

УДК 517.956.6

DOI: [https://doi.org/10.52754/16948645_2024_2\(5\)_15](https://doi.org/10.52754/16948645_2024_2(5)_15)

**ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА
ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В СМЕШАННОЙ ПЯТИУГОЛЬНОЙ
ОБЛАСТИ С ТРЕМЯ ЛИНИЯМИ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА, КОГДА ОДНА ИЗ
ХАРАКТЕРИСТИК ОПЕРАТОРОВ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ПАРАЛЛЕЛЬНА ОСИ
АБСЦИСС, А ДРУГАЯ – УГЛОВОЙ КОЭФФИЦИЕНТ КОТОРОЙ БОЛЬШЕ
ЕДИНИЦЫ**

Мамажонов Мирза
mirzamatajonov@gmail.com
КГПИ, «Математика»
Мамажонов Санжарбек Мирзаевич
sanjarbekmatajonov@gmail.com
Кокандский университет
Фергана, Узбекистан

***Аннотация.** В настоящей статье исследуется одна краевая задача для параболо-гиперболического уравнения четвертого порядка в смешанной области с тремя линиями изменения типа. Доказана теорема существования и единственности решения этой поставленной задачи. В ходе доказательства этой теоремы применены методы построения решения, дифференциальных и интегральных уравнений, а также метод продолжения.*

***Ключевые слова:** Дифференциальные и интегральные уравнения, метод построения решения, метод продолжения, краевая задача, параболо-гиперболический тип, однозначная разрешимость.*

**ON A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A FOURTH-ORDER EQUATION OF
PARABOLIC-HYPERBOLIC TYPE IN A MIXED PENTAGONAL DOMAIN WITH
THREE LINES OF TYPE CHANGE, WHEN ONE OF THE CHARACTERISTICS OF
THE FIRST-ORDER OPERATORS IS PARALLEL TO THE AXIS, AND THE OTHER
HAS A SLOPE COEFFICIENT GREATER THAN ONE**

Mamajonov Mirza
mirzamatajonov@gmail.com
KSPI, "Mathematics"
Mamajonov Sanjarbek Mirzayevich
sanjarbekmamajonov@gmail.com
Kokand University
Fergana, Uzbekistan

***Abstract.** In this paper, we study a boundary value problem for a fourth-order parabolic-hyperbolic equation in a mixed domain with three lines of type change. We prove a theorem on the existence and uniqueness of a solution to this problem. In proving this theorem, we apply methods of constructing a solution, differential and integral equations, and the continuation method.*

***Keywords:** Differential and integral equations, solution construction method, continuation method, boundary value problem, parabolic-hyperbolic type, unique solvability.*

Краевые задачи для уравнений третьего, четвертого и высокого порядков парабола-гиперболического типа интенсивно изучались со второй половины прошлого века. Краевые задачи для таких уравнений изучены, в основном, в работах [1], [2] и др.

После этого началось исследование ряд различных краевых задач для таких уравнений в различных областях с двумя и тремя линиями изменения типа {см. [3]-[19]}.

В настоящей статье в пятиугольной области G плоскости xOy ставится и исследуется одна краевая задача для парабола-гиперболического уравнения четвертого порядка вида

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(a_2 \frac{\partial}{\partial x} + b_2 \frac{\partial}{\partial y} \right) (Lu) = 0, \quad (1)$$

где $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4 \cup J_1 \cup J_2 \cup J_3$, G_1 – прямоугольник с вершинами в точках $A(0;0)$, $B(1;0)$, $B_0(1,1)$, $A_0(0,1)$; G_2 – треугольник с вершинами в точках $D(-1,0)$, $E(1/2, -3/2)$, $C(2,0)$; G_3 и G_4 – прямоугольники с вершинами в точках A , D , $D_0(-1,1)$, A_0 и B , B_0 , $C_0(2,1)$, $C(2,0)$ соответственно; J_1 , J_2 и J_3 – открытые отрезки с вершинами в точках C , D ; A , A_0 и B , B_0 соответственно; $u = u(x, y)$ – неизвестная функция, а $a_2, b_2 \in R$, $\gamma_2 = \frac{b_2}{a_2}$ – угловой коэффициент оператора $a_2 \frac{\partial}{\partial x} + b_2 \frac{\partial}{\partial y}$, причем

$$1 < \gamma_2 < +\infty, \quad Lu = \begin{cases} u_{xx} - u_y, & (x, y) \in G_1, \\ u_{xx} - u_{yy}, & (x, y) \in G_j, \quad j = 2, 3, 4. \end{cases}$$

Для уравнения (1) ставится следующая задача:

Задача-1. Найти функцию $u(x, y)$, которая 1) непрерывна в \bar{G} и в области $G \setminus J_1 \setminus J_2 \setminus J_3$ имеет непрерывные производные, участвующие в уравнение (1), причем u_x , u_y , u_{xx} , u_{xy} , u_{yy} – непрерывны в G вплоть до части границы области G , указанные в краевых условиях; 2) удовлетворяет уравнению (1) в области $G \setminus J_1 \setminus J_2 \setminus J_3$; 3) удовлетворяет следующим краевым условиям:

$$u(2, y) = \varphi_1(y), \quad 0 \leq y \leq 1; \quad (2)$$

$$u(-1, y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq 1; \quad (3)$$

$$u_x(-1, y) = \varphi_4(y), \quad 0 \leq y \leq 1; \quad (4)$$

$$u_{xx}(-1, y) = \varphi_6(y), \quad 0 \leq y \leq 1; \quad (5)$$

$$u|_{CE} = \psi_1(x), \quad 1/2 \leq x \leq 2; \quad (6)$$

$$u|_{DP} = \psi_2(x), \quad -1 \leq x \leq -1/2; \quad (7)$$

$$u|_{QE} = \psi_3(x), \quad 0 \leq x \leq 1/2; \quad (8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{DE} = \psi_4(x), \quad -1 \leq x \leq 1/2; \quad (9)$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right|_{DE} = \psi_5(x), \quad -1 \leq x \leq 1/2; \quad (10)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{CE} = \psi_6(x), \quad 1/2 \leq x \leq 2; \quad (11)$$

4) удовлетворяет следующим условиям склеивания на линиях изменения типа:

$$u(x, +0) = u(x, -0) = T(x), \quad -1 \leq x \leq 1; \quad (12)$$

$$u_y(x, +0) = u_y(x, -0) = N(x), \quad -1 \leq x \leq 1; \quad (13)$$

$$u_{yy}(x, +0) = u_{yy}(x, -0) = M(x), \quad -1 < x < 2; \quad (14)$$

$$u(+0, y) = u(-0, y) = \tau_4(y), \quad 0 \leq y \leq 1; \quad (15)$$

$$u_x(+0, y) = u_x(-0, y) = \nu_4(y), \quad 0 \leq y \leq 1; \quad (16)$$

$$u_{xx}(+0, y) = u_{xx}(-0, y) = \mu_4(y), \quad 0 < y < 1; \quad (17)$$

$$u_{xxx}(+0, y) = u_{xxx}(-0, y) = \theta_4(y), \quad 0 < y < 1; \quad (18)$$

$$u(1+0, y) = u(1-0, y) = \tau_5(y), \quad 0 \leq y \leq 1; \quad (19)$$

$$u_x(1+0, y) = u_x(1-0, y) = \nu_5(y), \quad 0 \leq y \leq 1; \quad (20)$$

$$u_{xx}(1+0, y) = u_{xx}(1-0, y) = \mu_5(y), \quad 0 < y < 1; \quad (21)$$

$$u_{xxx}(1+0, y) = u_{xxx}(1-0, y) = \theta_5(y), \quad 0 < y < 1, \quad (22)$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4, \varphi_6, \psi_j$ ($j = \overline{1, 6}$) – заданные достаточно гладкие функции, n – внутренняя нормаль к прямой $x + y = -1$ или $x - y = 2$, а $P(-1/2, -1/2)$, $Q(0, -1)$,

$$T(x) = \begin{cases} \tau_1(x), & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ \tau_2(x), & \text{если } -1 \leq x \leq 0, \\ \tau_3(x), & \text{если } 1 \leq x \leq 2; \end{cases} \quad N(x) = \begin{cases} \nu_1(x), & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ \nu_2(x), & \text{если } -1 \leq x \leq 0, \\ \nu_3(x), & \text{если } 1 \leq x \leq 2; \end{cases}$$

$$M(x) = \begin{cases} \mu_1(x), & \text{если } 0 < x < 1, \\ \mu_2(x), & \text{если } -1 < x < 0, \\ \mu_3(x), & \text{если } 1 < x < 2; \end{cases} \quad \tau_i, \nu_i, \mu_i \ (i = \overline{1, 5}), \theta_4, \theta_5 \quad - \quad \text{неизвестные пока}$$

достаточно гладкие функции.

