УДК 517.9

DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_2(5)_13

ЖОГОРКУ ТАРТИПТЕГИ АЙРЫМ ТУУНДУЛУУ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕНДЕМЕЛЕРДИН БАШТАПКЫ МАСЕЛЕСИНИН ЧЫГАРЫМДУУЛУГУ ЖАНА ЧЫГАРЫЛЫШЫНЫН СТРУКТУРАСЫ

Кыдыралиев Төрөгелди Раимжанович, ф.-м.и.к., доцент
torogeldi1@mail.ru
Кыргыз Республикасынын Эл аралык университети
Бишкек, Кыргызстан
Чамашев Марат Какарович, ф.-м.и.к., доцент
marat2771@mail.ru
Ош мамлекеттик университети
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *Сызыктуу эмес айрым туундулуу интегро-дифференциалдык теңдеменин баштапкы маселесини чыгарымдуулугунун актуалдуулугу мурдагыдай эле көйгөйлүүлүгүн жогото элек. Чыгарылыштарды өзгөртүп түзүү- изнилдөө ыкмалардын бири болуп саналат. Бул ыкманын жардамында сызыктуу эмес Вольтерра интегралдык теңдемесине, баштапкы маселе өзгөртүп түзүлөт жана ал алгачкы маселеге эквиваленттүү болот. Алынган теңдемеге топологиялык ыкма колдонулат. Төртүнчү тартиптеги жекече туундулуу интегро-дифференциалдык тендемелер үчүн Коши маселесинин чыгарылышы изилденген жана чыгарылышы интегралдык көрүнүштө табылган. Алгачкы маселени изилдөө үчүн атайын нормалдуу мейкиндик тандалып алынган. Интеграл белгиси астындагы параметр боюнча дифференцирлөө, интегралдын предели параметрден көз каранды болгону учур үчүн да колдонулган. Сызыктуу эмес экинчи түрдөгү Вольтерра интегралдык теңдемеси жалгыз чыгарылышка ээ болгон шарт аныкталып, интегралдык көрүнүшүндө алынган.*

Ачкыч сөздөр: *интегро-дифференциалдык тендеме, Коши маселеси, кысып чагылтуу, жекече туунду, интегралдык көрүнүш.*

РАЗРЕШИМОСТИ И СТРУКТУРА РЕШЕНИЙ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Кыдыралиев Торогелди Раимжанович, к.ф.-м.н., доцент
torogeldi1@mail.ru
Международный университет Кыргызской Республики
Бишкек, Кыргызстан
Чамашев Марат Какарович, к.ф.-м.н., доцент
marat2771@mail.ru
Ошский государственный университет
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *Актуальность вывода исходной задачи нелинейного Интегро-дифференциального уравнения в частных производных по- прежнему не утратила своей актуальности. Преобразования является одним из методов исследования. С помощью этого метода преобразуется в нелинейное интегральное уравнение Вольтерра, исходную задачу, которая эквивалентна исходной задаче. Топологический метод применяется к полученному уравнению. Для интегро-дифференциальных уравнений с частными производными четвертого порядка было исследовано решение задачи Коши, и решение было* *найдено в интегральном форма. Для изучения первичного вопроса было выбрано специальное нормальное пространство. Дифференцирование по параметру под знаком интеграла также применялось в случае, когда предел интеграла зависел от параметра. Было определено условие, при котором интегральное уравнение Вольтерра второго рода нелинейно имеет единственное решение и получено в интегральной форме.*

Ключевые слова: *интегро-дифференциальное уравнения, задача Коши, сжимающее отображение, частная производная, интегральная форма.*

SOLVABILITY AND STRUCTURE OF SOLUTIONS TO THE INITIAL PROBLEM OF HIGH-ORDER INTEGRO-DIFFERENTIAL PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Kydyraliev Torogeldi Raimzhanovich, Candidate of Ph. and Math.Sc., Docent
torogeldi1@mail.ru
International University of the Kyrgyz Republic
Bishkek, Kyrgyzstan
Chamashev Marat Kakarovich? Candidate of Ph. and Math.Sc., Docent
marat2771@mail.ru
Osh State University
Osh, Kyrgyzstan

