УДК 517.956
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_2(5)_11

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ЛИНИЕЙ СОПРЯЖЕНИЯ $x = 0$

Кожобеков Кудайберди Гапаралиевич, д.ф.-м.н., профессор
kudayberdi.kozhobekov@mail.ru
Сопуев Акылбек Адахимжанович, преподаватель
sopuevv@gmail.com
Ошский государственный университет
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *Доказаны существование единственного решения нелокальной задачи сопряжений в прямоугольной области для уравнения в частных производных 3-го порядка, когда при x>0 уравнение характеристик имеет 3 кратных корня, а при x<0 имеет 1 простой и 2 кратных корней. Используя функции Грина и метод интегральных уравнений, решение задачи эквивалентным образом сводится к решению интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода со слабым ядром, разрешимость которого доказывается методом последовательных приближений. Решение задачи при x>0 строится методом функции Грина, а при x<0 методом функции Римана, сведением задачи к решению интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода.*

Ключевые слова: *Дифференциальное уравнение, третий порядок, кратные характеристики, задача сопряжения, краевые условия, единственность, существование, функция Грина, интегральные уравнения.*

ҮЧҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ АРАЛАШ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИКАЛЫК ТИПТЕГИ ТЕҢДЕШҮҮ ҮЧҮН БИР НОКАЛДЫК ЭМЕС МАСЕЛЕ ЖӨНҮНДӨ

Кожобеков Кудайберди Гапаралиевич, ф.-м.и.д., профессор
kudayberdi.kozhobekov@mail.ru
Сопуев Акылбек Адахимжанович, окутуучу
sopuevv@gmail.com
Ош мамлекеттик университети
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *3-даражадагы жекече туундулуу дифференциалдык теңдеме үчүн тик бурчтуу областта локалдык эмес маселесинин жалгыз чечиминин бар экендиги далилденет, мында x>0 үчүн мүнөздүк теңдеме 3 эселүү тамырга ээ, ал эми x<0 үчүн ал 1 жөнөкөй жана 2 эселүү тамырга ээ. Гриндин функциясын жана интегралдык теңдемелер ыкмасын колдонуу менен маселенин чечилиши 2-түрдөгү начар ядролуу Вольтерра интегралдык теңдемесин чыгарууга эквиваленттүү келтирилет, анын чечилиши удаалаш жакындоо ыкмасы менен далилденет. x>0 үчүн маселенин чечими Грин функциясынын методу менен, ал эми x<0 үчүн Риман функциясынын методу менен курулуп, маселенинин чечилиши 2-түрдөгү Вольтерра интегралдык теңдемесинин чечимине келтирет.*

Ачкыч сөздөр: *Дифференциалдык теңдеме, үчүнчү тартиптеги, эселик мүнөздөмөлөр, жабыштыруу маселеси, чектик шарттар, чечимдин жалгыздыгы жана жашашы, Грин функциясы, интегралдык теңдеме.*

ON A NONLOCAL PROBLEM FOR A MIXED PARABOLIC-HYPERBOLIC TYPE EQUATION OF THIRD ORDER WITH A CONJUGATION LINE $x = 0$

Kozhobekov Kudaiberdi Gaparalievich, Doctor of Ph. & Math. Sc., professor
kudayberdi.kozhobekov@mail.ru
Sopuev Akylbek Adakhimzhanovich, teacher
sopuevv@gmail.com
Osh State University
Osh, Kyrgyzstan

Abstract. *The existence of a unique solution to a nonlocal conjugacy problem in a rectangular domain for a third-order partial differential equation is proved, when for x>0 the equation of characteristics has 3 multiple roots, and for x<0 it has 1 simple and 2 multiple roots. Using Green's functions and the integral equation method, the solution to the problem is equivalently reduced to solving a Volterra integral equation of the second kind with a weak kernel, the solvability of which is proved by the method of successive approximations. The solution to the problem for x>0 is constructed by the Green's function method, and for x<0 by the Riemann function method, reducing the problem to solving a Volterra integral equation of the second kind.*

Key words: *Differential equation, third order, multiple characteristics, conjugation problem, boundary conditions, uniqueness, existence, Green's function, integral equations.*

ВВЕДЕНИЕ

Исследование краевых и нелокальных задач, задачи со смещениями, задачи с интегральными условиями, прямые и обратные задачи для уравнений в частных производных и уравнений смешанного типа второго, третьего и четвертого порядков, посвящены многочисленные работы [1 - 29].