Теорема. Если $\varphi_1, \varphi_2 \in C^4[0, 1]$, $\varphi_4 \in C^3[0, 1]$, $\varphi_6 \in C^2[0, 1]$, $\psi_1 \in C^4[1/2, 2]$, $\psi_2 \in C^4[-1, -1/2]$, $\psi_3 \in C^4[0, 1/2]$, $\psi_4 \in C^3[-1, 1/2]$, $\psi_5 \in C^2[-1, 1/2]$, $\psi_6 \in C^3[1/2, 2]$, причем выполняется условие согласования $\psi_1(1/2) = \psi_3(1/2)$, $\tau_1(0) = \tau_2(0)$, $\tau_1'(0) = \tau_2'(0)$,

$\tau_1(1) = \tau_3(1)$, $\tau_1'(1) = \tau_3'(1)$, $\tau_2(-1) = \psi_2(-1) = \varphi_2(0)$, $\tau_3(2) = \varphi_1(0) = \psi_1(2)$, то задача-1 допускает единственное решение.

Доказательство. Теорему докажем методом построения решения. Для этого уравнение (1) перепишем в виде

$$u_{1xx} - u_{1y} = \omega_{11}(y) + \omega_{12}(b_2x - a_2y), \quad (x, y) \in G_1, \quad (23)$$

$$u_{ixx} - u_{iyy} = \omega_{i1}(y) + \omega_{i2}(b_2x - a_2y), \quad (x, y) \in G_i \quad (i = 2, 3, 4), \quad (24)$$

где введено обозначение $u(x, y) = u_i(x, y)$, $(x, y) \in G_i$ ($i = \overline{1, 4}$), причем функции $\omega_{i1}(y)$, $\omega_{i2}(b_2x - a_2y)$ ($i = \overline{1, 4}$) неизвестные пока достаточно гладкие функции.

Исследование будем провести сначала в области G_2 . Решение уравнения (24) ($i = 2$), удовлетворяющее условиям (12), (13) представляется в виде

$$u_2(x, y) = \frac{1}{2} [T(x+y) + T(x-y)] + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} N(t) dt - \frac{1}{2} \int_0^y d\eta \int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta} \omega_{22}(b_2\xi - a_2\eta) d\xi - \int_0^y (y-\eta) \omega_{21}(\eta) d\eta. \quad (25)$$

Подставляя (25) в условия (9) и (10) после упрощений, имеем

$$\omega_{21}(-1-x) + \omega_{22}((b_2+a_2)x + a_2) = \sqrt{2}\psi_4'(x), \quad -1 \leq x \leq 1/2, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \frac{b_2 - a_2}{b_2 + a_2} \omega_{22}((b_2 + a_2)x + a_2) - \omega_{21}(-1-x) &= 2\psi_5(x) - 2T''(-1) - 2N'(-1) + \\ &+ \frac{2b_2}{b_2 + a_2} \omega_{22}(-1), \quad -1 \leq x \leq 1/2. \end{aligned} \quad (27)$$

Из (26) и (27), находим

$$\begin{aligned} \omega_{21}(-1-x) &= \sqrt{2}\psi_4'(x) - \frac{b_2 + a_2}{b_2} \left[\psi_5(x) + \frac{\sqrt{2}}{2} \psi_4'(x) \right] + \\ &+ \frac{b_2 + a_2}{b_2} [T''(-1) + N'(-1)] - \omega_{22}(-b_2), \quad -1 \leq x \leq 1/2, \\ \omega_{22}((b_2 + a_2)x + a_2) &= \frac{b_2 + a_2}{b_2} \left[\psi_5(x) + \frac{\sqrt{2}}{2} \psi_4'(x) \right] - \\ &- \frac{b_2 + a_2}{b_2} [T''(-1) + N'(-1)] + \omega_{22}(-b_2), \quad -1 \leq x \leq 1/2. \end{aligned}$$

В первом из этих равенств меняя аргумент $-1-x$ на y , а во втором – аргумент $(b_2 + a_2)x + a_2$ на $b_2x - a_2y$, получим

$$\begin{aligned} \omega_{21}(y) &= \sqrt{2}\psi_4'(-1-y) - \frac{b_2 + a_2}{b_2} \left[\psi_5(-1-y) + \frac{\sqrt{2}}{2} \psi_4'(-1-y) \right] + \\ &+ \frac{b_2 + a_2}{b_2} [T''(-1) + N'(-1)] - \omega_{22}(-b_2), \quad -3/2 \leq y \leq 0, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \omega_{22}(b_2x - a_2y) &= \frac{b_2 + a_2}{b_2} \left[\psi_5 \left(\frac{b_2x - a_2y - a_2}{b_2 + a_2} \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \psi_4' \left(\frac{b_2x - a_2y - a_2}{b_2 + a_2} \right) \right] - \\ &- \frac{b_2 + a_2}{b_2} [T''(-1) + N'(-1)] + \omega_{22}(-b_2), \quad -b_2 \leq b_2x - a_2y \leq \frac{b_2 + 3a_2}{2}. \end{aligned} \quad (29)$$

Слагая (28) и (29), имеем

$$\begin{aligned} \omega_{21}(y) + \omega_{22}(b_2x - a_2y) &= \sqrt{2}\psi_4'(-1-y) + \frac{b_2 + a_2}{b_2} \left[\psi_5 \left(\frac{b_2x - a_2y - a_2}{b_2 + a_2} \right) - \psi_5(-1-y) \right] + \\ &+ \frac{\sqrt{2}(b_2 + a_2)}{2b_2} \left[\psi_4' \left(\frac{b_2x - a_2y - a_2}{b_2 + a_2} \right) - \psi_4'(-1-y) \right], \quad -3/2 \leq y \leq 0, \quad -b_2 \leq b_2x - a_2y \leq \frac{b_2 + 3a_2}{b_2} \end{aligned}$$

Далее, подставляя (25) в условие (11), получим

$$\omega_{22}((b_2 - a_2)x + 2a_2) + \omega_{21}(x - 2) = -\sqrt{2}\psi_6'(x), \quad 1/2 \leq x \leq 2.$$

Полагая в (28) $y = x - 2$ и подставляя значение $\omega_{21}(x - 2)$ в последнее равенство, имеем

$$\begin{aligned} \omega_{22}((b_2 - a_2)x + 2a_2) &= -\sqrt{2}\psi_6'(x) - \sqrt{2}\psi_4'(1-x) + \frac{b_2 + a_2}{b_2} \left[\psi_5(1-x) + \frac{\sqrt{2}}{2} \psi_4'(1-x) \right] - \\ &- \frac{b_2 + a_2}{b_2} [T''(-1) + N'(-1)] + \omega_{22}(-b_2), \quad 1/2 \leq x \leq 2. \end{aligned}$$

В последнем равенстве меняя аргумент $(b_2 - a_2)x + 2a_2$ на $b_2x - a_2y$, получим

$$\begin{aligned} \omega_{22}(b_2x - a_2y) &= -\sqrt{2}\psi_6' \left(\frac{b_2x - a_2y - 2a_2}{b_2 - a_2} \right) - \sqrt{2}\psi_4' \left(\frac{b_2 + a_2 - (b_2x - a_2y)}{b_2 - a_2} \right) + \\ &+ \frac{b_2 + a_2}{b_2} \left[\psi_5 \left(\frac{b_2 + a_2 - (b_2x - a_2y)}{b_2 - a_2} \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \psi_4' \left(\frac{b_2 + a_2 - (b_2x - a_2y)}{b_2 - a_2} \right) \right] - \\ &- \frac{b_2 + a_2}{b_2} [T''(-1) + N'(-1)] + \omega_{22}(-b_2), \quad \frac{b_2 + 3a_2}{2} \leq b_2x - a_2y \leq 2b_2. \end{aligned} \quad (30)$$

Слагая (28) и (30), находим

$$\begin{aligned} \omega_{21}(y) + \omega_{22}(b_2x - a_2y) &= -\sqrt{2}\psi_6' \left(\frac{b_2x - a_2y - 2a_2}{b_2 - a_2} \right) + \\ &+ \frac{b_2 + a_2}{b_2} \left[\psi_5 \left(\frac{b_2 + a_2 - (b_2x - a_2y)}{b_2 - a_2} \right) - \psi_5(-1-y) \right] + \\ &+ \frac{\sqrt{2}a_2}{b_2} \left[\psi_4' \left(\frac{b_2 + a_2 - (b_2x - a_2y)}{b_2 - a_2} \right) - \psi_4'(-1-y) \right], \quad -3/2 \leq y \leq 0, \quad \frac{b_2 + 3a_2}{2} \leq b_2x - a_2y \leq 2b_2 \end{aligned}$$

Теперь подставляя (25) в (6), имеем первое соотношение между неизвестными функциями $T(x)$ и $N(x)$:

$$T'(x) + N(x) = \alpha_1(x), \quad -1 \leq x \leq 2, \quad (31)$$

$$\text{где } \alpha_1(x) = \psi_1' \left(\frac{x+2}{2} \right) - \int_0^{\frac{x-2}{2}} [\omega_{21}(\eta) + \omega_{22}(b_2x - (b_2 + a_2)\eta)] d\eta.$$

