\frac{1}{2}\left[T_3''(x+y)+T_3''(x-y)\right]+\frac{1}{2}\left[N_3'(x+y)-N_3'(x-y)\right]-$$
$$-\frac{1}{2}y\Omega_{42}'(x+y)+\frac{1}{4}\left[\Omega_{42}(x+y)-\Omega_{42}(x-y)\right]. \tag{51}$$

Полагая в (50) и (51) $x=2$ в силу условий $u_{4x}(2,y)=\varphi_3(y)$, $u_{4xx}(2,y)=\varphi_5(y)$ после некоторых вычислений и преобразований, имеем

$$2\omega_{41}(y)+\Omega_{42}(2+y)=2\left[\varphi_3'(y)-\varphi_1''(y)+\tau_3''(2-y)-\nu_3'(2-y)\right]-\omega_{42}(2-y)$$
$$\omega_{41}(y)+\Omega_{42}(2+y)=\varphi_5(y)-\varphi_1''(y).$$

Из этих соотношений находим

$$\omega_{41}(y)=2\left[\varphi_3'(y)+\tau_3''(2-y)-\nu_3'(2-y)\right]-\varphi_5(y)-\varphi_1''(y)-\omega_{42}(2-y), \tag{52}$$

$$\Omega_{42}(2+y)=2\left[\varphi_5(y)-\varphi_3'(y)-\tau_3''(2-y)+\nu_3'(2-y)\right]+\omega_{42}(2-y). \tag{53}$$

В (53) меняя аргумент $2+y$ на $x+y$, получим

$$\Omega_{42}(x+y)=2\left[\varphi_5(x+y-2)-\varphi_3'(x+y-2)-\tau_3''(4-x-y)+\nu_3'(4-x-y)\right]+\omega_{42}(4-x-y).$$

Слагая последнее равенство и (52), имеем

$$\omega_{41}(y)+\Omega_{42}(x+y)=2\left[\varphi_3'(y)+\tau_3''(2-y)-\nu_3'(2-y)\right]-\varphi_5(y)-\varphi_1''(y)-\omega_{42}(2-y)+$$
$$+2\left[\varphi_5(x+y-2)-\varphi_3'(x+y-2)-\tau_3''(4-x-y)+\nu_3'(4-x-y)\right]+\omega_{42}(4-x-y), 2\le x+y\le 3.$$

Далее, полагая в (50) $x=1$, после некоторых преобразований, приходим к соотношению

$$\nu_5(y)=-\tau_5'(y)+\beta_2(y), \tag{54}$$

где

$$\beta_2(y)=\tau_3'(1+y)+\nu_3(1+y)-\int_0^y\omega_{41}(\eta)\,d\eta-\frac{1}{2}y\omega_{42}(1+y)+$$
$$+\frac{1}{4}\int_0^y\Omega_{42}(1-z)\,dz+\frac{1}{4}\int_0^y\omega_{42}(1+z)\,dz.$$

Переходя в уравнениях (22) и (23) $(i=4)$ к пределу при $x\to 1$, получим соотношения

$$\mu_5(y)-\tau_5'(y)=\omega_{11}(y)+\overline{\omega}_{12}(1+y),\ \mu_5(y)-\tau_5''(y)=\omega_{41}(y)+\omega_{42}(1+y),$$

где введено обозначение

$$\omega_{12}(x+y)=\begin{cases}\overline{\omega}_{12}(x+y), 1\le x+y\le 2,\\ \overline{\overline{\omega}}_{12}(x+y), 0\le x+y\le 1.\end{cases}$$

Из этих соотношений находим

$$\omega_{11}(y)+\overline{\omega}_{12}(1+y)=\left[\tau_5''(y)-\tau_5'(y)\right]+\left[\omega_{41}(y)+\omega_{42}(1+y)\right]. \tag{55}$$

Дифференцируя уравнения (22) и (23) $(i=4)$ по x и переходя в полученных уравнениях к пределу при $x\to 1$, имеем

$$\theta_5(y)-\nu_5'(y)=\overline{\omega}'_{12}(1+y),\ \theta_5(y)-\nu_5''(y)=\omega_{42}'(1+y).$$

