УДК 517.956.6
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_2(5)_12

# ФУНКЦИЙ ГРИНА НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ И ИХ КОРРЕКТНЫЕ СУЖЕНИЯ

*Кошанов Бакытбек Данебекович, д.ф-м.н., профессор*
koshanov@list.ru
*Институт математики и математического моделирования*
*Алматы, Казахстан*
*Сабиржанов Музаффар Тахирович, Phd докторант*
msabirjanov@oshsu.kg
*Ошский Государственный Университет*
*Ош, Кыргызстан*

***Аннотация.*** *В данной статье исследуются функции Грина для краевых задач Дирихле, Неймана и Робена уравнений Пуассона в многомерном единичном шаре. Приведен конструктивный способ построения функции Грина для бигармонического уравнения в круге. Также представлена теория сужения и расширения операторов, что позволяет описать корректные краевые задачи для бигармонических операторов. Основная цель работы — предложить явные формы функций Грина для указанных задач и описать корректные условия для этих операторов. Новизна работы заключается в явных конструкциях функций Грина для задач Неймана и Робена в многомерных шарах, что ранее не было полностью решено для этих случаев.*

***Ключевые слова:*** *уравнение Пуассона, бигармонические уравнения, задача Дирихле, задача Неймана, задача Робена, корректные сужения оператора.*

# БИГАРМОНИКАЛЫК ОПЕРАТОРЛОР УЧУН КЭЭ БИР ЧЕК АРАЛЫК МАСЕЛЕЛЕРДИН ГРИН ФУНКЦИЯСЫ ЖАНА АЛАРДЫК КОРРЕКТТУУ ЧЕКТӨӨЛӨРҮ

*Кошанов Бакытбек Данебекович, ф-м.н.д., профессор*
koshanov@list.ru
*Математика жана математикалык моделдөө институту*
*Алматы, Казахстан*
*Сабиржанов Музаффар Тахирович, Phd докторант*
msabirjanov@oshsu.kg
*Ош Мамлекеттик Университети*
*Ош, Кыргызстан*

***Аннотация.*** *Бул макалада көп өлчөмдүү бирдиктүү шардагы Пуассон теңдемелеринин Дирихле, Нейман жана Робен маселелери үчүн Грин функциялары изилденет. Бигармониялык теңдеме үчүн Грин функциясын куруунун конструктивдүү ыкмасы келтирилген. Ошондой эле, операторлорду кыскартуу жана кеңейтүү теориясы сунушталып, бул бигармониялык операторлор үчүн туура чектештик маселелерин сүрөттөөгө мүмкүндүк берет. Иштин негизги максаты – аталган маселелер үчүн Грин функцияларынын так формаларын сунуштап, бул операторлор үчүн туура шарттарды сүрөттөө. Изилдөөнүн жаңылыгы Нейман жана Робен маселелери үчүн көп өлчөмдүү шарларда Грин функцияларынын так формаларын түзүүдө, буга чейин бул маселелер толугу менен чечилген эмес.*

***Ачкыч сөздөр:*** *Пуассон теңдемеси, бигармониялык теңдемелер, Дирихле маселеси, Нейман маселеси, Робен маселеси, Грин функциясы, операторлордун туура кыскарышы.*

GREEN'S FUNCTIONS OF SOME BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR BYHARMONIC OPERATORS AND THEIR CORRECT CONSTRICTIONS

*Koshanov Bakytbek Danebekovich, Doctor of Ph. Math. Sc., Professor*
*koshanov@list.ru*
*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling*
*Almaty, Kazakhstan*
*Sabirzhanov Muzaffar Takhirovich, PhD doctoral student*
*msabirjanov@oshsu.kg*
*Osh State University*
*Osh, Kyrgyzstan*

***Abstract.*** *In this paper, we explicitly present Green's functions for Dirichlet, Neumann, and Robin problems of Poisson equations in a multidimensional unit ball.A constructive method for constructing the Green function of the Dirichlet problem for a biharmonic equation in a circle is given. The theory of operator narrowing and expansion is briefly described, and the correct boundary value problems for byharmonic operators are described.*

***Key words:*** *Poisson equation, byharmonic equations, Dirichlet problem, Neumann problem, Roben problem, correct narrowings of the operator.*

## 1. Введение

Необходимость исследования краевых задач для эллиптических уравнений продиктована с многочисленными практическими приложениями при теоретическом изучении процессов гидродинамики, электростатики, механики, теплопроводности, теории упругости, квантовой физики [1,2]. Распределения потенциала электростатического поля описываются с помощью уравнения Пуассона. При исследовании колебаний тонких пластин малых прогибов возникают бигармонические уравнения.

Настоящая работа посвящена построению функции Грина классических задач Дирихле, Неймана и Робена для уравнения Пуассона в многомерном шаре и описанию корректных краевых задач для бигармонических операторов.

Существуют различные способы построения функции Грина задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Для многих видов областей она построена в явном виде. А для задачи Неймана в многомерных областях построение функции Грина является открытой задачей. Для шара функция Грина внутренней и внешней задачи Неймана построена в явном виде только для двумерном и трехмерном случаев. В общем случае для многомерного шара явный вид функции Грина задач Неймана и Робена для уравнения Пуассона построены недавно в работах [3,4].