При $0 \leq x \leq 1$ уравнение (31) имеет вид

$$\tau_1'(x) + \nu_1(x) = \alpha_1(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (32)$$

б) При $-1 \leq x \leq 0$ –

$$\tau_2'(x) + \nu_2(x) = \alpha_1(x), \quad -1 \leq x \leq 0, \quad (33)$$

в) а при $1 \leq x \leq 2$ –

$$\tau_3'(x) + \nu_3(x) = \alpha_1(x), \quad 1 \leq x \leq 2. \quad (34)$$

Далее, подставляя (25) в (7), получим соотношение

$$\tau_2'(x) - \nu_2(x) = \delta_1(x), \quad -1 \leq x \leq 0, \quad (35)$$

где $\delta_1(x) = \psi_2' \left(\frac{x-1}{2} \right) + \int_0^{-1-x} [\omega_{21}(\eta) + \omega_{22}(b_2x + (b_2 - a_2)\eta)] d\eta.$

А подставляя (25) в (8), имеем

$$\tau_3'(x) - \nu_3(x) = \delta_2(x), \quad 1 \leq x \leq 2, \quad (36)$$

где $\delta_2(x) = \psi_3' \left(\frac{x-1}{2} \right) + \int_0^{-1-x} [\omega_{21}(\eta) + \omega_{22}(b_2x + (b_2 - a_2)\eta)] d\eta.$

Из (33) и (35) находим функции $\tau_2'(x)$ и $\nu_2(x)$:

$$\tau_2'(x) = \frac{1}{2} [\alpha_1(x) + \delta_1(x)], \quad \nu_2(x) = \frac{1}{2} [\alpha_1(x) - \delta_1(x)]. \quad (37)$$

Интегрируя первое из (37) от -1 до x , находим

$$\tau_2(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^x [\alpha_1(t) + \delta_1(t)] dt + \psi_2(-1).$$

Далее, из (34) и (36) находим функции $\tau_3'(x)$ и $\nu_3(x)$:

$$\tau_3'(x) = \frac{1}{2} [\alpha_1(x) + \delta_2(x)], \quad \nu_3(x) = \frac{1}{2} [\alpha_1(x) - \delta_2(x)]. \quad (38)$$

Интегрируя первое из (38) от 2 до x , находим

$$\tau_3(x) = \frac{1}{2} \int_2^x [\alpha_1(t) + \delta_2(t)] dt + \psi_1(2).$$

Теперь переходя в уравнении (24) ($i = 2$), к пределу при $y \rightarrow 0$, в силу (12) и (14) получим соотношение между неизвестными функциями $\tau_1(x)$ и $\mu_1(x)$:

$$\mu_1(x) = \tau_1''(x) - \omega_{21}(0) - \omega_{22}(x). \quad (39)$$

Далее, применяя оператор $a_2 \frac{\partial}{\partial x} + b_2 \frac{\partial}{\partial y}$ к уравнению (23) и устремляя y к нулю,

получим еще одно соотношение между неизвестными функциями $\tau_1(x)$, $\nu_1(x)$ и $\mu_1(x)$:

$$a_2 \tau_1'''(x) + b_2 \nu_1''(x) - a_2 \nu_1'(x) - b_2 \mu_1(x) = b_2 \omega_{11}'(0). \quad (40)$$

Исключая из (32), (39) и (40) функции $\nu_1(x)$ и $\mu_1(x)$, затем интегрируя полученное уравнение дважды от 0 до x , имеем

$$\tau_1'(x) + \tau_1(x) = \alpha_2(x) + \frac{b_2}{2} \omega_{11}'(0) x^2 + k_1 x + k_2, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

где $\alpha_2(x) = \frac{b_2}{b_2 - a_2} \left[\alpha_1(x) - \int_0^x \alpha_1(t) dt - \int_0^x (x-t) [\omega_{21}(0) + \omega_{22}(b_2 t)] dt \right]$, а $\omega_{11}'(0)$, k_1 , k_2 – неизвестные пока постоянные.

Теперь решая последнее уравнение при условиях

$$\tau_1(0) = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 [\alpha_1(t) + \delta_1(t)] dt + \psi_2(-1), \quad \tau_1'(0) = \frac{1}{2} [\alpha_1(0) + \delta_1(0)],$$

$$\tau_1(1) = \psi_1(2) - \frac{1}{2} \int_1^2 [\alpha_1(t) + \delta_2(t)] dt, \quad \tau_1'(1) = \frac{1}{2} [\alpha_1(1) + \delta_2(1)],$$

находим функцию $\tau_1(x)$:

$$\tau_1(x) = \int_0^x e^{x-t} \alpha_2(t) dt + b_2 \omega_{11}'(0) \left(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} \right) + k_1 (e^x - 1 - x) + k_2 (e^x - 1) + k_3 e^x,$$

где

$$k_3 = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 [\alpha_1(t) + \delta_1(t)] dt + \psi_2(-1), \quad k_2 = \frac{1}{2} [\alpha_1(0) + \delta_1(0)] - \alpha_2(0) - k_3,$$

$$\omega_{11}'(0) = \frac{2}{b_2(e-3)} \left\{ \frac{2-e}{2} [\alpha_1(1) + \delta_2(1)] + \alpha_2(1)(e-2) - \int_0^1 e^{1-t} \alpha_2(t) dt + \right. \\ \left. + \psi_1(2)(e-1) - \frac{e-1}{2} \int_1^2 [\alpha_1(t) + \delta_2(t)] dt - k_2 - k_3 e \right\},$$

$$k_1 = \frac{1}{2} [\alpha_1(1) + \delta_2(1)] - \alpha_2(1) - \psi_1(2) + \frac{1}{2} \int_1^2 [\alpha_1(t) + \delta_2(t)] dt - k_2 - \frac{b_2}{2} \omega_{11}'(0).$$

Тогда будут известными и функции $\nu_1(x)$, $\mu_1(x)$, $u_2(x, y)$.

Переходя в уравнениях (24) ($i=2$) и (24) ($i=3$) к пределу при $y \rightarrow 0$ с учетом условий (12), (14) и производя замену $x \square b_2 x - a_2 y$, находим

$$\omega_{32}(b_2 x - a_2 y) = \omega_{22}(b_2 x - a_2 y) + \omega_{21}(0) - \omega_{31}(0), \quad -b_2 \leq b_2 x - a_2 y \leq 0. \quad (41)$$

Теперь переходим к рассмотрению задачи в области G_3 . Сначала рассмотрим следующую вспомогательную задачу:

$$\begin{cases} u_{3xx} - u_{3yy} = \omega_{31}(y) - \omega_{31}(0) + \Omega_{22}(b_2 x - a_2 y) + \omega_{21}(0), \\ u_3(x, 0) = T_2(x), \quad u_{3y}(x, 0) = N_2(x), \quad -2 \leq x \leq 1, \\ u_3(-1, y) = \varphi_2(y), \quad u_{3x}(-1, y) = \varphi_4(y), \quad u_{3xx}(-1, y) = \varphi_6(y), \quad u_3(0, y) = \tau_4(y), \quad 0 \leq y \leq 1, \end{cases}$$

где функции $T_2(x)$, $N_2(x)$, $\Omega_{22}(b_2x - a_2y) + \omega_{21}(0)$ определяются следующим образом: в промежутке $-1 \leq x \leq 0$ функции $T_2(x)$, $N_2(x)$ имеют вид: $T_2(x) = \tau_2(x)$, $N_2(x) = \nu_2(x)$, функция $\Omega_{22}(b_2x - a_2y) + \omega_{21}(0)$ при $-b_2 \leq b_2x - a_2y \leq 0$ имеет вид: $\Omega_{22}(b_2x - a_2y) + \omega_{21}(0) = \omega_{22}(b_2x - a_2y) + \omega_{21}(0)$, а в промежутках $-2 \leq x \leq -1$ и $0 \leq x \leq 1$ функции $T_2(x)$, $N_2(x)$ и в промежутках $-2b_2 \leq b_2x - a_2y \leq -b_2$ и $0 \leq b_2x - a_2y \leq b_2$ функция $\Omega_{22}(b_2x - a_2y) + \omega_{21}(0)$ пока неизвестны.