Нелокальная задача с интегральными условиями вида

$$\int_0^{\chi(t)} u(x,t)dx = E(t)$$

для уравнения теплопроводности изучена в работе J.R. Cannon [1].

На важность исследования нелокальных задач указана в работе А.В.Бицадзе, А.А. Самарского [2], где рассматривается обобщения линейных эллиптических краевых задач с условием

$$u(0,y) = u(\ell,y)$$

В работе Н.И. Ионкина [3] решена краевая задача для уравнения теплопроводности с неклассическим краевым условием вида

$$\int_0^1 u(x,t)dx = \mu(t),$$

которая описывает процесс диффузии частиц в турбулентной плазме, а также в процессах распространения тепла в тонком нагретом стержне, если задан закон ($\mu(t)$) изменения общего количества тепла стержня.

В работах М.В. Стригуна [4], Л.С. Пулькиной, А.Н. Савенковой [5] исследованы начально-краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными граничными условиями, содержащим интегралы от искомого решения вида

$$u(0,t) + \int_0^\ell K_1(x)u(x,t)dx = 0,\ u(\ell,t) + \int_0^\ell K_2(x)u(x,t)dx = 0\,.$$

В работе А.И. Кожанова, Г.И. Тарасовой [6] изучена задача Самарского–Ионкина с интегральным возмущением для псевдопараболичес-кого уравнения третьего порядка вида с нелокальным условием вида

$$u(0,t) = \gamma(t)u(1,t) + \int_0^1 N(y)u(y,t)dy,\ t \in (0,T)\,.$$

В работе Садыбеков М.А., Дилдабек Г., Тенгаева А.А. [7] сформулирована новая краевая задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа с нелокальным условием вида

$$u(\theta(t))=(1+\alpha)u(\theta_0(t))+(1-\alpha)u(\theta_1(t)), 0\le t\le 1,$$

где $\theta(t)=(t,1), \theta_0(t)=(\frac{t}{2},-\frac{t}{2}), \theta_1(t)=(\frac{t+1}{2},\frac{t-1}{2}), \alpha$ - произвольное число.

Классификация нелокальных задач и их классификации для уравнений в частных производных, а также многочисленные их применения рассмотрены в работе А.М. Нахушева [8]. Обзор нелокальных задач и задачи со смещением для уравнений в частных производных приведены в работе А.М. Нахушева [9]. Прямы и обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа К.Б Сабитова [10].

Классификация и приведения к каноническому виду дифференциальных уравнений третьего и четвертого порядков с двумя независимыми переменными приведены в работах [11], [12].

Постановка и исследование разрешимости краевых задач с смещениями, с интегральными и нелокальными условиями в настоящее время стала одним важнейших разделов теории дифференциальных уравнений в частных производных. Однако, нелокальные задачи для уравнений смешанного типа третьего и высокого порядков мало исследованы.

1. Постановка задачи 1. В области $D=\{(x,y):-\ell_1<x<\ell, 0<y<h\}$ $(\ell,\ell_1,h>0)$, рассмотрим уравнения

$$L_1(u)\equiv u_{xxx}-u_{xy}=0,\ (x,y)\in D_1=D\cap(x>0), \tag{1}$$

$$L_2(u)\equiv u_{xxy}+au_x+bu_y+cu=0,\ (x,y)\in D_2=D\cap(x<0), \tag{2}$$

где a, b, c – заданные функции, причем

$$a(x,y),\ a_x(x,y),\ b(x,y),\ b_y(x,y),\ c(x,y)\in C(\bar{D}_2). \tag{3}$$

Задача 1. Найти в области D *функцию* $u(x,y)$ *из класса* $C(\bar{D})\cap C^1(D)\cap[C^{3,1}(D_1)\cup C^{2,1}(D_2)]$, *удовлетворяющее уравнению (1) в области* D_1 *и краевым условиям*