Из этих соотношений получим

$$\overline{\omega}_{12}(1+y)=\left[\nu_5'(y)-\nu_5(y)\right]-\left[\nu_3'(1)-\tau_3'(1)\right]+\omega_{42}(1+y)-\omega_{42}(1)+\overline{\omega}_{12}(1). \tag{56}$$

В последнем соотношении меняя аргумент $1+y$ на $x+y$, имеем

$$\overline{\omega}_{12}(x+y)=\left[\nu_5'(x+y-1)-\nu_5(x+y-1)\right]-\left[\nu_3'(1)-\tau_3'(1)\right]+$$
$$+\omega_{42}(x+y)-\omega_{42}(1)+\overline{\omega}_{12}(1), 1\le x+y\le 2. \tag{57}$$

Подставляя (56) в (55), находим

$$\omega_{11}(y)=\left[\tau_5''(y)-\tau_5'(y)\right]-\left[\nu_5'(y)-\nu_5(y)\right]+\left[\nu_3'(1)-\tau_3'(1)\right]+\omega_{41}(y)+\omega_{42}(1)-\overline{\omega}_{12}(1). \tag{58}$$

Слагая последнее равенство и (57), получим

$$\omega_{11}(y)+\overline{\omega}_{12}(x+y)=\left[\tau_5''(y)-\tau_5'(y)\right]-\left[\nu_5'(y)-\nu_5'(x+y-1)\right]+$$
$$+\left[\nu_5(y)-\nu_5(x+y-1)\right]+\left[\omega_{41}(y)+\omega_{42}(x+y)\right], 0\le y\le 1, 1\le x+y\le 2. \tag{59}$$

Далее, дифференцируя уравнение (22) по x и устремляя в полученном уравнении y к нулю, имеем

$$\overline{\overline{\omega}}'_{12}(x)=\tau_1'''(x)-\nu_1'(x).$$

Интегрируя это равенство от 1 до x и меняя аргумент x на $x+y$, находим

$$\overline{\overline{\omega}}_{12}\left(x+y\right)=\tau_1''(x+y)-\nu_1\left(x+y\right)-\tau_1''(1)+\nu_1\left(1\right)+\overline{\overline{\omega}}_{12}\left(1\right). \qquad (60)$$

Слагая это равенство и (58), получим

$$\omega_{11}\left(y\right)+\overline{\overline{\omega}}_{12}\left(x+y\right)=\left[\tau_5''(y)-\tau_5'(y)\right]-\left[\nu_5'(y)-\nu_5\left(y\right)\right]+\left[\nu_3'(1)-\tau_3'(1)\right]+$$

$$+\omega_{41}\left(y\right)+\omega_{42}\left(1\right)+\tau_1''(x+y)-\nu_1\left(x+y\right)-\tau_1''(1)+\nu_1\left(1\right), 0\le y\le 1, 0\le x+y\le 1, \qquad (61)$$

здесь положено $\overline{\overline{\omega}}_{12}\left(1\right)=\overline{\omega}_{12}\left(1\right)$.

Теперь переходим к рассмотрению задачи в области G_3. Переходя в уравнениях (23) $\left(i=3\right)$ и (22) к пределу при $x\to 0$, получим

$$\mu_4\left(y\right)-\tau_4''(y)=\omega_{31}\left(y\right)+\overline{\omega}_{32}\left(y\right),\ \mu_4\left(y\right)-\tau_4'\left(y\right)=\omega_{11}\left(y\right)+\overline{\overline{\omega}}_{12}\left(y\right),$$

где введено обозначение $\omega_{32}\left(x+y\right)=\begin{cases}\overline{\omega}_{32}\left(x+y\right),\ 0\le x+y\le 1,\\ \overline{\overline{\omega}}_{32}\left(x+y\right),\ -1\le x+y\le 0.\end{cases}$

Исключая из этих соотношений функцию $\mu_4\left(y\right)$, находим

$$\omega_{31}\left(y\right)+\overline{\omega}_{32}\left(y\right)=-\left[\tau_4''(y)-\tau_4'(y)\right]+\omega_{11}\left(y\right)+\overline{\overline{\omega}}_{12}\left(y\right). \qquad (62)$$