Решение этой задачи, удовлетворяющее всем условиям кроме условий $u_{3x}(-1, y) = \varphi_4(y)$, $u_{3xx}(-1, y) = \varphi_6(y)$, будем искать в виде

$$u_3(x, y) = u_{31}(x, y) + u_{32}(x, y) + u_{33}(x, y), \quad (42)$$

где $u_{31}(x, y)$ – решение задачи

$$\begin{cases} u_{31xx} - u_{31yy} = 0, \\ u_{31}(x, 0) = T_2(x), u_{31y}(x, 0) = 0, -2 \leq x \leq 1, \\ u_{31}(-1, y) = \varphi_2(y), u_{31}(0, y) = \tau_4(y), 0 \leq y \leq 1; \end{cases} \quad (43)$$

$u_{32}(x, y)$ – решение задачи

$$\begin{cases} u_{32xx} - u_{32yy} = \omega_{31}(y) - \omega_{31}(0), \\ u_{32}(x, 0) = 0, u_{32y}(x, 0) = N_2(x), -2 \leq x \leq 1, \\ u_{32}(-1, y) = 0, u_{32}(0, y) = 0, 0 \leq y \leq 1; \end{cases} \quad (44)$$

$u_{33}(x, y)$ – решение задачи

$$\begin{cases} u_{33xx} - u_{33yy} = \Omega_{22}(b_2x - a_2y) + \omega_{21}(0), \\ u_{33}(x, 0) = 0, u_{33y}(x, 0) = 0, -2 \leq x \leq 1, \\ u_{33}(-1, y) = 0, u_{33}(0, y) = 0, 0 \leq y \leq 1. \end{cases} \quad (45)$$

Методом продолжения находим решения задач (43)-(45). Они имеют вид

$$u_{31}(x, y) = \frac{1}{2} [T_2(x+y) + T_2(x-y)], \quad (46)$$

$$u_{32}(x, y) = \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} N_2(t) dt - \int_0^y (y-\eta) [\omega_{31}(\eta) - \omega_{31}(0)] d\eta, \quad (47)$$

$$u_{33}(x, y) = -\frac{1}{2} \int_0^y d\eta \int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta} [\Omega_{32}(b_2\xi - a_2\eta) + \omega_{21}(0)] d\xi. \quad (48)$$

где

$$T_2(x) = \begin{cases} 2\varphi_2(-1-x) - \tau_2(-2-x), & -2 \leq x \leq -1, \\ \tau_2(x), & -1 \leq x \leq 0, \\ 2\tau_4(x) - \tau_2(-x), & 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

$$N_2(x) = \begin{cases} 2 \int_0^{-1-x} [\omega_{31}(\eta) - \omega_{31}(0)] d\eta - v_2(-2-x), & -2 \leq x \leq -1, \\ v_2(x), & -1 \leq x \leq 0, \\ 2 \int_0^x [\omega_{31}(\eta) - \omega_{31}(0)] d\eta - v_2(-x), & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

А функция $\Omega_{22}(b_2x - a_2y) + \omega_{21}(0)$ определяется следующим образом. Первые два условия задачи (45) выполняются автоматически для функции (48). Удовлетворяя третье условию, находим

$$\begin{aligned} \frac{2a_2^2}{b_2^2 - a_2^2} \int_0^y [\Omega_{22}(-b_2 - a_2z) + \omega_{21}(0)] dz &= \frac{b_2}{b_2 - a_2} \int_0^y [\Omega_{22}(b_2(-1-z)) + \omega_{21}(0)] dz + \\ &+ \frac{b_2}{b_2 + a_2} \int_0^y [\omega_{22}(b_2(z-1)) + \omega_{21}(0)] dz. \end{aligned} \quad (49)$$

Дифференцируя (49), получим

$$\begin{aligned} \frac{2a_2^2}{b_2^2 - a_2^2} [\Omega_{22}(-b_2 - a_2y) + \omega_{21}(0)] &= \frac{b_2}{b_2 - a_2} [\Omega_{22}(b_2(-1-y)) + \omega_{21}(0)] + \\ &+ \frac{b_2}{b_2 + a_2} [\omega_{22}(b_2(y-1)) + \omega_{21}(0)]. \end{aligned} \quad (50)$$

Далее, удовлетворяя четвертое условие задачи (45), имеем

$$\begin{aligned} \frac{b_2}{b_2 + a_2} \int_0^y [\Omega_{22}(b_2z) + \omega_{21}(0)] dz &= \frac{a_2}{b_2 + a_2} \int_0^y [\omega_{22}(-a_2z) + \omega_{21}(0)] dz - \\ - \frac{b_2}{b_2 - a_2} \int_0^y [\omega_{22}(-b_2z) + \omega_{21}(0)] dz &- \frac{a_2}{b_2 - a_2} \int_0^y [\omega_{22}(-a_2z) + \omega_{21}(0)] dz. \end{aligned} \quad (51)$$

Дифференцируя (51), находим

$$\Omega_{22}(b_2y) + \omega_{21}(0) = \frac{2a_2}{b_2 - a_2} [\omega_{22}(-a_2y) + \omega_{21}(0)] - \frac{b_2 + a_2}{b_2 - a_2} [\omega_{22}(-b_2y) + \omega_{21}(0)]. \quad (52)$$

Подставляя (46), (47), (48) в (42), получим

$$\begin{aligned} u_3(x, y) &= \frac{1}{2} [T_2(x+y) + T_2(x-y)] + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} N_2(t) dt - \\ - \int_0^y (y-\eta) [\omega_{31}(\eta) - \omega_{31}(0)] d\eta &- \frac{1}{2} \int_0^y d\eta \int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta} [\Omega_{22}(b_2\xi - a_2\eta) + \omega_{21}(0)] d\xi. \end{aligned} \quad (53)$$

Дифференцируя (53) по x дважды, имеем

$$\begin{aligned} u_{3x}(x, y) &= \frac{1}{2} [T_2'(x+y) + T_2'(x-y)] + \frac{1}{2} [N_2(x+y) - N_2(x-y)] - \\ - \frac{1}{2} \int_0^y [\Omega_{22}(b_2(x+y) - (b_2 + a_2)\eta) &+ \omega_{21}(0)] d\eta + \\ + \frac{1}{2} \int_0^y [\Omega_{22}((b_2 - a_2) + b_2(x-y)) &+ \omega_{21}(0)] d\eta, \end{aligned} \quad (54)$$

$$u_{3xx}(x, y) = \frac{1}{2} [T_2''(x+y) + T_2''(x-y)] + \frac{1}{2} [N_2'(x+y) - N_2'(x-y)] - \\ - \frac{b_2}{2} \int_0^y \Omega_{22}'(b_2(x+y) - (b_2 + a_2)\eta) d\eta + \frac{b_2}{2} \int_0^y \Omega_{22}'(b_2(x-y) + (b_2 - a_2)\eta) d\eta. \quad (55)$$

Полагая в (54) $x = -1$ в силу условия $u_{3x}(-1, y) = \varphi_4(y)$, после длинных вычислений, имеем

$$\varphi_4(y) = \tau_2'(y-1) - \varphi_2'(y) + \nu_2(y-1) - \int_0^y [\omega_{31}(\eta) - \omega_{31}(0)] d\eta - \\ - \frac{b_2}{2(b_2 + a_2)} \int_0^y [\omega_{22}(b_2(z-1)) + \omega_{21}(0)] dz - \frac{a_2}{2(b_2 + a_2)} \int_0^y [\Omega_{22}(-b_2 - a_2 z) + \omega_{21}(0)] dz + \\ + \frac{b_2}{2(b_2 - a_2)} \int_0^y [\Omega_{22}(b_2(-1-z)) + \omega_{21}(0)] dz - \frac{a_2}{2(b_2 - a_2)} \int_0^y [\Omega_{22}(-b_2 - a_2 z) + \omega_{21}(0)] dz. \quad (56)$$

Дифференцируя (56), после некоторых выкладок, находим

$$\omega_{31}(y) - \omega_{31}(0) = \tau_2''(y-1) + \nu_2'(y-1) - \varphi_2''(y) - \varphi_4'(y) - \frac{b_2}{2(b_2 + a_2)} [\omega_{22}(b_2(y-1)) + \omega_{21}(0)] - \\ - \frac{a_2 b_2}{b_2^2 - a_2^2} [\Omega_{22}(-b_2 - a_2 y) + \omega_{21}(0)] + \frac{b_2}{2(b_2 - a_2)} [\Omega_{22}(b_2(-1-y)) + \omega_{21}(0)]. \quad (57)$$

Подставляя (55) в условие (5), приходим к соотношению

$$\varphi_6(y) = \varphi_2''(y) + [\omega_{31}(y) - \omega_{31}(0)] + \frac{b_2^2}{b_2^2 - a_2^2} \Omega_{22}(-b_2 - a_2 y) - \\ - \frac{b_2}{2(b_2 + a_2)} \omega_{22}(b_2(y-1)) - \frac{b_2}{2(b_2 - a_2)} \Omega_{22}(b_2(-1-y)). \quad (58)$$

Подставляя (57) в (58), находим

$$\Omega_{22}(-b_2 - a_2 y) + \omega_{21}(0) = \frac{b_2 + a_2}{b_2} [\varphi_6(y) + \varphi_4'(y) - \tau_2''(y-1) - \nu_2'(y-1)] + \\ + [\omega_{22}(b_2(y-1)) + \omega_{21}(0)]. \quad (59)$$

Подставляя последнее равенство в (50), имеем

$$\Omega_{22}(b_2(-1-y)) + \omega_{21}(0) = \frac{2a_2^2}{b_2^2} [\varphi_6(y) + \varphi_4'(y) - \tau_2''(y-1) - \nu_2'(y-1)] + \\ + \frac{2a_2 - b_2}{b_2} [\omega_{22}(b_2(y-1)) + \omega_{21}(0)]. \quad (60)$$