Abstract. *The relevance of the derivation of the initial problem of a nonlinear Integro-differential partial differential equation has not lost its relevance. Transformation is one of the research methods. Using this method, it is transformed into the nonlinear Volterra integral equation, the original problem, which is equivalent to the original problem. The topological method is applied to the resulting equation. For integro-differential equations with partial derivatives of the fourth order, the solution of the Cauchy problem was investigated, and the solution was found in the integral representation.*

A special normal space was chosen to study the primary issue. Differentiation by parameter under the sign of the integral was also applied in the case when the limit of the integral depended on the parameter. The condition was determined under which the Volterra integral equation of the second kind has a unique nonlinear solution and is obtained in integral form.

Keywords: *integro-differential equations, Cauchy problem, contraction mapping, partial derivative, integral form.*

Киришүү. Төртүнчү тартиптеги айрым туундулуу интегро-дифференциалдык тендемелер үчүн Коши маселесинин чыгарымдуулугу изилденген жана изделүүчү чыгарылыштын интегралдык көрүнүшү табылган.

Маселенинкоюлушу. Төртүнчү тартиптеги айрым туундулуу интегро-дифференциалдык тендемелер үчүн Коши маселесин карайлы

$$\begin{aligned}&u_{ttxy}(t,x,y)+2\alpha u_{txy}(t,x,y)+\gamma u_{ttx}(t,x,y)+\beta u_{tty}(t,x,y)+2\alpha\beta\, u_{ty}(t,x,y)+\\&+\alpha^2 u_{xy}(t,x,y)+\alpha^2\beta u_y(t,x,y)+2\gamma\alpha u_{tx}(t,x,y)+\gamma\beta u_{tt}(t,x,y)+\\&+2\alpha\beta\gamma u_t(t,x,y)+\alpha^2\gamma u_x(t,x,y)+\alpha^2\beta\gamma u(t,x,y)=f(t,x,y,u(t,x,y))+\int_0^t K(t,s,x,y,u(s,x,y))ds,\end{aligned} \tag{1}$$

$$u(0,x,y)=\varphi(x,y), \tag{2}$$

$$u_t(0,x,y)=\psi(x,y), \tag{3}$$

мында $\alpha,\beta,\gamma\in R_+\equiv(0,+\infty)$.

(1)-(3) маселесинин чыгарылышын төмөндөгү түрдө табабыз

$$u(t,x,y)=c(t,x,y)+$$
$$+\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}(1-\sin(t-s))Q(s,\mu,\nu)\,d\nu\,d\mu\,ds, \qquad (4)$$

мында $c(t,x,y)$ - белгилүү функция

$c(0,x,y)=\varphi(x,y), c_t(0,x,y)=\psi(x,y)$ барабардыктары аткарылуучу. $Q(t,x,y)$ - жаңы изделүүчү функция.

(Т) шарт.

$f(t,x,y,u)\in\bar{C}([0,T]\times R\times R\times R)\cap Lip\left(L|_u\right),$

$K(t,s,\mathrm{x},\mathrm{y},u)\in\bar{C}((0\le s\le t\le T)\times R\times R\times R)\cap Lip\left(L_1|_u\right)$ жана

$\dfrac{(L+L_1T_0)}{\alpha\beta\gamma}<1,\ T_0\le T$ болсун.

$$H(t,x,y)=c_{ttxy}(t,x,y)+2\alpha c_{txy}(t,x,y)+\beta c_{tty}(t,x,y)+2\alpha\beta\, c_{ty}(t,x,y)\ +$$
$$+\ \alpha^2c_{xy}(t,x,y)+\alpha^2\beta c_y(t,x,y)+\gamma c_{ttx}(t,x,y)+2\gamma\alpha c_{tx}(t,x,y)+\gamma\beta c_{tt}(t,x,y)+$$
$$+2\alpha\beta\gamma c_t(t,x,y)\ +\alpha^2\,c_x\gamma(t,x,y)+\alpha^2\beta\gamma c(t,x,y).$$