Отметим, что в последнее время возобновился интерес к построению в явном виде функций Грина классических задач. В работах [5-7] построена в явном виде функция Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения в многомерном шаре. В работе Г. Бегера [8] с помощью гармонических функций Грина задач Дирихле, Неймана и Робена построены функции Грина бигармонических задач Дирихле, Неймана и Робена в двумерном круге. Аналогичные результаты в классе неоднородных бигармонических и тригармонических функций в секторе были получены в работах [9-12]. Заметим также, что построению в явном виде функций Грина задачи Робена в круге, когда параметр в граничном условий равен единице посвящена работы [13,14]. Результаты этих работ основаны на классической теории интегральных представлений для аналитических, гармонических и полигармонических функций на плоскости.

Исследованию разрешимости различных краевых задач для бигармонического уравнения в многомерном шаре посвящены работы [15-18].

Нахождение общих корректных краевых задач для дифференциальных уравнений всегда является актуальной задачей. Абстрактная теория сужения и расширения операторов берет свое начало с работы Джонфон Нейман[19], в которой был описан метод построения самосопряженных расширений симметрического оператора и подробно разработана теория расширения симметрических операторов с конечными индексами дефекта. Многие задачи для дифференциальных уравнений в частных производных приводят к операторам с бесконечными индексами дефекта.

М.И. Вишик [20,21] рассмотрел расширения минимального оператора, отказавшись от его симметричности, и описал области определения расширения, обладающие теми или иными свойствами разрешимости. Свои результаты М.И. Вишик приложил к исследованию общих краевых задач для общих эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка. Затем А.В.Бицадзе и А.А.Самарский[22] обнаружили корректную задачу, которая несодержится среди задач, описанных М.И. Вишиком. Такого типа задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений изучались А.А. Дезином [23].

В начале 80-х годов прошлого столетия М.О. Отелбаевым и его учениками[24-26] была построена абстрактная теория, которая позволяет описать все корректные сужения некоторого максимального оператора и отдельно -все корректные расширения некоторого минимального оператора, независимо друг от друга, в терминах обратного оператора. Эта теория была распространена на случай банаховых пространств [27].

Таким образом, данная работа посвящена построению функции Грина классических задач Дирихле, Неймана и Робена для уравнения Пуассона в многомерном шаре, конструктивному способу построению функции Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения в многомерном шаре и описанию корректных краевых задач для бигармонических операторов.

**Функция Грина задачи Дирихле, Неймана и Робена для уравнения Пуассона в многомерном единичном шаре**

Пусть $\Omega \subseteq R^n, n \geq 2$ - ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$.Рассмотрим в области $\Omega$ следующую задачу Дирихле для уравнения Пуассона

$$-\Delta u(x) = f(x), x \in \Omega, \tag{1.1}$$

$$u(x) = \varphi(x), x \in \partial\Omega, \tag{1.2}$$

Классическое решение $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ задачи Дирихле (1.1), (1.2) существует, единственно и оно представляется с помощью функции Грина $G_D(x, y)$ в следующем виде[1]

$$u(x) = \int_{\Omega} G_D(x, y) f(y) dy - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G_D(x, y)}{\partial n_y} \varphi(y) dS_y, \tag{1.3}$$

где $\dfrac{\partial}{\partial n_y}$ - внешний нормаль $\partial\Omega$ ,и вычисляется по формуле

$$\frac{\partial}{\partial n_y} = \sum_{k=1}^{n} (n_y)_k \frac{\partial}{\partial x_k}, n_y \equiv \overrightarrow{n_y} = \{(n_y)_1 (n_y)_2, ..., (n_y)_n\}, |n_y| = 1.$$

Функция Грина задачи Дирихле(1.1), (1.2) определяется следующим образом

$$-\Delta G_D(x,y)=\delta(x-y), x,y\in\Omega, \tag{1.4}$$

$$G_D(x,y)=0, x\in\partial\Omega, x\in\Omega, \tag{1.5}$$

где $\delta(x-y)$ - дельта функция Дирака.

В частности, когда $\Omega=\{x\in R^n:|x|<1\}$ является единичным шаром, функция Грина задачи Дирихле(1.1), (1.2) может быть построена методом отражений и имеет вид

$$G_D(x,y)=\frac{1}{\omega_n}\left[\varepsilon_n(x-y)-\varepsilon_n\left(x|y|-\frac{y}{|y|}\right)\right], \tag{1.6}$$

где $\omega_n=\dfrac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ - поверхностная площадь единичного шара, а $\varepsilon_n(x-y)$ - фундаментальное решение уравнения Лапласа [2]

$$\varepsilon_n(x-y)=\begin{cases}\ln\dfrac{1}{|x-y|}, & n=2, |x-y|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2},\\ \dfrac{1}{n-2}|x-y|^{2-n} & n\ge 3, |x-y|=\sqrt{\sum_{k=3}^{n}(x_k-y_k)^2}.\end{cases}$$

Наряду с задачей Дирихле, классической и хорошо исследованной является задача Неймана для уравнения Пуассона

$$-\Delta u(x)= f(x), x\in\Omega, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial n}=\psi(x), x\in\partial\Omega. \tag{1.7}$$