А подставляя (59) и (60) в (57), находим

$$\omega_{31}(y) - \omega_{31}(0) = \frac{b_2 + a_2}{b_2} [\tau_2''(y-1) + \nu_2'(y-1) - \varphi_4'(y) - \varphi_6(y)] + \\ + [\varphi_6(y) - \varphi_2''(y) - \omega_{22}(b_2(y-1)) - \omega_{21}(0)]. \quad (61)$$

Далее, полагая в (54) $x \rightarrow 0$, после некоторых вычислений, получим первое соотношение между неизвестными функциями $\tau_4(y)$ и $\nu_4(y)$:

$$v_4(y) = \tau'_4(y) + \beta_1(y), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (62)$$

где

$$\begin{aligned} \beta_1(y) = \tau'_2(-y) - v_2(-y) + \int_0^y [\omega_{31}(\eta) - \omega_{31}(0)] d\eta - \frac{b_2}{b_2 - a_2} \int_0^y [\omega_{22}(-b_2 z) + \omega_{21}(0)] dz - \\ - \frac{a_2}{b_2 - a_2} \int_0^y [\omega_{22}(-a_2 z) + \omega_{21}(0)] dz. \end{aligned}$$

Теперь переходя в уравнениях (23) и

$$u_{3xx} - u_{3yy} = \omega_{31}(y) - \omega_{31}(0) + \omega_{22}(b_2 x - a_2 y) - \omega_{21}(0) \quad (63)$$

к пределу при $x \rightarrow 0$ в силу условий (15) и (17), находим

$$\mu_4(y) - \tau'_4(y) = \omega_{11}(y) + \bar{\omega}_{12}(-a_2 y), \quad (64)$$

$$\mu_4(y) - \tau''_4(y) = [\omega_{31}(y) - \omega_{31}(0)] + [\omega_{22}(-a_2 y) + \omega_{21}(0)], \quad (65)$$

где положено $\omega_{12}(b_2 x - a_2 y) = \begin{cases} \bar{\omega}_{12}(b_2 x - a_2 y), & -b_2 \leq b_2 x - a_2 y \leq 0, \\ \underline{\omega}_{12}(b_2 x - a_2 y), & 0 \leq b_2 x - a_2 y \leq b_2, \end{cases}$ причем $\bar{\omega}_{12}(0) = \underline{\omega}_{12}(0)$.

А переходя в уравнении (23) к пределу при $y \rightarrow 0$, находим

$$\underline{\omega}_{12}(b_2 x) + \omega_{11}(0) = \tau''_1(x) - v_1(x). \quad (66)$$

Дифференцируя уравнения (23) и (24) ($i=3$) по x и полагая в полученных уравнениях $x \rightarrow 0$ в силу условий (16), (18), получим

$$\theta_4(y) - v'_4(y) = b_2 \bar{\omega}'_{12}(-a_2 y), \quad (67)$$

$$\theta_4(y) - v''_4(y) = b_2 \omega'_{22}(-a_2 y). \quad (68)$$

Исключая из (64), (65) функцию $\mu_4(y)$, а из (67), (68) функцию $\theta_4(y)$ после некоторых выкладок, находим

$$\begin{aligned} \omega_{11}(y) + \bar{\omega}_{12}(0) = -\bar{\omega}_{12}(-a_2 y) + \bar{\omega}_{12}(0) + [\tau''_4(y) - \tau'_4(y)] + \\ + [\omega_{31}(y) - \omega_{31}(0)] + [\omega_{22}(-a_2 y) + \omega_{21}(0)], \end{aligned} \quad (69)$$

$$\bar{\omega}'_{12}(-a_2 y) = \frac{1}{b_2} [v''_4(y) - v'_4(y)] + \omega'_{22}(-a_2 y),$$

Интегрируя последнее уравнение от 0 до y и подставляя (62) в полученное равенство, находим

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_{12}(-a_2 y) - \bar{\omega}_{12}(0) = -\frac{a_2}{b_2} [\tau''_4(y) - \tau'_4(y)] - \frac{a_2}{b_2} [\beta'_1(y) - \beta_1(y)] + \\ + \frac{a_2}{b_2} [v'_1(0) - \tau'_1(0)] + [\omega_{22}(-a_2 y) - \omega_{22}(0)]. \end{aligned} \quad (70)$$

А подставляя (70) в (69), получим

$$\omega_{11}(y) + \bar{\omega}_{12}(0) = \frac{b_2 + a_2}{b_2} [\tau''_4(y) - \tau'_4(y)] + \gamma_1(y), \quad (71)$$

где

$$\gamma_1(y) = \frac{a_2}{b_2} [\beta'_1(y) - \beta_1(y)] - \frac{a_2}{b_2} [v'_1(0) - \tau'_1(0)] + [\omega_{22}(0) + \omega_{21}(0)] +$$

$$+[\omega_{31}(y) - \omega_{31}(0)] - 2[\omega_{22}(-a_2y) + \omega_{21}(0)].$$

В (70) меняя аргумент $-a_2y$ на $b_2x - a_2y$, имеем

$$\bar{\omega}_{12}(b_2x - a_2y) - \bar{\omega}_{12}(0) = -\frac{a_2}{b_2} \left[\tau_4'' \left(y - \frac{b_2}{a_2}x \right) - \tau_4' \left(y - \frac{b_2}{a_2}x \right) \right] - \gamma_2 \left(y - \frac{b_2}{a_2}x \right), \quad (72)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_2 \left(y - \frac{b_2}{a_2}x \right) = & \left[\omega_{22} \left(y - \frac{b_2}{a_2}x \right) + \omega_{21}(0) \right] - \frac{a_2}{b_2} \left[\beta_1' \left(y - \frac{b_2}{a_2}x \right) - \beta_1 \left(y - \frac{b_2}{a_2}x \right) \right] - \\ & - [\omega_{22}(0) + \omega_{21}(0)] + \frac{a_2}{b_2} [\nu_1'(0) - \tau_1'(0)]. \end{aligned}$$

Таким образом, мы нашли следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \omega_{11}(y) + \bar{\omega}_{12}(b_2x - a_2y) = & \frac{b_2 + a_2}{b_2} [\tau_4''(y) - \tau_4'(y)] - \\ & - \frac{a_2}{b_2} \left[\tau_4'' \left(y - \frac{b_2}{a_2}x \right) - \tau_4' \left(y - \frac{b_2}{a_2}x \right) \right] + \gamma_3(x, y), \quad -a_2 \leq b_2x - a_2y \leq 0, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (73) \end{aligned}$$

$$\omega_{11}(y) + \bar{\omega}_{12}(b_2x - a_2y) = \frac{b_2 + a_2}{b_2} [\tau_4''(y) - \tau_4'(y)] + \gamma_5(x, y), \quad 0 \leq b_2x - a_2y \leq b_2, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (74)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_3(x, y) = \gamma_1(y) + \gamma_2 \left(y - \frac{b_2}{a_2}x \right), \quad \gamma_4 \left(x - \frac{a_2}{b_2}y \right) = \tau_1'' \left(x - \frac{a_2}{b_2}y \right) - \nu_1 \left(x - \frac{a_2}{b_2}y \right), \\ \gamma_5(x, y) = \gamma_1(y) + \gamma_4 \left(x - \frac{a_2}{b_2}y \right) - [\omega_{11}(0) + \bar{\omega}_{12}(0)], \end{aligned}$$

а $\omega_{11}(0) + \bar{\omega}_{12}(0) = \mu_1(0) - \nu_1(0) + \gamma_3(0, 0)$ – известное число.