Переходя в уравнениях (23) $\left(i=2\right)$ и (23) $\left(i=3\right)$ к пределу при $y\to 0$ с учетом условий (11), (13) и производя замену x $x+y$, находим

$$\overline{\overline{\omega}}_{32}\left(x+y\right)=\omega_{22}\left(x+y\right)+\omega_{21}\left(0\right)-\omega_{31}\left(0\right),\ -1\le x+y\le 0. \qquad (63)$$

Далее, дифференцируя уравнения (22) и (23) $\left(i=3\right)$ по x и устремляя x к нулю, получим соотношения

$$\theta_4\left(y\right)-\nu_4'\left(y\right)=\overline{\overline{\omega'}}_{12}\left(y\right),\ \theta_4\left(y\right)-\nu_4''(y)=\overline{\omega'}_{32}\left(y\right).$$

Исключая из этих соотношений функцию $\theta_4\left(y\right)$, имеем

$$\overline{\omega'}_{32}\left(y\right)=\overline{\overline{\omega'}}_{12}\left(y\right)-\left[\nu_4''(y)-\nu_4'\left(y\right)\right],$$

а интегрируя это соотношение от 0 до y, определяем

$$\overline{\omega}_{32}\left(y\right)=-\left[\nu_4'\left(y\right)-\nu_4\left(y\right)\right]+\overline{\overline{\omega}}_{12}\left(y\right)-\overline{\overline{\omega}}_{12}\left(0\right)+\left[\nu_1'(0)-\tau_1'(0)\right]+\overline{\omega}_{32}\left(0\right).$$

(64)

Подставляя (64) в (62), находим

$$\omega_{31}(y)=-\left[\tau_4''(y)-\tau_4'(y)\right]+\omega_{11}\left(y\right)+\left[\nu_4'\left(y\right)-\nu_4\left(y\right)\right]+\overline{\overline{\omega}}_{12}\left(0\right)-\overline{\omega}_{32}\left(0\right)-\left[\nu_1'(0)-\tau_1'(0)\right]. \qquad (65)$$

В (64) меняя аргумент y на $x+y$, получим

$$\overline{\omega}_{32}\left(x+y\right)=-\left[\nu_4'\left(x+y\right)-\nu_4\left(x+y\right)\right]+\overline{\overline{\omega}}_{12}\left(x+y\right)-\overline{\overline{\omega}}_{12}\left(0\right)+$$

$$+\left[\nu_1'(0)-\tau_1'(0)\right]+\overline{\omega}_{32}\left(0\right), 0\le x+y\le 1. \qquad (66)$$

Слагая (65) и (66) в силу (58), находим

$$\omega_{31}\left(y\right)+\overline{\omega}_{32}\left(x+y\right)=-\left[\tau_4''(y)-\tau_4'(y)\right]+\left[\nu_4'(y)-\nu_4'\left(x+y\right)\right]-$$

$$-\left[\nu_4\left(y\right)-\nu_4\left(x+y\right)\right]+\left[\tau_5''(y)-\tau_5'(y)\right]-\left[\nu_5'(y)-\nu_5\left(y\right)\right]+\left[\nu_3'(1)-\tau_3'(1)\right]+$$

$$+\omega_{41}(y)+\omega_{42}(1)+\tau_1''(x+y)-\nu_1(x+y)-\tau_1''(1)-\nu_1(1), 0\le y\le 1, 0\le x+y\le 1. \quad (67)$$

А слагая (63) и (65) в силу (58), получим

$$\omega_{31}(y)+\overline{\overline{\omega}}_{32}(x+y)=-\left[\tau_4''(y)-\tau_4'(y)\right]+\left[\nu_4'(y)-\nu_4(y)\right]+\left[\tau_5''(y)-\tau_5'(y)\right]-$$

$$-\left[\nu_5'(y)-\nu_5(y)\right]+\left[\nu_3'(1)-\tau_3'(1)\right]-\left[\nu_1'(0)-\tau_1'(0)\right]+\left[\omega_{22}(x+y)+\omega_{21}(0)\right]-$$

$$-\left[\omega_{31}(0)+\overline{\omega}_{32}(0)\right]+\left[\omega_{41}(y)+\omega_{42}(1)\right]+\overline{\overline{\omega}}_{12}(0)-\overline{\omega}_{12}(1), 0\le y\le 1, -1\le x+y\le 0. \quad (68)$$