Известно, что решение задачи Неймана (1.1), (1.7) из класса $C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ не единственно с точностью до постоянного слагаемого. Для существования решения задачи необходимо и достаточно выполнения условия

$$\int_\Omega f(y)dy+\int_{\partial\Omega}\psi(y)dS_y=0. \tag{1.8}$$

Если решение задачи (1.1), (1.7) существует, то это решение может быть представлено в интегральном виде с помощью функции Грина задачи Неймана $G_N(x,y)$ по формуле [1]

$$u(x)=\int_\Omega G_N(x,y)f(y)dy+\int_{\partial\Omega}G_N(x,y)\psi(y)dS_y+const. \tag{1.9}$$

Подфункцией Грина задачи Неймана(1.1), (1.7) понимают [1] функцию, имеющую представление

$$G_N(x,y)=\frac{1}{\omega_n}[\varepsilon_n(x-y)+g(x,y)], \tag{1.10}$$

где $g(x,y)$ - гармоническая в области $\Omega$ функция.

При этом должно выполняться краевое условие

$$\frac{\partial G_N}{\partial n_y}(x,y) = -\frac{1}{\omega_n}, y \in \partial\Omega.. \qquad (1.11)$$

Если такая функция Грина $G_N(x,y)$ существует, то из (1.8) и (1.11) следует, что функция (1.9) удовлетворяет всем условиям задачи (1.1),(1.7).

Для единичного шара Функция Грина задачи Неймана представлена в явном виде для случаев $n=2$ и $n=3$

$$G_N(x,y) = \frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{|x-y|} + \ln\frac{1}{\left|x|y| - \frac{y}{|y|}\right|}\right], n=2,$$

$$G_N(x,y) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{|x-y|} + \frac{1}{\left|x|y| - \frac{y}{|y|}\right|} - \ln\left|1+(x,y)+\left|x|y|-\frac{y}{|y|}\right|\right|\right], n=3, \qquad (1.12)$$

где $(x,y) = x_1y_1 + ... + x_ny_n$ - скалярное произведение в $R^n$ векторов $x$ и $y$.

Функция Грина задачи Неймана (1.1),(1.7) имеет следующее представление[3]

$$G_N(x,y) = \frac{1}{\omega_n}\left[\varepsilon_n(x-y) + \varepsilon_n(x|y| - \frac{y}{|y|}) + \tilde{\varepsilon}(x,y)\right] + const, \qquad (1.13)$$

где $\tilde{\varepsilon}(x,y)$ выражается тождеством

$$\tilde{\varepsilon}(x,y) = \int_0^1\left[(n-2)s\left|x|y| - \frac{y}{|y|}\right| - 1\right]\frac{ds}{s} = \int_0^1\left[s\left|x|y| - \frac{y}{|y|}\right|^{2-n} - 1\right]\frac{ds}{s}, n \geq 3,$$

и они выписываются через элементарные функции

$$\tilde{\varepsilon}(x,y) = \ln\frac{2}{\left|1-(x,y)+\left|x|y|-\frac{y}{|y|}\right|\right|}, n=3; \qquad (i)$$

$$\tilde{\varepsilon}(x,y) = \ln\frac{(x,y)}{\sqrt{|x|^2|y|^2-(x,y)^2}}\arctan\frac{\sqrt{|x|^2|y|^2-(x,y)^2}}{1-(x,y)} - \ln\left|x|y|-\frac{y}{|y|}\right|, n=4; \qquad (ii)$$

$$\tilde{\varepsilon}(x,y) = \ln\frac{2}{\left|1-(x,y)+\left|x|y|-\frac{y}{|y|}\right|\right|} + \sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{(2k-1)}\left\{\left|x|y|-\frac{y}{|y|}\right|^{1-2k} - 1\right\} + \sum_{k=1}^{m-1}\sum_{i=0}^{m-k-1}\frac{2^i(k+i-1)(2k-3)!!(x,y)x^{2i}y^{2i}}{(k-1)!(2k+2i-1)!!(|x|^2|y|^2-(x,y)^2)^{i+1}}$$

$$\left[\frac{|x|^2|y|^2-(x,y)}{\left|x|y|-\frac{y}{|y|}\right|^{2k-1}} + (x,y)\right], n \geq 5, n=2m+1, m \geq 2; \qquad (iii)$$

$$\tilde{\varepsilon}(x,y) = -\ln\left|x|y| - \frac{y}{|y|}\right| + \sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{2k}\left\{\left|x|y| - \frac{y}{|y|}\right|^{-2k} - 1\right\} +$$

$$(x,y)\arctan\frac{\sqrt{|x|^2|y|^2-(x,y)^2}}{1-(x,y)}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(2k-1)!}{2^k k!}$$

$$\frac{|x|^{2k}|y|^{2k}}{\left(|x|^2|y|^2-(x,y)^2\right)^{k-1/2}} + \sum_{k=1}^{m-1}\sum_{i=0}^{m-k-1}\frac{(2k+2i-1)!!(k+1)!(x,y)|x|^{2i}|y|^{2i}}{2^{i+1}(2k-1)!!(k+i)!\left(|x|^2|y|^2-(x,y)^2\right)^{i+1}} \qquad \text{(iv)}$$

$$\left[\frac{|x|^2|y|^2-(x,y)}{\left|x|y|-\frac{y}{|y|}\right|^{2k}} - (x,y)\right], n \geq 6, n = 2m+2, m \geq 2;$$