Теперь переходим к рассмотрению задачи в области G_4 . Переходя в уравнениях (24) ($i = 2$) и (24) ($i = 4$) к пределу при $y \rightarrow 0$ с учетом условий (12), (14) и производя замену $x \square b_2x - a_2y$, находим

$$\bar{\omega}_{42}(b_2x - a_2y) = \omega_{22}(b_2x - a_2y) + \omega_{21}(0) - \omega_{41}(0), \quad b_2 \leq b_2x - a_2y \leq 2b_2, \quad (75)$$

$$\text{здесь введено обозначение } \omega_{42}(b_2x - a_2y) = \begin{cases} \bar{\omega}_{42}(b_2x - a_2y), & b_2 - a_2 \leq b_2x - a_2y \leq b_2, \\ \bar{\omega}_{42}(b_2x - a_2y), & b_2 \leq b_2x - a_2y \leq 2b_2. \end{cases}$$

Далее, переходя в уравнениях (24) ($i = 4$) и (23) к пределу при $x \rightarrow 1$, имеем

$$\begin{aligned} \mu_5(y) - \tau_5''(y) = \omega_{41}(y) + \bar{\omega}_{42}(b_2 - a_2y), \\ \mu_5(y) - \tau_5'(y) = \omega_{11}(y) + \bar{\omega}_{12}(b_2 - a_2y). \end{aligned} \quad (76)$$

Из этих равенств находим

$$\omega_{41}(y) = -[\tau_5''(y) - \tau_5'(y)] + [\omega_{11}(y) + \bar{\omega}_{12}(b_2 - a_2y)] - \bar{\omega}_{42}(b_2 - a_2y). \quad (77)$$

Дифференцируя уравнения (24) ($i = 4$) и (23) по x и устремляя x к единице, получим

$$\theta_5(y) - v_5''(y) = b_2 \overline{\omega}'_{42}(b_2 - a_2 y),$$

$$\theta_5(y) - v_5'(y) = b_2 \overline{\omega}_{12}(b_2 - a_2 y).$$

Исключая из этих равенств функцию $\theta_5(y)$, находим

$$b_2 \overline{\omega}'_{42}(b_2 - a_2 y) = b_2 \overline{\omega}_{12}(b_2 - a_2 y) - [v_5''(y) - v_5'(y)].$$

Интегрируя это равенство от 0 до y , имеем

$$\begin{aligned} \overline{\omega}_{42}(b_2 - a_2 y) &= \overline{\omega}_{42}(b_2) + \overline{\omega}_{12}(b_2 - a_2 y) - \overline{\omega}_{12}(b_2) + \\ &+ \frac{a_2}{b_2} [v_5'(y) - v_5(y)] - \frac{a_2}{b_2} [v_3'(1) - \tau_3'(1)]. \end{aligned} \quad (78)$$

Подставляя (78) в (77), получим

$$\begin{aligned} \omega_{41}(y) &= -[\tau_5''(y) - \tau_5'(y)] + \frac{b_2 + a_2}{b_2} [\tau_4''(y) - \tau_4'(y)] + \gamma_1(y) - \\ &- \overline{\omega}_{12}(0) - \overline{\omega}_{42}(b_2) + \overline{\omega}_{12}(b_2) - \frac{a_2}{b_2} [v_5'(y) - v_5(y)] + \frac{a_2}{b_2} [v_3'(1) - \tau_3'(1)]. \end{aligned} \quad (79)$$

В (78) меняя аргумент $b_2 - a_2 y$ на $b_2 x - a_2 y$, имеем

$$\begin{aligned} \overline{\omega}_{42}(b_2 x - a_2 y) &= \overline{\omega}_{42}(b_2) + \overline{\omega}_{12}(b_2 x - a_2 y) - \overline{\omega}_{12}(b_2) + \\ &+ \frac{a_2}{b_2} \left[v_5' \left(y - \frac{b_2}{a_2} (x-1) \right) - v_5 \left(y - \frac{b_2}{a_2} (x-1) \right) \right] - \frac{a_2}{b_2} [v_3'(1) - \tau_3'(1)]. \end{aligned} \quad (80)$$

Слагая (79) и (80), а также (79) и (75), соответственно получим

$$\begin{aligned} \omega_{41}(y) + \overline{\omega}_{42}(b_2 x - a_2 y) &= -[\tau_5''(y) - \tau_5'(y)] + \frac{b_2 + a_2}{b_2} [\tau_4''(y) - \tau_4'(y)] - \frac{a_2}{b_2} [v_5'(y) - v_5(y)] + \\ &+ \frac{a_2}{b_2} \left[v_5' \left(y - \frac{b_2}{a_2} (x-1) \right) - v_5 \left(y - \frac{b_2}{a_2} (x-1) \right) \right] + \gamma_1(y) + \overline{\omega}_{12}(b_2 x - a_2 y) - \overline{\omega}_{12}(0), \end{aligned} \quad (81)$$

$$\begin{aligned} \omega_{41}(y) + \overline{\omega}_{42}(b_2 x - a_2 y) &= -[\tau_5''(y) - \tau_5'(y)] + \frac{b_2 + a_2}{b_2} [\tau_4''(y) - \tau_4'(y)] - \frac{a_2}{b_2} [v_5'(y) - v_5(y)] + \\ &+ \gamma_1(y) - \overline{\omega}_{12}(0) - \overline{\omega}_{42}(b_2) + \overline{\omega}_{12}(b_2) + \frac{a_2}{b_2} [v_3'(1) - \tau_3'(1)] + \omega_{22}(b_2 x - a_2 y) + \omega_{21}(0) - \omega_{41}(0). \end{aligned} \quad (82)$$

Теперь сначала рассмотрим следующую вспомогательную задачу:

$$\begin{cases} u_{4,xx} - u_{4,yy} = \omega_{41}(y) + \Omega_{42}(b_2 x - a_2 y), \\ u_4(x, 0) = T_3(x), u_{4,y}(x, 0) = N_3(x), 0 \leq x \leq 3, \\ u_4(1, y) = \tau_5(y), u_{4,x}(1, y) = v_5(y), u_4(2, y) = \varphi_1(y), 0 \leq y \leq 1, \end{cases}$$

где функции $T_3(x)$, $N_3(x)$, $\Omega_{42}(b_2 x - a_2 y)$ определяются следующим образом: в промежутке $1 \leq x \leq 2$ функции $T_3(x)$, $N_3(x)$ имеют вид: $T_3(x) = \tau_3(x)$, $N_3(x) = v_3(x)$, функция $\Omega_{42}(b_2 x - a_2 y)$ при $b_2 \leq b_2 x - a_2 y \leq 2b_2$ имеет вид: $\Omega_{42}(b_2 x - a_2 y) = \overline{\omega}_{42}(b_2 x - a_2 y)$, а в промежутках $0 \leq x \leq 1$ и $2 \leq x \leq 3$ функции $T_3(x)$, $N_3(x)$ и в промежутках $0 \leq b_2 x - a_2 y \leq b_2$ и $2b_2 \leq b_2 x - a_2 y \leq 3b_2$ функция $\Omega_{42}(b_2 x - a_2 y)$ пока неизвестны.

Решение этой задачи, удовлетворяющее всем условиям кроме условия $u_{4x}(1, y) = v_5(y)$, будем искать в виде

$$u_4(x, y) = u_{41}(x, y) + u_{42}(x, y) + u_{43}(x, y), \quad (83)$$

где $u_{41}(x, y)$ – решение задачи

$$\begin{cases} u_{41xx} - u_{41yy} = 0, \\ u_{41}(x, 0) = T_3(x), u_{41y}(x, 0) = 0, 0 \leq x \leq 3, \\ u_{41}(1, y) = \tau_5(y), u_{41}(2, y) = \varphi_1(y), 0 \leq y \leq 1; \end{cases} \quad (84)$$

$u_{42}(x, y)$ – решение задачи

$$\begin{cases} u_{42xx} - u_{42yy} = \omega_{41}(y), \\ u_{42}(x, 0) = 0, u_{42y}(x, 0) = N_2(x), 0 \leq x \leq 3, \\ u_{42}(1, y) = 0, u_{42}(2, y) = 0, 0 \leq y \leq 1; \end{cases} \quad (85)$$

$u_{43}(x, y)$ – решение задачи

$$\begin{cases} u_{43xx} - u_{43yy} = \Omega_{42}(b_2x - a_2y), \\ u_{43}(x, 0) = 0, u_{43y}(x, 0) = 0, 0 \leq x \leq 3, \\ u_{43}(1, y) = 0, u_{43}(2, y) = 0, 0 \leq y \leq 1. \end{cases} \quad (86)$$

Методом продолжения находим решения задач (84)-(86). Они имеют вид

$$u_{41}(x, y) = \frac{1}{2} [T_3(x+y) + T_3(x-y)], \quad (87)$$

$$u_{42}(x, y) = \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} N_3(t) dt - \int_0^y (y-\eta) \omega_{41}(\eta) d\eta, \quad (88)$$

$$u_{43}(x, y) = -\frac{1}{2} \int_0^y d\eta \int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta} \Omega_{42}(b_2\xi - a_2\eta) d\xi, \quad (89)$$

где

$$T_3(x) = \begin{cases} 2\tau_5(1-x) - \tau_3(2-x), & 0 \leq x \leq 1, \\ \tau_3(x), & 1 \leq x \leq 2, \\ 2\varphi_1(x-2) - \tau_3(4-x), & 2 \leq x \leq 3, \end{cases}$$

$$N_3(x) = \begin{cases} 2 \int_0^{1-x} \omega_{41}(\eta) d\eta - v_3(2-x), & 0 \leq x \leq 1, \\ v_3(x), & 1 \leq x \leq 2, \\ 2 \int_0^{x-2} \omega_{41}(\eta) d\eta - v_3(4-x), & 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

А функция $\Omega_{42}(b_2x - a_2y)$ определяется следующим образом. Первые два условия задачи (86) для функции (89) выполняются автоматически. Удовлетворяя третье условие, получим

$$\int_0^y \Omega_{42}(b_2(1-y) + (b_2 - a_2)\eta) d\eta + \int_0^y \Omega_{42}(b_2(1+y) - (b_2 + a_2)\eta) d\eta = 0. \quad (90)$$