$$u(\ell,y)=\varphi_1(y),\ 0\le y\le h, \tag{4}$$

$$u_{xx}(\ell,y)=\varphi_2(y), 0\le y\le h,, \tag{5}$$

$$u(x,0)=\psi_1(x),\ 0\le x\le\ell, \tag{6}$$

удовлетворяющее уравнению (2) в области D_2 *и краевым условиям*

$$u(-\ell_1,y)+\alpha(y)u(x_0,y)=\varphi_3(y),\ 0\le y\le h, \tag{7}$$

$$u(x,0)=\psi_2(x),\ -\ell_1\le x\le 0, \tag{8}$$

где $\varphi_1(y), \varphi_2(y), \varphi_3(y), \psi_1(x), \psi_2(x), \alpha(y)$ *– заданные функции, причем*

$$\psi_2(-\ell_1)+\alpha(0)\psi_2(x_0)=\varphi_3(0),\ -\ell_1<x_0<0, \psi_1(\ell)=\varphi_1(0). \tag{9}$$

Из постановки задачи 1 следует, что на линии $x=0$ выполняются следующие условия склеивания:

$$\forall y\in[0,h]: u(-0,y)=u(+0,y)=\tau(y),\ u_x(-0,y)=u_x(+0,y)=\nu(y), \tag{10}$$

где $\tau(y)$ и $\nu(y)$ – пока неизвестные функции, подлежащие определению.

2. Соотношение, полученное из области D_1**.** Рассмотрим следующую вспомогательную задачу.

Задача 2. Найти в области D_1 *функцию* $u(x,y)\in C(\bar{D}_1)\cap C^1(D_1)\cap\ \cap C^{3,1}(D_1)$, *удовлетворяющее уравнению (1), условиям (4), (5), (6) и*

$$u_x(0,y)=\nu(y),\ 0\le y\le h. \qquad (11)$$

Интегрируя уравнение (1) в пределах от x до ℓ получим уравнение

$$u_{xx}-u_y=\omega(y),(x,y)\in D_1, \qquad (12)$$

где $\omega(y)=\varphi_2(y)-\varphi_1'(y)$ – известная функция.

Тогда, решение задачи 2, удовлетворяющее уравнения (12), краевым условиям (4), (6) и (11), имеет вид

$$\begin{aligned}u(x,y)=&-\int_0^y G(x,y;0,\eta)\nu(\eta)d\eta-\int_0^y G_\xi(x,y;\ell,\eta)\varphi_1(\eta)d\eta+\\&+\int_0^\ell G(x,y;\xi,0)\psi_1(\xi)d\xi-\int_0^y\omega(\eta)d\eta\int_0^\ell G(x,y;\xi,\eta)d\xi,\ (x,y)\in D_1,\end{aligned} \qquad (13)$$

где $G(x,y;\xi,\eta)$ – функция Грина, которая представима в виде [32]:

$$\begin{aligned}G(x,y;\xi,\eta)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\Bigg[&exp\left(-\frac{(x-\xi+4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right)+exp\left(-\frac{(x+\xi+4n\ell)^2}{4(y-\eta)}\right)-\\&-exp\left(-\frac{(x-\xi+2(2n+1)\ell)^2}{4(y-\eta)}\right)-exp\left(-\frac{(x+\xi+2(2n+1)\ell)^2}{4(y-\eta)}\right)\Bigg].\end{aligned}$$

Полагая $x=0$ в (13) имеем соотношение между функциями $\tau(y)$ и $\nu(y)$ в виде

$$\tau(y)=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^y\frac{\nu(\eta)}{\sqrt{y-\eta}}d\eta+\int_0^y N(y,\eta)\nu(\eta)d\eta+\Phi_1(y), \qquad (14)$$

где $N(y,\eta)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi(y-\eta)}}\left\{exp\left(-\dfrac{4n^2}{y-\eta}\right)-\sum_{\substack{n=-\infty\\n\ne0}}^{n=+\infty}\left[exp\left(-\dfrac{4n^2\ell^2}{y-\eta}\right)-exp\left(-\dfrac{(2n+1)^2\ell^2}{y-\eta}\right)\right]\right\}$,

$$\Phi_1(y)=-\int_0^y G_\xi(0,y;\ell,\eta)\varphi_1(\eta)d\eta+\int_0^\ell G(0,y;\xi,0)\psi_1(\xi)d\xi-\int_0^y\omega(\eta)d\eta\int_0^\ell G(0,y;\xi,\eta)d\xi\,.$$

3. Построение решение задачи 1 в области D_2**.** Рассмотрим следующую вспомогательную задачу.