Наряду с задачами Дирихле и Неймана, классической и хорошо исследованной является задача Робена (третья краевая задача) для уравнения Пуассона

$$-\Delta u(x) = f(x), x \in \Omega, \qquad (1.1)$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial n} + au(x) = \psi(x), x \in \partial\Omega, \qquad (1.14)$$

Решение задачи Робена (1.1), (1.14) из класса $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ представляется в следующем виде

$$u(x) = \int_{\Omega} G_a(x,y) f(y)dy - \int_{\partial\Omega}\frac{\partial G_a(x,y)}{\partial n_y}\varphi(y)dS_y. \qquad (1.15)$$

Функция Грина задачи Робена (1.1), (1.14) имеет вид [4]

a) если $a > 0$, то

$$G_a(x,y) = G_D(x,y) + \frac{1}{2\pi}\int_0^1 s^{a-1}P(r\rho s,\gamma)ds = \varepsilon(x-y) - \varepsilon\left(x|y| - \frac{y}{|y|}\right) +$$

$$\frac{n-2-2a}{\omega_n}\int_0^1 s^{a-1}\varepsilon(sx|y| - \frac{y}{|y|})ds, \qquad (1.16)$$

где $\gamma = \theta - \varphi$ и $P(r\rho s,\gamma) = \dfrac{1-t^2}{1-2t\cos\gamma + t^2}$ - ядро Пуассона;

b) если $a < 0$ и $a$ - нецелое, то

$$G_a(x,y) = G_D(x,y) + \frac{1}{2\pi}\left[\frac{2}{a} + 2\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k+a}(r\rho)^s\cos k\gamma + \int_0^1 s^{a-1}(P(r\rho s,\gamma) + 1 - 2\sum_{k=0}^{m}(r\rho s)^k\cos k\gamma)ds\right], \qquad (1.17)$$

где $m = -[a] + 1$ .

**2. Функция Грина задачи Дирихле для бигармонического уравнения в многомерном шаре**

Пусть $m$ - натуральные число и в круге $\Omega = \{x = (x_1, x_2) : |x| < r\}$ рассмотрим задачу Дирихле для бигармонического уравнения

$$\Delta^2 u(x) = f(x), x \in \Omega, \qquad (2.1)$$

$$\frac{\partial^j u(x)}{\partial n_x^j} = \varphi_j(x),\ j = 0,1, x \in \partial\Omega. \qquad (2.2)$$

Классическое решение $u(x) \in C^{2m}(\Omega) \cap C^{m-1}(\overline{\Omega})$ задачи Дирихле (2.1), (2.2) из класса существует, единственно и оно представляется с помощью функции Грина $G_{2m,n}(x,y)$ в следующем виде [2]

$$u(x) = \int_\Omega G_{4,2}(x,y) f(y)dy + \sum_{j=0}^{1} \int_{\partial\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial n_y} \Delta_y^j G_{4,2}(x,y) \cdot \Delta_y^{1-j}\varphi(y) - \Delta_y^j G_{4,2}(x,y) \cdot \frac{\partial}{\partial n_y} \Delta_y^{1-j}\varphi(y) \right] dS_y, \qquad (2.3)$$

где $\frac{\partial}{\partial n_y}$ - внешний нормаль $\partial\Omega$.

Функция Грина задачи Дирихле (2.1), (2.2) определяется следующим образом

$$\Delta^2 G_{4,2}(x,y) = \delta(x-y), x, y \in \Omega, \qquad (2.4)$$

$$\frac{\partial^j G_{4,2}(x,y)}{\partial n^j} = 0, x \in \partial\Omega, y \in \Omega,\ j = 0,1, \qquad (2.5)$$

где $\delta(x-y)$ - дельта функция Дирака.

**Теорема 2.1.** В случае честного $n$ при $2m \geq n$ функция Грина задачи Дирихле (2.4), (2.5) представима в виде

$$G_{4,2}(x,y) = |x-y|^2 \ln|x-y|^2 - |x-y|^2 \ln\left[ \left|\frac{y}{r}\right|^2 \left| x - \frac{y}{|y|^2} r^2 \right|^2 \right] + r^2 \left( 1 - \left|\frac{y}{r}\right|^2 \right) \left( 1 - \left|\frac{x}{r}\right|^2 \right). \qquad (2.6)$$

**Лемма 2.2.** В следующих обозначениях для функций

$$|x-y|^2 = X^2(x,y) = X^2,\ \left|\frac{y}{r}\right|^2 \cdot \left| x - \frac{y}{|y|^2} r^2 \right|^2 = Y^2(x,y) = Y^2,$$

$$\left( 1 - \left|\frac{y}{r}\right|^2 \right)^k \left( 1 - \left|\frac{x}{r}\right|^2 \right) r^2 = Z^2(x,y) = Z^2 \qquad (2.7)$$