Тандап алуунун негизинде $c(t,x,y)$ти

$\max\limits_{[0,T]\times R\times R}\left\|H(t,x,y)\right\|<+\infty.$ деп эсептөөгө болот

(4)тү (1)ге коебуз. (4)түн t боюнча туундусу:

$$u_t(t,x,y)=c_t(t,x,y)+\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(s,\mu,\nu)\,d\nu\,d\mu\,ds-$$
$$-\alpha\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y(1-\sin(t-s))e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(s,\mu,\nu)\,d\nu\,d\mu\,ds \text{ болот.}$$

Мындан (4)дөн

$$u_t(t,x,y)+\alpha u(t,x,y)=\alpha c(t,x,y)+c_t(t,x,y)+$$
$$+\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(s,\mu,\nu)\,d\nu\,d\mu\,ds. \qquad \text{алабыз} \qquad (5).$$

(5)тин эки жагынын тең t боюнча туундусу төмөндөгүнү берет :

$$u_{tt}(t,x,y)+\alpha u_t(t,x,y)=\alpha c_t(t,x,y)+c_{tt}(t,x,y)+$$
$$+\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(t,\mu,\nu)\,d\nu\,d\mu- \qquad (6)$$
$$-\alpha\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(s,\mu,\nu)\,d\nu\,d\mu\,ds.$$

(6)дан, (5)ни эске алуу менен төмөндөгүнү алабыз

$$u_{tt}(t,x,y)+2\alpha u_t(t,x,y)+\alpha^2u(t,x,y)=c_{tt}(t,x,y)+2\alpha c_t(t,x,y)+\alpha^2c(t,x,y)+$$
$$+\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(t,\mu,\nu)\,d\nu\,d\mu. \qquad (7)$$

(7)нин эки бөлүгүнүн тең x боюнча туундусу төмөндөгүнү берет:

$$u_{ttx}(t,x,y)+2\alpha u_{tx}(t,x,y)+\alpha^2 u_x(t,x,y)=c_{ttx}(t,x,y)+2\alpha c_{tx}(t,x,y)+\alpha^2 c_x(t,x,y)+$$
$$+\int_{-\infty}^{y} e^{-\gamma(y-\nu)}Q(t,x,\nu)d\nu-\beta\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} e^{-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(t,\mu,\nu)d\nu d\mu.$$

Мындан (7)ни колдонуу менен төмөндөгүнү алабыз:

$$u_{ttx}(t,x,y)+2\alpha u_{tx}(t,x,y)+\alpha^2 u_x(t,x,y)=c_{ttx}(t,x,y)+2\alpha c_{tx}(t,x,y)+\alpha^2 c_x(t,x,y)+$$
$$+\int_{-\infty}^{y} e^{-\gamma(y-\nu)}Q(t,x,\nu)d\nu-\beta[u_{tt}(t,x,y)+2\alpha u_t(t,x,y)+\alpha^2 u(t,x,y)-$$
$$-c_{tt}(t,x,y)-2\alpha c_t(t,x,y)-\alpha^2 c(t,x,y)],$$

же

$$u_{ttx}(t,x,y)+2\alpha u_{tx}(t,x,y)+\beta u_{tt}(t,x,y)+2\alpha\beta u_t(t,x,y)+\alpha^2 u_x(t,x,y)+\alpha^2\beta u(t,x,y)=$$
$$c_{ttx}(t,x,y)+2\alpha c_{tx}(t,x,y)+\alpha^2 c_x(t,x,y)+\beta c_{tt}(t,x,y)+ \quad (8)$$
$$+2\alpha\beta c_t(t,x,y)+\alpha^2\beta c(t,x,y)+\int_{-\infty}^{y} e^{-\gamma(y-\nu)}Q(t,x,\nu)d\nu.$$