Далее, сначала рассмотрим следующую вспомогательную задачу:

$$\begin{cases} u_{3xx}-u_{3yy}=\omega_{31}(y)+\Omega_{32}(x+y), \\ u_3(x,0)=T_2(x),\ u_{3y}(x,0)=N_2(x),\ -2\le x\le 1, \\ u_3(-1,y)=\varphi_2(y), u_3(0,y)=\tau_4(y), u_{3x}(0,y)=\nu_4(y),\ 0\le y\le 1, \end{cases}$$

где функции $T_2(x)$, $N_2(x)$, $\Omega_{32}(x+y)$ определяются следующим образом: в промежутке $-1\le x\le 0$ функции $T_2(x)$, $N_2(x)$ имеют вид: $T_2(x)=\tau_2(x)$, $N_2(x)=\nu_2(x)$, функция $\Omega_{32}(x+y)$ при $-1\le x-y\le 0$ имеет вид: $\Omega_{32}(x+y)=\omega_{32}(x+y)$, а в промежутках $-2\le x\le -1$ и $0\le x\le 1$ функции $T_2(x)$, $N_2(x)$ и в промежутках $-2\le x+y\le -1$ и $0\le x+y\le 1$ функция $\Omega_{32}(x+y)$ пока неизвестны.

Решение этой задачи, удовлетворяющее всем условиям кроме условия $u_{3x}(0,y)=\nu_4(y)$, будем искать в виде

$$u_3(x,y)=u_{31}(x,y)+u_{32}(x,y)+u_{33}(x,y), \quad (69)$$

где $u_{31}(x,y)$ – решение задачи

$$\begin{cases} u_{31xx}-u_{31yy}=0, \\ u_{31}(x,0)=T_2(x),\ u_{31y}(x,0)=0,\ -2\le x\le 1, \\ u_{31}(-1,y)=\varphi_2(y),\ u_{31}(0,y)=\tau_4(y),\ 0\le y\le 1; \end{cases} \quad (70)$$

$u_{32}(x,y)$ – решение задачи

$$\begin{cases} u_{32xx}-u_{32yy}=\omega_{31}(y), \\ u_{32}(x,0)=0,\ u_{32y}(x,0)=N_2(x),\ -2\le x\le 1, \\ u_{32}(-1,y)=0,\ u_{32}(0,y)=0,\ 0\le y\le 1; \end{cases} \quad (71)$$

$u_{33}(x,y)$ – решение задачи

$$\begin{cases} u_{33xx}-u_{33yy}=\Omega_{32}(x+y), \\ u_{33}(x,0)=0,\ u_{33y}(x,0)=0,\ -2\le x\le 1, \\ u_{33}(-1,y)=0,\ u_{33}(0,y)=0,\ 0\le y\le 1. \end{cases} \quad (72)$$

Методом продолжения находим решения задач (70)-(72). Они имеют вид

$$u_{31}(x,y)=\frac{1}{2}\left[T_2(x+y)+T_2(x-y)\right], \quad (73)$$

$$u_{32}(x,y)=\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}N_2(t)\,dt-\int_0^y(y-\eta)\omega_{31}(\eta)\,d\eta, \quad (74)$$

$$u_{33}(x,y)=-\frac{1}{2}\int_0^y d\eta\int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta}\Omega_{32}(\xi+\eta)\,d\xi\,. \tag{75}$$