имеет место тождество

$$X^2 - Y^2 = -Z^2, x, y \in \Omega. \qquad (2.8)$$

Данное тождество следует из следующих цепочек равенств

$$X^2-Y^2=|x-y|^2-\left|\frac{y}{r}\right|^2\cdot\left|x-\frac{y}{|y|^2}r^2\right|^2=|x|^2-2(x,y)+|y|^2-\left|\frac{y}{r}\right|^2\left(|x|^2-2\frac{(x,y)}{|y|^2}r^2+\frac{(x,y)}{|y|^2}r^4\right)=$$

$$|x|^2-2(x,y)+|y|^2-\frac{|x|^2|y|^2}{r^2}+2(x,y)-r^2=|x|^2-\frac{|x|^2|y|^2}{r^2}-r^2+|y|^2=|x|^2\left(1-\frac{|y|^2}{r^2}\right)-r^2\left(1-\frac{|y|^2}{r^2}\right)=$$

$$\left(1-\frac{|y|^2}{r^2}\right)(|x|^2-r^2)=-\left(1-\frac{|y|^2}{r}\right)\left(1-\frac{|x|^2}{r}\right)r^2=-Z^2.$$

**Лемма 2.3.** Для любых $0<x\le 1$имеет место разложение [28]

$$(1-x)^\alpha=1+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)\cdot x^k,$$

$$\ln(1-x)=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k},$$

также имеет место разложение бином-Ньютона

$$(a-b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}(-b)^k.$$

**Доказательство теоремы 2.1.** В этом случае фундаментальное решение $\varepsilon_{4,2}(x,y)$ разлагаем в ряд с помощью второй и третьей части леммы

$$\varepsilon_{4,2}(x,y)=|x-y|^2\ln\frac{|x-y|^2}{\left|\frac{y}{r}\right|^2\left|x-\frac{y}{|y|^2}r^2\right|^2}=X^2\ln\frac{X^2}{Y^2}=(Y^2-Z^2)\cdot\ln\left(1-\frac{Z^2}{Y^2}\right)=$$

$$(Y^2-Z^2)\cdot\left(-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(Y^2)^{-k}(Z^2)^k}{k}\right)=-Z^2-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{Y^{2(1-k)}Z^{2k}}{k};$$

Отсюда одну слагаемую переносим в левую сторону, тогда получим равенство

$$G_{4,2}(x,y)=G_{4,2}^2(x,y)=G_{4,2}^\infty(x,y),$$

где

$$G_{4,2}^2(x,y)=X^2\ln X^2-X^2\ln Y^2-Z^2,$$

$$G_{4,2}^\infty(x,y)=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{Y^{2(1-k)}Z^{2k}}{k}=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left|\frac{y}{r}\right|^{2(1-k)}\left|x-\frac{y}{|y|^2}r^2\right|^{2(1-k)}r^{2k}\left(1-\left|\frac{y}{r}\right|^2\right)^k\left(1-\left|\frac{x}{r}\right|^2\right)^k}{k}.$$

Так как

$$\left(X^2-Y^2\right)\Big|_{x\in\partial\Omega,\,y\in\Omega}=-Z^2\Big|_{x\in\partial\Omega,\,y\in\Omega}=-r^2\left(1-\left|\frac{y}{r}\right|^2\right)\left(1-\left|\frac{x}{r}\right|^2\right)\Bigg|_{x\in\partial\Omega,\,y\in\Omega}=0,$$

то в силу равенства

$$-\frac{\partial^j}{\partial n_x^j} Z^4 \bigg|_{x\in\partial\Omega,\, y\in\Omega} = 0,\ j = 0{,}1,$$

Легко проверить, что функция

$$G_{4,2}^{\infty}(x,y) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left|\frac{y}{r}\right|^{2(1-k)} \left|x - \frac{y}{|y|^2} r^2\right|^{2(1-k)} r^{2k}\left(1 - \left|\frac{y}{r}\right|^2\right)^k \left(1 - \left|\frac{x}{r}\right|^2\right)^k}{k}$$

удовлетворяет граничному условию (2.5).

Согласно лемме 2.1 и последнему равенству, имеем

$$\Delta^2 G_{4,2}(x,y) = \Delta^2 G_{4,2}^2(x,y) = \delta(x-y),\ x, y \in \Omega,$$

$$\frac{\partial^j G_{4,2}(x,y)}{\partial n_x^j}\bigg|_{x\in\partial\Omega,\, y\in\Omega} = \frac{\partial^j G_{4,2}^{\infty}(x,y)}{\partial n_x^j}\bigg|_{x\in\partial\Omega,\, y\in\Omega} = 0,\ j = 0{,}1.$$

В силу единственности решения задачи Дирихле для бигармонического уравнения, функция Грина задачи (2.4), (2.5) является

$$G_{4,2}(x,y) = |x-y|^2 \ln|x-y|^2 - |x-y|^2 \ln\left[\left|\frac{y}{r}\right|^2 \left|x - \frac{y}{|y|^2} r^2\right|^2\right] + r^2\left(1 - \left|\frac{y}{r}\right|^2\right)\left(1 - \left|\frac{x}{r}\right|^2\right).$$

Надо отметить, что в работах[9, 10, 11] построены функции Грина задач Дирихле, Неймана, Робина для бигармонических и полигармонических уравнений в круге, полукруге, полукольце, треугольнике и в других стандартных плоских областях. Результаты этих работ основаны на классической теории интегральных представлений для аналитических, гармонических и полигармонических функций на плоскости.