Задача 3. Найти в области D_2 *функцию* $u(x,y)\in C(\bar{D}_2)\cap C^1(D_2)\cap C^{2,1}(D_2)$, *удовлетворяющее уравнению (2) и условиям (8)*

$$u(0,y)=\tau(y),0\le y\le h, \qquad (15)$$

$$u_x(0,y)=\nu(y),\ \ 0\le y\le h, \qquad (16)$$

где $\tau(y),\nu(y)$ – пока неизвестные функции.

Решение задачи 3 построим методом функции Римана [13, 14]. Пусть $w(x,y;\xi,\eta)$ – произвольная функция, определенная в области $D_2^*=\{(\xi,\eta):x<\xi<0,\ 0<\eta<y\}$ с границей

$$\partial D_2^*=MP\cup PA\cup AQ\cup QM\ ,$$

где $MP=\{(\xi,\eta):\xi=x, 0<\eta<y\}$, $PA=\{(\xi,\eta):x<\xi<\ell,\eta=0\}$,
$AQ=\{(\xi,\eta):\xi=0, 0<y<h\}$, $QM=\{(\xi,\eta):x<\xi<0,\eta=y\}$ (Рис. 1).

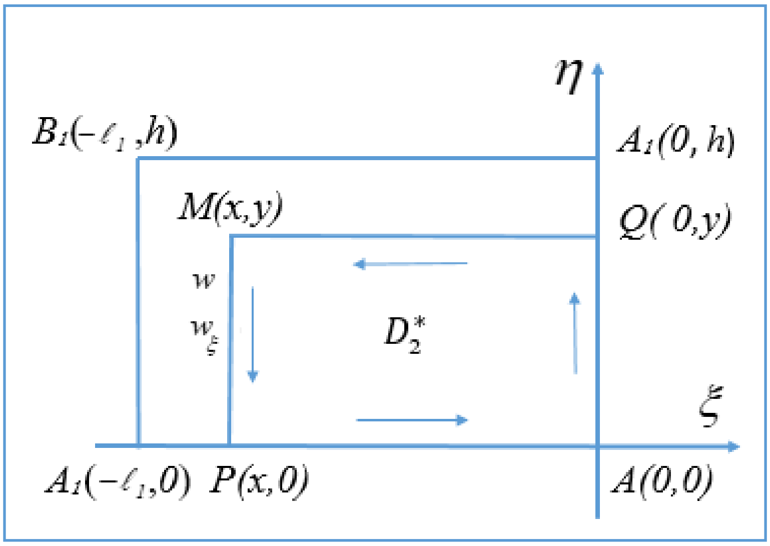

Рис. 1 – К построению функции Римана

Потребуем, чтобы функция $w(x,y;\xi,\eta)$ удовлетворяла по переменным (ξ,η) уравнению:

$$L_2^*(w)\equiv -w_{\xi\eta\xi}-(aw)_\xi-(bw)_\eta+cw=0 \qquad (17)$$

Рассмотрим тождество

$$wL_2(u)-uL_2^*(w)=[wu_{\xi\eta}+w_{\xi\eta}u+awu]_\xi-[w_\xi u_\xi-bwu]_\eta. \qquad (18)$$

Пусть $M(x,y)$ произвольная точка области D_2. Рассмотрим область $D_2^*=\{(\xi,\eta):x<\xi<0,\ 0<\eta<y\}$ с границей $\partial D_2^*=MP\cup PA\cup AQ\cup QM$, где $MP=\{(\xi,\eta):\xi=x,0<\eta<y\}$, $PA=\{(\xi,\eta):x<\xi<\ell,\eta=0\}$, $AQ=\{(\xi,\eta):\xi=0,0<y<h\}$, $QM=\{(\xi,\eta):x<\xi<0,\eta=y\}$.