где

$$T_2(x)=\begin{cases}2\varphi_2(-1-x)-\tau_2(-2-x),\ -2\le x\le -1,\\ \tau_2(x),\ -1\le x\le 0,\\ 2\tau_4(x)-\tau_2(-x),\ 0\le x\le 1,\end{cases}$$

$$N_2(x)=\begin{cases}2\int\limits_0^{-1-x}\omega_{31}(\eta)\,d\eta-\nu_2(-2-x),\ -2\le x\le -1,\\ \nu_2(x),\ -1\le x\le 0,\\ 2\int\limits_0^{x}\omega_{31}(\eta)\,d\eta-\nu_2(-x),\ 0\le x\le 1.\end{cases}$$

А функция $\Omega_{32}(x+y)$ определяется следующим образом. Первые два условия задачи (72) для функции (75) выполняются автоматически. удовлетворяя третье условие, находим

$$\int_0^y\Omega_{32}(-1-z)\,dz+\int_0^y\omega_{32}(z-1)\,dz=-2y\omega_{32}(y-1)\,. \tag{76}$$

Дифференцируя (75), получим

$$\Omega_{32}(-1-y)=-2y\omega_{32}'(-1-y)-3\omega_{32}(y-1)\,. \tag{77}$$

Далее, удовлетворяя четвертое условие задачи (72), имеем

$$y\Omega_{32}(y)=-\frac{1}{2}\int_0^y\Omega_{32}(z)\,dz-\frac{1}{2}\int_0^y\omega_{32}(-z)\,dz\,. \tag{78}$$

Подставляя (73), (74), (75) в (69), получим

$$u_3(x,y)=\frac{1}{2}\left[T_2(x+y)+T_2(x-y)\right]+\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}N_2(t)\,dt-$$

$$-\int_0^y(y-\eta)\,\omega_{31}(\eta)\,d\eta-\frac{1}{2}\int_0^y d\eta\int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta}\Omega_{32}(\xi+\eta)\,d\xi\,. \tag{79}$$

Дифференцируя (79) по x, имеем

$$u_{3x}(x,y)=\frac{1}{2}\left[T_2'(x+y)+T_2'(x-y)\right]+\frac{1}{2}\left[N_2(x+y)-N_2(x-y)\right]-$$

$$-\frac{y}{2}\Omega_{32}(x+y)+\frac{1}{2}\int_0^y\Omega_{32}(x-y+2\eta)\,d\eta\,, \tag{80}$$

Полагая в (80) $x=0$ в силу условия $u_{3x}(0,y)=\nu_4(y)$ и равенства (78), имеем

$$\nu_4(y)=\tau_4'(y)+\tau_2'(-y)-\nu_2(-y)+\int_0^y\omega_{31}(\eta)\,d\eta+\frac{1}{2}\int_0^y\Omega_{32}(z)\,dz+\frac{1}{2}\int_0^y\omega_{32}(-z)\,dz\,. \tag{81}$$

Дифференцируя (81), в силу (67) и (68), после некоторых выкладок, имеем соотношение

$$\nu_4'(y)+\nu_4(y)=2\tau_4'(y)+4\left[\tau_5''(y)-\tau_5'(y)\right]+\lambda_1(y)\,, \tag{82}$$

где

$$\lambda_1(y) = -2\left[\beta_1'(y) - \beta_1(y)\right] - 2\tau_2''(-y) + 2\nu_2'(-y) + 2\left[\omega_{41}(y) + \omega_{42}(1)\right] -$$
$$-2\overline{\omega}_{12}(1) + \overline{\overline{\omega}}_{12}(0) + \left[\nu_1'(0) - \tau_1'(0)\right] + \left[\omega_{22}(-y) + \omega_{21}(0)\right] - \left[\omega_{31}(0) + \overline{\omega}_{32}(0)\right] + \overline{\overline{\omega}}_{12}(y).$$

Решая уравнение (82) при условии $\nu_4(0) = \tau_1'(0)$ после некоторых преобразований, приходим к соотношению

$$\nu_4(y) = 4\tau_5'(y) + 2\int_0^y e^{\eta - y}\tau_4'(\eta)\,d\eta - 8\int_0^y e^{\eta - y}\tau_5'(\eta)\,d\eta + \beta_1(y), \qquad (83)$$

где $\beta_1(y) = \int_0^y e^{\eta - y}\lambda_1(\eta)\,d\eta + \tau_1'(0)e^{-y} - 4\nu_3(1)e^{-y}$.