Производя замену переменных в интегралах (90) и дифференцируя полученное равенство, после некоторых преобразований в силу (78), находим

$$\Omega_{42}(b_2(1-y)) = \frac{2a_2^2}{b_2(b_2+a_2)} \bar{\omega}_{42}(b_2-a_2y) - \frac{b_2-a_2}{b_2+a_2} \omega_{42}(b_2(1+y)). \quad (91)$$

Подставляя (78) в (91), имеем

$$\begin{aligned} \Omega_{42}(b_2(1-y)) &= \frac{2a_2^2}{b_2(b_2+a_2)} \bar{\omega}_{42}(b_2) + \frac{2a_2^2}{b_2(b_2+a_2)} \left[\bar{\omega}_{12}(b_2-a_2y) - \bar{\omega}_{12}(b_2) \right] + \\ &+ \frac{2a_2^3}{b_2^2(b_2+a_2)} \left[v_5'(y) - v_5(y) \right] - \frac{2a_2^3}{b_2^2(b_2+a_2)} \left[v_3'(1) - \tau_3'(1) \right] - \frac{b_2-a_2}{b_2+a_2} \omega_{42}(b_2(1+y)). \end{aligned} \quad (92)$$

Далее, удовлетворяя четвертое условие задачи (86), после некоторых преобразований, находим

$$\Omega_{42}(b_2(2+y)) = \frac{2a_2^2}{b_2(b_2-a_2)} \omega_{42}(2b_2-a_2y) - \frac{b_2+a_2}{b_2-a_2} \omega_{42}(b_2(2-y)). \quad (93)$$

Подставляя (87), (88), (89) в (83), получим

$$\begin{aligned} u_4(x, y) &= \frac{1}{2} \left[T_3(x+y) + T_3(x-y) \right] + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} N_3(t) dt - \\ &- \int_0^y (y-\eta) \omega_{41}(\eta) d\eta - \frac{1}{2} \int_0^y d\eta \int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta} \Omega_{42}(b_2\xi - a_2\eta) d\xi. \end{aligned} \quad (94)$$

Дифференцируя (94) по x , имеем

$$\begin{aligned} u_{4x}(x, y) &= \frac{1}{2} \left[T_3'(x+y) + T_3'(x-y) \right] + \frac{1}{2} \left[N_3(x+y) - N_3(x-y) \right] - \\ &- \frac{1}{2} \int_0^y \Omega_{42}(b_2(x+y) - (b_2+a_2)\eta) d\eta + \frac{1}{2} \int_0^y \Omega_{42}(b_2(x-y) + (b_2-a_2)\eta) d\eta, \end{aligned} \quad (95)$$

Полагая в (95) $x=1$ в силу условия $u_{4x}(1, y) = v_5(y)$, после некоторых вычислений и преобразований, имеем

$$\begin{aligned} \frac{b_2}{b_2+a_2} v_5(y) + \frac{a_2}{b_2+a_2} \int_0^y v_5(\eta) d\eta &= -\tau_5(y) - \frac{b_2+a_2}{b_2} \left[\tau_4'(y) - \tau_4(y) \right] + \tau_3'(1+y) + \\ &+ v_3(1+y) - \left[v_3(1) - \tau_3(1) \right] + \frac{b_2+a_2}{b_2} \left[v_1(0) - \tau_1(0) \right] - \int_0^y \gamma_1(\eta) d\eta + \\ &+ \left[\bar{\omega}_{12}(0) - \bar{\omega}_{12}(b_2) + \bar{\omega}_{42}(b_2) \right] y - \frac{a_2}{b_2} \tau_3'(1) - \frac{a_2}{b_2} \left[v_3'(1) - \tau_3'(1) \right] y - \\ &- \frac{b_2}{b_2+a_2} \int_0^y \omega_{42}(b_2(1+\eta)) d\eta - \frac{a_2}{b_2+a_2} \left[\bar{\omega}_{42}(b_2) - \bar{\omega}_{12}(b_2) \right] y - \frac{a_2}{b_2+a_2} \int_0^y \bar{\omega}_{12}(b_2-a_2\eta) d\eta - \\ &+ \frac{a_2^2}{b_2(b_2+a_2)} \tau_3'(1) + \frac{a_2^2}{b_2(b_2+a_2)} \left[v_3'(1) - \tau_3'(1) \right] y. \end{aligned}$$

Дифференцируя последнее соотношение, после некоторых вычислений и преобразований, приходим к дифференциальному уравнению относительно $v_5(y)$:

$$v_5'(y) + \frac{a_2}{b_2} v_5(y) = -\frac{b_2 + a_2}{b_2} \tau_5'(y) - \left(\frac{b_2 + a_2}{b_2} \right)^2 [\tau_4''(y) - \tau_4'(y)] + \gamma_6(y), \quad (96)$$

где

$$\gamma_6(y) = \frac{b_2 + a_2}{b_2} \left\{ \tau_3''(1+y) + v_3'(1+y) - \gamma_1(y) + \bar{\omega}_{12}(0) - \frac{b_2}{b_2 + a_2} \omega_{42}(b_2(1+y)) - \right. \\ \left. - \frac{a_2}{b_2 + a_2} \bar{\omega}_{12}(b_2 - a_2 y) + \frac{b_2}{b_2 + a_2} [\bar{\omega}_{42}(b_2) - \bar{\omega}_{12}(b_2)] - \frac{a_2}{b_2 + a_2} [v_3'(1) - \tau_3'(1)] \right\}.$$

Решая уравнение (96) при условии $v_5(0) = \tau_3'(1)$, находим

$$v_5(y) = \int_0^y H_1(y, \eta) \tau_5'(\eta) d\eta + \int_0^y H_2(y, \eta) \tau_4''(\eta) d\eta + \gamma_7(y), \quad (97)$$

где

$$H_1(y, \eta) = -\frac{b_2 + a_2}{b_2} e^{\frac{a_2}{b_2}(\eta-y)}, \quad H_2(y, \eta) = \left(\frac{b_2 + a_2}{b_2} \right)^2 e^{\frac{a_2}{b_2}(\eta-y)} + \left(\frac{b_2 + a_2}{b_2} \right)^2 \frac{b_2}{a_2} \left[1 - e^{\frac{a_2}{b_2}(\eta-y)} \right], \\ \gamma_7(y) = \left(\frac{b_2 + a_2}{b_2} \right)^2 \frac{b_2}{a_2} \left(1 - e^{-\frac{a_2}{b_2}y} \right) + \int_0^y e^{\frac{a_2}{b_2}(\eta-y)} \gamma_6(\eta) d\eta + \tau_3'(1) e^{-\frac{a_2}{b_2}y}.$$

Теперь переходим в область G_1 . Записывая решение уравнения (23), удовлетворяющего условиям (12), (15), (19), в силу (66), (69) и (72), после длинных преобразований, имеем

$$u_1(x, y) = \int_0^y \tau_4(\eta) G_\xi(x, y; 0, \eta) d\eta - \int_0^y \tau_5(\eta) G_\xi(x, y; 1, \eta) d\eta + \int_0^1 \tau_1(\xi) G(x, y; \xi, 0) d\xi - \\ - \frac{b_2 + a_2}{b_2} \int_0^y \tau_4''(\eta) d\eta \int_0^1 G(x, y; \xi, \eta) d\xi + \int_0^y \tau_4'(\eta) d\eta \int_0^1 G(x, y; \xi, \eta) d\xi + \\ + \frac{a_2}{b_2} \int_0^y d\eta \int_0^\eta \tau_4''(z) dz \int_0^1 G(x, y; \xi, \eta) d\xi + \frac{a_2}{b_2} v_1(0) \int_0^y d\eta \int_0^1 G(x, y; \xi, \eta) d\xi - \\ - \int_0^y \gamma_1(\eta) d\eta \int_0^1 G(x, y; \xi, \eta) d\xi + \frac{a_2^2}{b_2^2} \int_0^y \tau_4''(\eta) d\eta \int_\eta^y G\left(x, y; \frac{a_2}{b_2}(z-\eta), z\right) dz - \\ - \frac{a_2^2}{b_2^2} \int_0^y \tau_4''(\eta) d\eta \int_\eta^y dz \int_z^y G\left(x, y; \frac{a_2}{b_2}(t-z), t\right) dt - \frac{a_2^2}{b_2^2} v_1(0) \int_0^y dz \int_z^y G\left(x, y; \frac{a_2}{b_2}(t-z), t\right) dt - \\ - \frac{a_2}{b_2} \int_0^y \gamma_2(\eta) d\eta \int_\eta^y G\left(x, y; \frac{a_2}{b_2}(z-\eta), z\right) dz - \\ - \int_0^y d\eta \int_{\frac{a_2}{b_2}\eta}^1 \left[\tau_1''\left(\xi - \frac{a_2}{b_2}\eta\right) - \tau_1''(0) - v_1\left(\xi - \frac{a_2}{b_2}\eta\right) + v_1(0) \right] G(x, y; \xi, \eta) d\xi. \quad (98)$$

Дифференцируя (98) по x , затем устремляя x к нулю и к единице, с учетом равенств (62) и (97) после длинных вычислений, получим систему интегральных уравнений типа Абеля относительно $\tau_4''(y)$ и $\tau_5'(y)$:

$$\int_0^y P_1(y, \eta) \tau_4''(\eta) d\eta + \int_0^y P_2(y, \eta) \tau_5'(\eta) d\eta = h_1(y), \quad 0 \leq y \leq 1,$$

$$\int_0^y P_3(y, \eta) \tau_5'(\eta) d\eta + \int_0^y P_4(y, \eta) \tau_4''(\eta) d\eta = h_2(y), \quad 0 \leq y \leq 1,$$

где $P_1(y, \eta)$, $P_3(y, \eta)$, $P_4(y, \eta)$ – известные функции и имеют слабую особенность (1/2), а $P_2(y, \eta)$, $h_1(y)$, $h_2(y)$ – известные непрерывные функции.