(8)ди y боюнча дифференцирлейбиз:

$$u_{ttxy}(t,x,y)+2\alpha u_{txy}(t,x,y)+\beta u_{tty}(t,x,y)+2\alpha\beta u_{ty}(t,x,y)+\alpha^2 u_{xy}(t,x,y)+$$
$$+\alpha^2\beta u_y(t,x,y)=c_{ttxy}(t,x,y)+2\alpha c_{txy}(t,x,y)+\alpha^2 c_{xy}(t,x,y)+\beta c_{tty}(t,x,y)+ \quad (9)$$
$$+2\alpha\beta c_{ty}(t,x,y)+\alpha^2\beta c_y(t,x,y)+Q(t,x,y)-\gamma\int_{-\infty}^{y} e^{-\gamma(y-\nu)}Q(t,x,\nu)d\nu.$$

(8)ди γ ге көбөйтүп, (9) менен мүчөлөп топтоштуруп төмөндөгүнү алабыз

$$u_{ttxy}(t,x,y)+2\alpha u_{txy}(t,x,y)+\beta u_{tty}(t,x,y)+2\alpha\beta u_{ty}(t,x,y)+$$
$$+\alpha^2 u_{xy}(t,x,y)+\alpha^2\beta u_y(t,x,y)+\gamma u_{ttx}(t,x,y)+2\gamma\alpha u_{tx}(t,x,y)+\gamma\beta u_{tt}(t,x,y)+ \quad (11)$$
$$+2\alpha\beta\gamma u_t(t,x,y)+\alpha^2\gamma u_x(t,x,y)+\alpha^2\beta\gamma u(t,x,y)=H(t,x,y)+Q(t,x,\nu).$$

(11)ден , (1) теңдеменин негизинде, (4)деги $Q(t,x,y)$ белгисиз функциясын аныктоо үчүн сызыктуу эмес интегралдык теңдемени алабыз

$$Q(t,x,y)=f\left[t,x,y,c(t,x,y)\right.$$
$$\left.+\int_0^t\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}(1-sin(t-s))e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(s,\mu,\nu)d\nu\, d\mu\, ds\right]+$$

$$+\int_0^t K(t,s,x,y,c(s,x,y)+$$
$$\int_0^s\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y (1-sin(t-\tau))e^{-\alpha(t-\tau)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(s,\mu,\nu)d\nu\, d\mu\, d\tau)ds - H(t,x,y) \equiv$$
PQ,12)

(12)теңдемесине кысып чагылтуу принцибин колдонобуз.

Мейли

$$Q=\left\{Q(t,x,y): Q(t,x,y)\in C\left(\left[0,T_0\right]\times R\times R\right)\cap\left\|Q(t,x,y)\right\|\le h\right\}.$$

Анда (11) теңдемесинен $\|PQ\| \le M + N + KT_0$ барабарсыздыгы келип чыгат, мында $M \equiv \max f(t,x,y,u),\ N \equiv \max\left\|H(t,x,y)\right\|, \mathrm{K} \equiv \max \mathrm{K}(t,\mathrm{s},x,y,u)$.

Эгерде T_0 жана h ды,

$$M + N + KT_0 \le h \quad (13)$$

тандасак, анда PQ оператору $PQ : Q \to Q$ болот.

Эми PQ оператору кысуу оператору экендигин далилдейбиз. (11)ден (T) шартын пайдаланып төмөндөгүнү алабыз

$$\|PQ_1 - PQ_2\| \le (L + L_1 t)\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y (1-sin(t-s))e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}d\nu\, d\mu\, ds$$
$$\times\|Q_1 - Q_2\| \le$$
$$\le\frac{(L+L_1T_0)}{\alpha\beta\gamma}\left\|Q_1-Q_2\right\|. \quad (14)$$

Жогорудагы келтирилген баалоодо төмөндөгү барабарсыздыктар колдонулган.