Теперь переходим в область G_1. Записывая решение уравнения (22), удовлетворяющего условиям (11), (14), (18), в силу (57), (58) и (60), имеем

$$u_1(x,y) = \int_0^y \tau_4(\eta)G_\xi(x,y;0,\eta)\,d\eta - \int_0^y \tau_5(\eta)G_\xi(x,y;1,\eta)\,d\eta + \int_0^1 \tau_1(\xi)G(x,y;\xi,0)\,d\xi -$$
$$-2\int_0^y \left[\tau_5''(\eta) - \tau_5'(\eta)\right]d\eta\int_0^1 G(x,y;\xi,\eta)\,d\xi - \int_0^y \Big\{\left[\beta_2'(\eta) - \beta_2(\eta)\right] + \left[\omega_{41}(\eta) + \omega_{42}(1)\right] +$$
$$+\left[\nu_3'(1) - \tau_3'(1)\right]d\eta\int_0^1 G(x,y;\xi,\eta)\,d\xi\Big\} - \int_0^y d\eta\int_0^{1-\eta}\left[\tau_1''(\xi+\eta) - \nu_1(\xi+\eta) - \tau_1''(1) + \nu_1(1)\right]G(x,y;\xi,\eta)\,d\xi +$$
$$+\int_0^y \left[\tau_5''(\eta) - \tau_5'(\eta)\right]d\eta\int_\eta^y G(x,y;\eta - z + 1, z)\,dz - \int_0^y \left[\beta_2'(\eta) - \beta_2(\eta)\right]d\eta\int_\eta^y G(x,y;\eta - z + 1, z)\,dz -$$
$$-\int_0^y d\eta\int_\eta^1 \Big\{\left[\omega_{42}(\xi+\eta) - \omega_{42}(1)\right] - \left[\nu_3'(1) - \tau_3'(1)\right]\Big\}G(x,y;\xi,\eta)\,d\xi. \qquad (84)$$

Дифференцируя (84) по x, затем устремляя x к нулю и к единице, с учетом равенств (54) и (83) после длинных вычислений, получим систему интегральных уравнений типа Абеля относительно $\tau_4'(y)$ и $\tau_5''(y)$.

$$\int_0^y H_1(y,\eta)\tau_5''(\eta)\,d\eta + \int_0^y H_2(y,\eta)\tau_4'(\eta)\,d\eta = S_1(y),\ 0 \le y \le 1,$$
$$\int_0^y H_3(y,\eta)\tau_5''(\eta)\,d\eta + \int_0^y H_4(y,\eta)\tau_4'(\eta)\,d\eta = S_2(y),\ 0 \le y \le 1,$$

где $H_1(y,\eta)$, $H_2(y,\eta)$, $H_3(y,\eta)$, $H_4(y,\eta)$, $S_1(y)$, $S_2(y)$ – известные функции, причем $H_1(y,\eta)$, $H_2(y,\eta)$, $H_3(y,\eta)$ – имеют слабую особенность $(1/2)$, а $H_4(y,\eta)$, $S_1(y)$, $S_2(y)$ – непрерывные функции.

Применяя обращение Абеля к этим уравнениям, получим систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода относительно $\tau_4'(y)$ и $\tau_5''(y)$:

$$\tau_5''(y) + \int_0^y K_1(y,\eta)\tau_5''(\eta)\,d\eta + \tau_4'(y) + \int_0^y K_2(y,\eta)\tau_4'(\eta)\,d\eta = g_1(y),\ 0 \le y \le 1, \qquad (85)$$

$$\tau_5''(y) + \int_0^y K_3(y,\eta)\tau_5''(\eta)\,d\eta + \int_0^y K_4(y,\eta)\tau_4'(\eta)\,d\eta = g_2(y),\ 0 \le y \le 1, \qquad (86)$$