Интегрируя тождество (18) по области D_2^* имеем

$$\iint\limits_{D_2^*}[wL_2(u)-uL_2^*(w)]d\xi d\eta=\int\limits_{\partial D_2^*}(w_\xi u_\xi-bwu)d\xi+(wu_{\xi\eta}+w_{\xi\eta}u+awu)d\eta. \qquad (19)$$

Пусть $w(x,y;\xi,\eta)\in C(\bar{D}_2^*)\cap C^{2,1}(D_2^*)$ является решением уравнения (17), удовлетворяющая следующим краевым условиям:

$$\begin{aligned} &w(x,y;\xi,\eta)\big|_{\xi=x}=0,\ 0\le\eta\le y,\\ &w_\xi(x,y;\xi,\eta)\big|_{\xi=x}=1,\ 0\le\eta\le y,\\ &w(x,y;\xi,\eta)\big|_{\eta=y}=\theta(x,y;\xi),\ x\le\xi\le 0,\end{aligned} \qquad (20)$$

где $\theta(x,y;\xi)$ – определяется как решение задачи Коши:

$$w_{\xi\xi}(x,y;\xi,y)-b(\xi,y)w(x,y;\xi,y)=0, \qquad (21)$$

$$w(x,y;\xi,y)\big|_{\xi=x}=0,\ w_\xi(x,y;\xi,y)\big|_{\xi=x}=1. \qquad (22)$$

Очевидно, что решение задачи (21) – (22) существует и единственно.

Методом интегрирования из уравнения (17) получим интегральное уравнение типа Вольтерра, допускающее единственное решение:

$$w(x,y;\xi,\eta)=\xi-x-\int_x^{\xi}(\xi-\xi_1)b(\xi_1,\eta)w(x,y;\xi_1,\eta)d\xi_1+$$
$$+\int_x^{\xi}d\xi_1\int_{\eta}^{y}\left[a(\xi_1,\eta_1)-(\xi-\xi_1)c(\xi_1,\eta_1)\right]w(x,y;\xi_1,\eta_1)d\eta_1. \qquad (23)$$

Интегрируя тождество (19) по области $D_2^*=\{(\xi,\eta): x<\xi<0, 0<\eta<y\}$ и учитывая свойства функции $w(x,y;\xi,\eta)$, получим решение задачи 3 в виде:

$$u(x,y)=w_{\xi}(x,y;0,y)\tau(y)+w_{\xi}(x,y;x,0)\psi_2(x)-w_{\xi}(x,y;0,0)\psi_2(0)-$$
$$-w(x,y;0,y)\nu(y)+w(x,y;0,0)\psi_2'(0)+\int_0^y w_{\eta}(x,y;0,\eta)\nu(\eta)d\eta- \qquad (24)$$
$$-\int_0^y[w_{\xi\eta}(x,y;0,\eta)+a(0,\eta)w(x,y;0,\eta)]\tau(\eta)]d\eta.$$

Рассмотрим теперь следующую нелокальную задачу для уравнения (2) в области D_2.

Задача 4. *Найти в области* D_2 *функцию* $u(x,y)\in C(\bar{D}_2)\cap C^1(D_2)\cap C^{2,1}(D_2)$, *удовлетворяющее уравнению (2) и условиям (7), (8) и (15).*

Нетрудно заметить, что для решения задачи 4, достаточно найти функцию $\nu(y)$. Используя нелокальное условие (7), из (24) имеем

$$A(y)\nu(y)=A(y)\tau(y)-\int_0^y B_1(y,\eta)\tau(\eta)d\eta+\int_0^y B_2(y,\eta)\nu(\eta)d\eta+\Psi_1(y),\ 0\le y\le h, \qquad (25)$$

где $A(y)=w(-\ell_1,y;0,y)+\alpha(y)w(x_0,y;0,y)$, $B_1(y,\eta)=w_{\xi\eta}(-\ell_1,y;0,\eta)+a(0,\eta)w(-\ell_1,y;0,\eta)+$