## 3. Корректные сужения и расширения дифференциальных операторов

Нахождение общих корректных краевых задач для дифференциальных уравнений всегда является актуальной задачей. Абстрактная теория сужения и расширения операторов берет свое начало с работы Джон фон Нейман[14], в которой было писан метод построения самосопряженных расширений симметрического оператора и подробно разработана теория расширения симметрических операторов с конечными индексами дефекта. Многие задачи для дифференциальных уравнений в частных производных приводят к операторам с бесконечными индексами дефекта.

М.И. Вишик [15, 16] рассмотрел расширения минимального оператора, отказавшись от его симметричности, и описал области определения расширения, обладающие теми или иными свойствами разрешимости. Свои результаты М.И. Вишик приложил к исследованию общих краевых задач для общих эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка. Затем А.В.Бицадзе и А.А.Самарский[17] обнаружили корректную задачу, которая несодержится среди задач, описанных М.И. Вишиком. Такого типа задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений изучались А.А. Дезином [18].

В начале 80-х годов прошлого столетия М.О. Отелбаевым и его учениками[19,20,21] была построена абстрактная теория, которая позволяет описать все корректные сужения некоторого максимального оператора и отдельно -все корректные расширения некоторого минимального оператора, независимо друг от друга, в терминах обратного оператора. Причем эта теория была распространена на случай банаховых пространств и удалось частично отказаться от линейности операторов. Приведем краткое содержание этой теории в случае гильбертовыхпространств.

Пусть в гильбертовом пространстве $H$ линейный оператор $L$ с областью определения $D(L)$ и областью значения $R(L)$. Ядром оператора $L$ назовем множество

$$KerL = \{f \in D(L) : Lf = 0\}.$$

**Определение1.** Линейный замкнутый оператор $\hat{L}$ в гильбертовом пространстве $H$ называется максимальным, если $R(\hat{L}) = H$ и $Ker\hat{L} \neq \{0\}$.

**Определение2.** Линейный замкнутый оператор $L_0$ в гильбертовом пространстве $H$ называется минимальным, если $\overline{R(L_0)} \neq H$ и существует ограниченный обратный оператор $L_0^{-1}$ на $R(L_0)$.

**Определение 3.** Линейный замкнутый оператор $L$ в гильбертовом пространстве $H$ называется корректным, если существует ограниченный обратный оператор $L^{-1}$ определенный на всем $H$.

**Определение 4.** Оператор $L$ называется сужением оператора $L_1$, а оператор $L_1$ называется расширением оператора $L$, и кратко пишут $L \subset L_1$, если

1)$D(L) \in D(L_1)$,

2)$Lf = L_1 f, \forall f \in D(L)$.

**Определение 5.** Корректный оператор $L$ в гильбертовом пространстве $H$ назовем корректным сужением максимального оператора $\hat{L}$ (корректным расширением минимального оператора $L_0$) если $L \subset \hat{L}$ $(L_0 \subset L)$.

**Определение 6.** Корректный оператор $L$ в гильбертовом пространстве $H$ назовем граничным корректным расширением, если $L$ является одновременно корректным сужением максимального оператора $\hat{L}$ и корректным расширением минимального оператора $L_0$, т.е. $L_0 \subset L \subset \hat{L}$.

**Теорема 3.1.** [21]Пусть $\hat{L}$ максимальный линейный оператор в гильбертовом пространстве $H, L-$ известное корректное сужение оператора $\hat{L}$ и $K$-произвольный линейный ограниченный в $H$ оператор, удовлетворяющий следующему условию

$$R(K) \subset Ker\hat{L}. \tag{3.1}$$

Тогда оператор $L_K^{-1}$, определенный формулой

$$L_K^{-1} = L^{-1} f + Kf, \forall f \in H, \tag{3.2}$$

является обратным к некоторому корректному сужению $L_K$ максимального оператора $\hat{L}$, т.е. $L_K \subset \hat{L}$.

Обратно, если $L_1$ некоторое корректное сужение максимального оператора $\hat{L}$, то существует линейный ограниченный в $H$ оператор $K_1$, удовлетворяющий условию (3.1), такой, что выполняется равенство

$$L_1^{-1}f = L^{-1}f + K_1 f, \forall f \in H.$$

Как правило, трудно описать ядро максимального оператора. Поэтому часто следующая теорема 3.2 более эффективна, чем теорема 3.1

**Теорема 3.2.** Пусть $\hat{L}$ –максимальный оператор, $L_\phi$ - известное корректное сужение $\hat{L}$ и $K$ – непрерывный оператор, действующий из $H$ в $D(\hat{L})$ – область определения оператора $\hat{L}$. Тогда оператор $L_K^{-1}$, определяемый формулой

$$L_K^{-1}f = L_\phi^{-1}f + (\mathrm{E} - L_\phi^{-1}\hat{L})Kf \tag{3.3}$$

является обратным к некоторому корректному сужению $\hat{L}$, т.е. $L_K \subset \hat{L}$.