где $K_1(y,\eta)$, $K_2(y,\eta)$, $K_3(y,\eta)$, $K_4(y,\eta)$, $g_1(y)$, $g_2(y)$ – известные функции, причем $K_1(y,\eta)$, $K_2(y,\eta)$, $K_3(y,\eta)$ – имеют слабую особенность $(1/2)$, $K_4(y,\eta)$, $g_1(y)$, $g_2(y)$ – непрерывные функции, а

$$\left.\begin{matrix} G(x,y;\xi,\eta) \\ N(x,y;\xi,\eta) \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi-2n)^2}{4(y-\eta)} \right] \mp \exp\left[-\frac{(x+\xi-2n)^2}{4(y-\eta)} \right] \right\} -$$

функции Грина первой и второй краевых задач для уравнения (22).

Решая систему (85), (86), находим функции $\tau_5''(y)$ и $\tau_4'(y)$, тем самым и функции $\tau_4(y)$, $\tau_5(y)$, $\nu_4(y)$, $\nu_5(y)$, $\omega_{11}(y)+\overline{\omega}_{12}(x+y)$, $\omega_{11}(y)+\overline{\overline{\omega}}_{12}(x+y)$, $T_2(x)$. $T_3(x)$. Тогда будут известными и функции $u_3(x,y)$, $u_4(x,y)$ и $u_1(x,y)$. Итак, мы нашли решение поставленной задачи 1 единственным образом.

Замечание 1. Аналогичная задача для уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(a_2\frac{\partial}{\partial x} + b_2\frac{\partial}{\partial y} \right)(Lu) = 0$$

в случае, когда $-1 < \frac{b_2}{a_2} < 0$, исследуется как и в случае $\gamma_2 = \frac{b_2}{a_2} = -1$ в областях G_2, G_3, G_4, а в области G_1 исследование проводится разделением область G_1 на n частей, высоты которых первые $n-1$ областей равны на $-\frac{b_2}{a_2}$, а последней – не больше чем $-\frac{b_2}{a_2}$. Задача решается в каждых областях последовательно, аналогично случаю $\gamma_2 = \frac{b_2}{a_2} = -1$, т.е. в случае уравнения (1).

Замечание 2. Если вместо условия (6), (7) и (8) взять условия

$$u|_{DE} = \psi_1(x),\ -1 \le x \le 1/2;$$

$$u|_{SE} = \psi_2(x),\ 1/2 \le x \le 1;$$

$$u|_{RC} = \psi_3(x),\ 3/2 \le x \le 2$$

соответственно, то вместо уравнения

$$\tau_1'(x) + \tau_1(x) = \alpha_2(x) + \frac{1}{2}\omega_{11}'(0)\frac{x^2}{2} + k_1x + k_2,\ 0 \le x \le 1$$

получим равенство

$$\alpha_1''(x) + \alpha_1'(x) + \omega_{11}'(0) - \omega_{21}(0) + \omega_{22}(x) = 0,\ 0 \le x \le 1,$$

то есть нельзя получить уравнение относительно неизвестной функции $\tau_1(x)$. В этом случае такая постановка задачи некорректна в случае 6 при $\gamma_2 = -1$.

Литература

1. Джураев Т.Д., Мамажанов М. Краевые задачи для одного класса уравнений четвертого порядка смешанного типа. Дифференц. уравнения, 1986, т.22, №1, с.25-31.
2. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений парабологиперболического типа. Ташкент, Фан, 1986, 220 с.