Применяя обращение Абеля к этим уравнениям, получим систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода относительно $\tau_4''(y)$ и $\tau_5'(y)$:

$$\tau_4''(y) + \int_0^y K_1(y, \eta) \tau_4''(\eta) d\eta + \int_0^y K_2(y, \eta) \tau_5'(\eta) d\eta = g_1(y), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (90)$$

$$\tau_5'(y) + \int_0^y K_3(y, \eta) \tau_5'(\eta) d\eta + \int_0^y K_4(y, \eta) \tau_4''(\eta) d\eta = g_2(y), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (91)$$

где $K_1(y, \eta)$, $K_2(y, \eta)$, $K_3(y, \eta)$, $K_4(y, \eta)$, $g_1(y)$, $g_2(y)$ – известные функции, причем $K_1(y, \eta)$, $K_3(y, \eta)$, $K_4(y, \eta)$ имеют слабую особенность (1/2), $K_2(y, \eta)$, $g_1(y)$, $g_2(y)$ – непрерывные функции, а

$$\left. \begin{aligned} G(x, y; \xi, \eta) \\ N(x, y; \xi, \eta) \end{aligned} \right\} = \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \exp \left[-\frac{(x-\xi-2n)^2}{4(y-\eta)} \right] \mp \exp \left[-\frac{(x+\xi-2n)^2}{4(y-\eta)} \right] \right\} -$$

функции Грина первой и второй краевых задач для уравнения (22).

Решая систему (90), (91), находим функции $\tau_4''(y)$ и $\tau_5'(y)$, тем самым и функции $\tau_4(y)$, $\tau_5(y)$, $\nu_4(y)$, $\nu_5(y)$, $\omega_{11}(y) + \bar{\omega}_{12}(b_2x - a_2y)$, $\omega_{11}(y) + \bar{\omega}_{12}(b_2x - a_2y)$, $T_2(x)$, $T_3(x)$, $\Omega_{42}(b_2(1-y))$, $\omega_{41}(y) + \bar{\omega}_{42}(b_2x - a_2y)$, $\omega_{41}(y) + \bar{\omega}_{42}(b_2x - a_2y)$. Тогда будут известными и функции $u_3(x, y)$, $u_4(x, y)$ и $u_1(x, y)$. Итак, мы нашли решение поставленной задачи 1 единственным образом.

Литература

1. Джураев Т.Д., Мамажанов М. Краевые задачи для одного класса уравнений четвертого порядка смешанного типа. Дифференц. уравнения, 1986, т.22, №1, с.25-31.
2. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. Ташкент, Фан, 1986, 220 с.
3. Мамажанов М., Шерматова Х.М. О некоторых краевых задачах для одного класса уравнений третьего порядка параболо-гиперболического типа в треугольной области с тремя линиями изменения типа. Наманган Давлат университети илмий ахборотномаси. Наманган, 2022 й., 2-сон, 41-51 б.
4. Mamatjonov M., Shermatova X.M. On a boundary value problem for a third-order equation of the parabolic-hyperbolic type in a triangular domain with three type change lines. ISSN 1990-4789, Journal of applied and industrial mathematics. 2022, vol. 16, no. 3, pp. 481-489.

5. Мамажанов М., Шерматова Х.М. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка парабола-гиперболического типа в треугольной области с тремя линиями изменения типа уравнения. Сибирский журнал индустриальной математики, 2022, 25(3), с. 93-103.

6. Mamajonov M., Shermatova Kh.M., Mukhtorova T. On a boundary value problem for a parabolic-hyperbolic equation of the third-order, when the characteristic of the first order operator is parallel to the y-ordinate axis. International journal of social science and interdisciplinary research. 2022, ISSN, 2277-3630 Impact factor: 7.429, 11, pp. 105-110.

1. Mamajonov M., Shermatova H.M. Statement and study of a boundary value problem for a third-order equation of parabolic-hyperbolic type in a mixed pentagonal domain, when the slope of the characteristic of the operator the first order is greater than one. International journal of research in commerce., IT, engineering and social sciences. ISSN: 2349-7793 Impact Factor: 6.876., Volume: 16 Issue: 05 in May 2022. pp. 117-130.

2. Mamajonov M., Suleymanov M.M., Vokhobov F.F., Gafurova M.A. Formulation and study of one boundary value problem for a third-order equation of a parabolic-hyperbolic type of the form

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} + c \right) (Lu) = 0$$

in a concave hexagonal area with two lines of type change. International Journal of Early Childhood Special Education (INT-JECS) DOI: 10.48047/INTJECSE/V14I7.276 ISSN: 1308-5581 Vol 14, Issue 07 2022, pp. 1980-1990.

3. Mamajonov M., Yu.Kharimova. On one boundary problem for one parabolic-hyperbolic equation of the third order in a quadrangular domain with two lines type changes. Galaxy international interdisciplinary research journal (GIIRJ) ISSN (E): 2347-6915, Vol. 10, Issue 12, Dec. (2022), pp. 68-77.

4. Mamajonov M., Aroev D.D., Shermatova G. Statement and investigation of one boundary problem for one parabolic-hyperbolic equation of the third order in a pentagonal domain with three lines of type change. Galaxy international interdisciplinary research journal (GIIRJ) ISSN (E): 2347-6915, Vol. 10, Issue 12, Dec. (2022), pp. 332-342.

5. Mamajonov M., Turdiboeva M.M. On one boundary problem for a parabolic-hyperbolic equation of the third order, when characteristics of the first order operator parallel to the X-axis. Galaxy international interdisciplinary research journal (GIIRJ), ISSN (E): 2347-6915, Vol. 10, Issue 12, Dec. (2022), pp. 343-349.

6. Мамажанов М. О некоторых краевых задачах для одного класса уравнений третьего порядка парабола-гиперболического типа в треугольной области с тремя линиями изменения типа. Сборник международной научной конференции «Актуальные проблемы математики и образования», Ош ГУ, г. Ош., 12-13 мая, 2023 г., с. 120-132.

7. Mamazhonov M., Mamazhonov S.M., Mamadalieva Kh. B. Some boundary value problems for a third-order parabolic-hyperbolic equation in a pentagonal domain. Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences. 2016, 13 (2), pp. 31-38.

8. Apakov, Y.P., Mamajonov, S.M. Boundary-Value Problem for the Fourth-Order Equation with Multiple Characteristics in a Rectangular Domain // Journal of Mathematical Sciences. 2023, 272(2), p. 185-201. <https://doi.org/10.1007/s10958-023-06409-x>

9. Apakov, Y.P., Mamazhonov, S.M. Boundary Value Problem for an Inhomogeneous Fourth-Order Equation with Lower-Order Terms // Differential Equations. 2023, 59(2), p. 188-198. <https://doi.org/10.1134/S0012266123020040>

10. Apakov, Y.P., Mamajonov, S.M. Boundary value problem for a inhomogeneous fourth order equation with constant coefficients // Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2023, 8(2), p. 157-172. <https://doi.org/10.47475/2500-0101-2023-18201>

11. Apakov, Y.P., & Mamajonov, S.M. (2022). Boundary Value Problem for a Fourth-Order Equation of the Parabolic-Hyperbolic Type with Multiple Characteristics with Slopes Greater Than One. Russian Mathematics, 66(4), 1-11. <https://doi.org/10.3103/S1066369X22040016>

12. Apakov, Y.P., & Mamajonov, S.M. (2021). Solvability of a Boundary Value Problem for a Fourth Order Equation of Parabolic-Hyperbolic Type in a Pentagonal Domain. Journal of Applied and Industrial Mathematics, 15(4), 586-596. <https://doi.org/10.1134/S1990478921040025>

13. Apakov, Y.P., & Mamajonov, S.M. (2024). Boundary Value Problem for Fourth Order Inhomogeneous Equation with Variable Coefficients. Journal of Mathematical Sciences (United States), 284(2), 153-165. <https://doi.org/10.1007/s10958-024-07340-5>