Обратно, любое корректное сужение оператора $\hat{L}$ представимо в виде (3.3). Далее эта теория будет применена для бигармонического оператора.

## 4. Корректные краевые задачи для полигармонического оператора в многомерном шаре

В предыдущем разделе была доказана, что краевая задача Дирихле для полигармонического уравнения

$$\Delta_x^2 u(x) = f(x), x \in \Omega = \{x : |x| < r\}, \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial^j u(x)}{\partial n_x^j} = 0, j = 0,1, \; x \in \partial\Omega, \tag{4.2}$$

имеет единственное решение $u(x)$ ,которое имеет интегральное представление

$$u(x) = \int_\Omega G_{4,2}^D(x,y) f(y)dy, \tag{4.3}$$

где $G_{4,2}^D(x,y) \equiv G_{4,2}(x,y)$ - функция Грина задачи Дирихле из (2.6).

Заметим, что нулевые краевые условия Дирихле для полигармонического уравнения эквивалентны следующим краевым условиям для того же уравнения.

**Теорема 4.1.** Функция $u(x)$, задаваемая формулой (4.3) является решением краевой задачи:

$$\Delta_x^2 u(x) = f(x), x \in \Omega, \tag{4.4}$$

$$u(x)\big|_{\partial\Omega} = 0, \frac{\partial}{\partial n_x} u(x)\bigg|_{\partial\Omega} = 0, \tag{4.5}$$

С помощью явного вида функции Грина задачи Дирихле [5] для полигармонического уравнения (2.1) рассмотрим функцию

$$\omega(x) = \int_\Omega G_{4,2}(x,y) f(y)dy + \sum_{j=0}^{1} \int_{\partial\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial n_y} \Delta_y^j G_{4,2}(x,y) \cdot \Delta_y^{1-j} h(y) - \Delta_y^j G_{4,2}(x,y) \cdot \frac{\partial}{\partial n_y} \Delta_y^{1-j} h(y) \right] dS_y, \tag{4.6}$$

где $h(x) = (Kf)(x), K -$ некоторый произвольный оператор, ставящий каждой функций $f(x), x \in \Omega = \{x : |x| < r\} \subseteq R^n$ в соответствие единственную достаточно гладкую функцию $h(x)$.

На основе теоремы 4.1 и представлений (4.6) мы получим следующую теорему

**Теорема 4.2.** Функция $\omega(x)$ , задаваемая формулой (4.6) является решением краевой задачи:

$$\Delta_x^2\omega(x) = f(x), x \in \Omega, \tag{4.7}$$

$$\begin{gathered} \omega(x)\big|_{\partial\Omega} = Kf(x)\big|_{\partial\Omega}, \\ \frac{\partial}{\partial n_x}\omega(x)\big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial}{\partial n_x}Kf(x)\big|_{\partial\Omega}, \end{gathered} \tag{4.8}$$

**Теорема 4.3.** (о единственности). Решение краевой задачи (4.7), (4.8) единственно.

**Теорема 4.4 (**о существовании). Пусть неоднородное полигармоническое уравнение (4.7) с некоторыми краевыми условиями при всех допустимых $f(x)$ имеет единственное регулярное решение $u(x)$ .Тогда найдется некоторый оператор К такой, что данное решение$u(x)$ удовлетворяет либо краевым условиям (4.8), где $h(x) = (K \cdot \Delta_x^2 u)(x), x \in \Omega.$

**Замечание 4.1.** Если $R$ обратимый оператор на всем $L_2(\Omega)$, то граничные условия в (4.8) можно записать в виде

$$\begin{gathered} R\omega(x)\big|_{\partial\Omega} = R(Kf(x))\big|_{\partial\Omega}, \\ \frac{\partial}{\partial n_x}\omega(x)\big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial}{\partial n_x}Kf(x)\big|_{\partial\Omega}. \end{gathered} \tag{4.9}$$

Потому для проверки корректности граничной задачи нужно пытаться преобразовать граничные условия к виду (4.9).

Замечание 4.2. Если линейный оператор $L$-есть корректное сужение максимального, то переходя к сопряженным, получаем корректные расширения минимального оператора, соответствующего формально сопряженному. Это приводит также к классу "нагруженных"уравнений.

Замечание 4.3. Отметим, что в теореме 3.2 в качестве $K$ можно взять $K-$ нелинейные преобразования.

Другие применения результатов М.Отелбаева в различных разделах теории дифференциальных уравнений можно найти в работах [29-32].