3. Мамажанов М., Шерматова Х.М. О некоторых краевых задачах для одного класса уравнений третьего порядка параболо-гиперболического типа в треугольной области с тремя линиями изменения типа. Наманган Давлат университети илмий ахборотномаси. Наманган, 2022 й., 2-сон, 41-51 б.
4. Mamajonov M., Shermatova X.M. On a boundary value problem for a third-order equation of the parabolic-hyperbolic type in a triangular domain with three type change lines. ISSN 1990-4789, Journal of applied and industrial mathematics. 2022, vol. 16, no. 3, pp. 481-489.
5. Мамажанов М., Шерматова Х.М. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа в треугольной области с тремя линиями изменения типа уравнения. Сибирский журнал индустриальной математики, 2022, 25(3), с. 93-103.
6. Mamajonov M., Shermatova Kh.M., Mukhtorova T. On a boundary value problem for a parabolic-hyperbolic equation of the third-order, when the characteristic of the first order operator is parallel to the yordinate axis. International journal of social science and interdisciplinary research. 2022, ISSN, 2277-3630 Impact factor: 7.429, 11, pp. 105-110.
7. Mamajonov M., Shermatova H.M. Statement and study of a boundary value problem for a third-order equation of parabolic-hyperbolic type in a mixed pentagonal domain, when the slope of the characteristic of the operator the first order is greater than one. International journal of research in commerce., IT, engineering and social sciences. ISSN: 2349-7793 Impact Factor: 6.876., Volume: 16 Issue: 05 in May 2022. pp. 117-130.
8. Mamajonov M., Yu.Kharimova. On one boundary problem for one parabolic-hyperbolic equation of the third order in a quadrangular domain with two lines type changes. Galaxy international interdisciplinary research journal (GIIRJ) ISSN (E): 2347-6915, Vol. 10, Issue 12, Dec. (2022), pp. 68-77.
9. Mamajonov M., Aroev D.D., Shermatova G. Statement and investigation of one boundary problem for one parabolic-hyperbolic equation of the third order in a pentagonal domain with three lines of type change. Galaxy international interdisciplinary research journal (GIIRJ) ISSN (E): 2347-6915, Vol. 10, Issue 12, Dec. (2022), pp. 332-342.
10. Mamajonov M., Turdiboeva M.M. On one boundary problem for a parabolic-hyperbolic equation of the third order, when characteristics of the first order operator parallel to the X-axis. Galaxy international interdisciplinary research journal (GIIRJ), ISSN (E): 2347-6915, Vol. 10, Issue 12, Dec. (2022), pp. 343-349.
11. Мамажанов М. О некоторых краевых задачах для одного класса уравнений третьего порядка параболо-гиперболического типа в треугольной области с тремя линиями изменения типа. Сборник международной научной конференции «Актуальные проблемы математики и образования», Ош ГУ, г. Ош., 12-13 мая, 2023 г., с. 120-132.
12. Mamazhonov M., Mamazhonov S.M., Mamadalieva Kh. B. Some boundary value problems for a third-order parabolic-hyperbolic equation in a pentagonal domain. Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences. 2016, 13 (2), pp. 31-38.
13. Apakov, Y.P., Mamajonov, S.M. Boundary-Value Problem for the Fourth-Order Equation with Multiple Characteristics in a Rectangular Domain // Journal of Mathematical Sciences. 2023, 272(2), p. 185-201. https://doi.org/10.1007/s10958-023-06409-x
14. Apakov, Y.P., Mamazhonov, S.M. Boundary Value Problem for an Inhomogeneous Fourth-Order Equation with Lower-Order Terms // Differential Equations. 2023, 59(2), p. 188-198. https://doi.org/10.1134/S0012266123020040
15. Apakov, Y.P., Mamajonov, S.M. Boundary value problem for a inhomogeneous fourth order equation with constant coefficients // Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2023, 8(2), p. 157-172. https://doi.org/10.47475/2500-0101-2023-18201
16. Apakov, Y.P., & Mamajonov, S.M. (2022). Boundary Value Problem for a Fourth-Order Equation of the Parabolic-Hyperbolic Type with Multiple Characteristics with Slopes Greater Than One. Russian Mathematics, 66(4), 1-11. https://doi.org/10.3103/S1066369X22040016
17. Apakov, Y.P., & Mamajonov, S.M. (2021). Solvability of a Boundary Value Problem for a Fourth Order Equation of Parabolic-Hyperbolic Type in a Pentagonal Domain. Journal of Applied and Industrial Mathematics, 15(4), 586-596. https://doi.org/10.1134/S1990478921040025
18. Apakov, Y.P., & Mamajonov, S.M. (2024). Boundary Value Problem for Fourth Order Inhomogeneous Equation with Variable Coefficients. Journal of Mathematical Sciences (United States), 284(2), 153–165. https://doi.org/10.1007/s10958-024-07340-5