$$\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}d\nu d\mu ds \le \int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\left[\int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-\mu)}\left(\int_{-\infty}^y e^{-\gamma(y-\nu)}d\nu\right)d\mu\right]ds \le$$
$$\le\int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\left[\int_{-\infty}^x e^{-\beta(x-\mu)}\left(\frac{1}{\gamma}e^{-\gamma y}\cdot e^{\gamma\nu}\Big|_{\nu=-\infty}^{y}\right)d\mu\right]ds\le\frac{1}{\alpha\beta\gamma}.$$

$\alpha,\beta,\gamma\in R_+ u T_0$ турактууларын $\frac{(L+L_1T_0)}{\alpha\beta\gamma}<1$ барабарсыздыгы орун ала тургандай тандайбыз. Анда (T) шарттын негизинде (14)төн PQ оператору Q көптүгүндө кысып чагылтуу оператору экендиги келип чыгат. (12) сызыктуу эмес интегралдык теңдемелер системасы кысып чагылтуу принциби боюнча жалгыз үзгүлтүксүз чыгарылышка ээ болоору келип чыгат. Табылган функцияны (4)ге коюп, (1)-(3) Коши маселесинин чыгарылышын алабыз.

Эми (1)-(3) Коши маселесинин чыгарылышынын дифференциалдык касиетин изилдейбиз. Бардык $Q(t,x,y)\in Q$ үчүн (4) барабардыгынан алынган, төмөндөгү барабарсыздык келип чыгат

$$\|u(t,x,y)\| \leq \|c(t,x,y)\|$$

$$+\left\| \int_0^t \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y (1-sin(t-s))e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(s,\mu,\nu)d\nu\, d\mu\, ds \right\| \leq$$

$$\leq C_0+\frac{T_0 h}{\alpha\beta\gamma}=M_0=const\,.$$

(5)тен төмөндөгү келип чыгат:

$$\left\|u_t(t,x,y)+\alpha u(t,x,y)\right\| \leq \left\|\alpha c(t,x,y)+c_t(t,x,y)\right\|+$$

$$+\left\|\int_0^t\int_{-\infty}^x\int_{-\infty}^y e^{-\alpha(t-s)-\beta(x-\mu)-\gamma(y-\nu)}Q(s,\mu,\nu)d\nu d\mu ds\right\| \leq C_1+\frac{h}{\alpha\beta\gamma}=M_1=const\,.$$

Аналогиялык жол менен (7)- (9)дагы (1) теңдемеге кирген баардык туундуларды бир калыпта чектелгенин далилдөөгө болот.

Ошондой эле төмөндөгү орун алат

Теорема. Мейли (T) шарты аткарылсын. Анда (1)-(3) Коши маселеси (4)-көрүнүштө жазууга мүмкүн болгон чыгарылышка ээ болот $u(t,x,y)\in \bar{C}^{(2,1,1)}\left([0,T_0]\times R\times R\right)$.

Корутунду. Айрым туундулуу интегро-дифференциалдык тендемелер үчүн Коши маселесинин чыгарымдуулугу изилденди жана изделүүчү чыгарылыштын интегралдык көрүнүшү табылды.

Адабияттар

1. Imanaliev M.I., Baizakov A.B., Kydyraliev T.R. Sufficient conditions for the existense of solutions of the Cauchy problem of partial differential eguations of third order.Proceedings of V Congress of the Turkic World mathematicians. Bishkek, 2014.-v.1.-P.121-126.
2. Baizakov A.B., Dzheenbaeva G.A., Sharshenbekov M.M. On the structure of solutions of the initial problem of nonlinear integro-differential equations in partial derivatives of the fourth order. Вестник Института математики НАН КР. - 2022.-№1.- С.32-38.
3. Байзаков А.Б., Кыдыралиев Т.Р. Применение метода преобразования решений к начальной задаче интегро-дифференциальных уравнений в частных производных пятого порядка// Известия ВУЗов Кыргызстана. – Бишкек, 2018. №3, С 26-31.
4. Байзаков А.Б., Кыдыралиев Т.Р., Асанкулова А.С. Начальной задаче интегро-дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка. Вестник ИМ АН КР, Бишкек.2014. №1, С. 84-90