## Литература


1. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа.1970.–712с.
2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. - М.: Наука,1981. -512с.
3. Зорич В.А. Математический анализ: Учебник.Ч.II. Москва: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. (1984) 640с.
4. Sadybekov M.A., Torebek B.T., TurmetovB.Kh. Representation of Green's function of the Neumann problem for amulti-dimensional ball //Complex Variables and Elliptic Equation,61:1 (2016) 104-123.
5. Sadybekov M.A., TurmetovB.Kh., Torebek B.T. On an explicit form of the Green function of the Roben problem for the Laplace operator in a circle // Adv. Pure Appl. Math. 6:3 (2015) 163-172.
6. KalmenovT.Sh., Koshanov B.D., Nemchenko M.Y. Green function representation for the Dirichlet problem of the polyharmonic equation in a sphere // Complex Variables and Elliptic Equations, 53:2 (2008), 177-183. Doi: http://dx.doi.org/10.1080/17476930701671726

7. KalmenovT.Sh., Koshanov B.D. Representation for the Green's function of the Dirichlet problem for the polyharmonic equations in a ball // Siberian Mathematical Journal. 49:3 (2008) 423-428. http://dx.doi.org/10.1007/s11202-008-0042-8

8. КальменовТ.Ш., Сураган Д. О новом методе построения функции Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения // Дифференциальные уравнения. 48:3 (2012) 435–438. DOI: http://dx.doi.org/10.1134/S0012266112030160

9. Begehr H. Biharmonic Green functions // Le matematiche. – 2006. –Vol. LXI. - P. 395-405.

10. Wang Y., Ye L. Biharmonic Green function and biharmonic Neumann function in a sector //Complex Variables and Elliptic Equations. 58:1 (2013)7-22.

11. WangY. Tri-harmonicboundaryvalueproblemsinasector // ComplexVariables and Elliptic Equations.59:5 (2014) 732-749.

12. Begehr H., Du J., Wang Y. A Dirichlet problem for polyharmonic functions // Ann. Math. Pura Appl.187:4 (2008) 435-457.

13. Begehr H., VaitekhovichT.Harmonic boundary value problems in half disc and half ring // Funct. Approx. Comment. Math.40:2 (2009) 251-282.

14. Begehr H., Vaitekhovich V., Some harmonic Robin functions in the complex plane //Advances in Pure and Applied Mathematics. 1:1 (2010)19-34.

15. Begehr H., VaitekhovichT.Modified harmonic Roben function // Complex Variables and Elliptic Equations.58:4 (2013) 483-496.

16. Кошанов Б.Д., Кошанова М.Д. Задача Дирихле с гельдеровыми и Lp граничными данными для полигармонических функций в единичном шаре // Доклады НАН РК.Сер. физ-мат. 4(2013) 35-41.

17. Қошанов Б.Д., Еділ К. Дөңгелектегі бигармониялы теңдеу үшін Дирихле есебінің Грин функциясы және Пуассон теңдеуінің полиномиалды шешімі // ҚР ҰҒА жаршысы, Серия физ.-мат. 3(2016)102-121.

18. Кошанов Б.Д., Нурикенова Ж.С. О разрешимости обобщенной задачи Дирихле – Неймана для эллиптического уравнения высокого порядка // Известие НАН РК, Серия физ.- мат. 3 (2017) 125-131.

19. KoshanovB.D., KoshanovaG.D., AzimkhanG.E., Segizbayeva R.U. Solvability of boundary value problems with non-local conditions for multidimensional hyperbolic equations // Bulletin of the NAS of the Republic of Kazakhstan, Series of Physics and Mathematics, 2:312 (2020), 116-125.

20. J.vonNeumann. Allgemeine Eigenwert theorie Hermitesche rFunktional operatoren// Math. Ann. 102 (1929) 49-131.

21. Вишик М.И. Об общих краевых задачах для эллиптическихдифференциальных уравнений //ТрудыМатем.о-ва. 3(1952) 187–246.

22. Вишик М.И. Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области //Матем.сборник.77:3 (1954)1307-1311.

23. Бицадзе А.В.,Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Доклады АН СССР. 185:4 (1969) 739– 740.

24. DezinA.A. Partial differential equations.-Berlinetc.:Springer-Verlag,1987.

25. Кокебаев Б.К., Отелбаев М., Шыныбеков А.Н. К теории сужения и расширения операторов. I // Известие АН КазССР. Сер. физ-мат. 5(1982) 24-27.

26. Кокебаев Б.К., Отелбаев М., Шыныбеков А.Н. К теории сужения и расширения операторов. II // Известие АН КазССР. Сер. физ-мат. 1. (1983)24-27.

27. ОтелбаевМ.,Кокебаев Б.К., Шыныбеков А.Н. К вопросам расширения и сужения операторов//ДокладыАНСССР.6. (1983)1307-1311.

28. Ойнаров Р., Парасиди И.Н. Корректно разрешимые расширения операторов с конечными деффектами в банаховом пространстве // Известие АН КазССР. Сер. физ-мат. 5 (1988) 35-44.

29. Koshanov B.D., Otelbaev M.O. Correct Contractions stationary Navier-Stokes equations and boundary conditions for the setting pressure // AIP Conference Proceedings. 1759 (2016) http://dx.doi.org/10.1063/1.4959619

30. Kanguzhin B.E. Changes in a finite part of the spectrum of the Laplace operator unterdelta-likeperturbations//Differential Equations. 55:10 (2019) 1428–1335. DOI: http://dx.doi.org/10.1134/S0012266119100082

31. Kanguzhin B.E., TulenovK.S. Singular perturbations Changes of Laplace operator and their recolvents //ComplexVariables and Elliptic Equations. 65:9 (2020) 1433- 1444. DOI: http://dx.doi.org/10.1080/17476933.2019.1655551