$+\alpha(y)\left[w_{\xi\eta}(x_0,y;0,\eta)+a(0,\eta)w(x_0,y;0,\eta)\right]$,

$B_2(y,\eta)=w_{\eta}(-\ell_1,y;0,\eta)+\alpha(y)w(x_0,y;0,\eta)$,

$\Psi_1(y)=-\varphi_3(y)+w_{\xi}(-\ell_1,y;-\ell_1,0)\psi_2(-\ell_1)-\left[w_{\xi}(-\ell_1,y;0,0)+\alpha(y)w_{\xi}(x_0,y;0,0)\right]\psi_2(0)+$

$+\left[w(-\ell_1,y;0,0)+\alpha(y)w(x_0,y;0,0)\right]\psi_2'(0)+\alpha(y)w_{\xi}(x_0,y;x_0,0)\psi_2(x_0)$.

Имеет место

Лемма 1. Если

$$\forall(x,y)\in\bar{D}_2: a(x,y)\ge 0,\ b(x,y)\le 0,\ c(x,y)\le 0,\ \alpha(y)\ge 0, \qquad (26)$$

тогда

$$\forall y\in[0,h]: A(y)\ge\ell. \qquad (27)$$

При доказательстве леммы 1 используется свойства функции Римана, которая определяется как решение интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода (23).

Используя неравенств (26), из (25) определим

$$\nu(y)=\tau(y)+\int_0^y B(y,\eta)\tau(\eta)d\eta+\Psi_2(y),\ 0\le y\le h, \qquad (28)$$

где $B(y,\eta)=R_1(y,\eta)-\frac{B_1(y,\eta)}{A(y)}+\int\limits_0^y\frac{B_1(\eta_1,\eta)}{A(\eta_1)}d\eta_1$,

$\Psi_2(y)=\Psi_1(y)+\int\limits_0^y R_1(y,\eta)\Psi_1(\eta)d\eta$, $R_1(y,\eta)$ – резольвента ядра $\frac{B_2(y,\eta)}{A(y)}$.

Исключая $\nu(y)$ из (14) и (28), получаем интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода со слабым ядром относительно $\tau(y)$:

$$\tau(y)=\int\limits_0^y K(y,\eta)\tau(\eta)d\eta+\Psi(y),\ 0\le y\le h, \tag{29}$$

где

$$K(y,\eta)=-\frac{1}{\sqrt{\pi(y-\eta)}}+N(y,\eta)+\int\limits_\eta^y\left[-\frac{1}{\sqrt{\pi(y-\eta_1)}}+N(y,\eta_1)\right]B(\eta_1,\eta)d\eta_1,$$

$$\Psi(y)=\Psi_2(y)-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^y\frac{\Psi_2(\eta)}{\sqrt{\pi(y-\eta)}}d\eta+\int\limits_0^y N(y,\eta)\Psi_2(\eta)d\eta,$$

допускающее единственное решение. После определения $\tau(y)$, последовательно находим $\nu(y)$, решение задачи 3, 2 и 1.

Таким образом, доказана следующая основная

Теорема 1. Если выполняются условия (3), (9), (26), тогда решение задачи 1 в области D существует и единственно.

Литература

1. Cannon J.R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy // Quart. Appl. Math. - 1963. T. 21, № 2. – P. 155 - 160.
2. Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Доклады АН СССР. 1969. Т. 185, №4. – С. 739-740.
3. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения. - 1977, т. 13, № 2. – С. 294–304.
4. Стригун М.В. Об одной нелокальной задаче с интегральными граничным условием для гиперболического уравнения // Вестник СамГУ. 2009. № 8(74). С. 78–87.
5. Пулькина Л.С., Савенкова А.Н. Нелокальная задача с интегральными условиями второго рода для гиперболического уравнения // Вестник Самарского университета. Естественнонаучная серия. 2016. №1-2. – Стр. 33-45.
6. Кожанов А.И., Тарасова Г.И. Задача Самарского – Ионкина с интегральным возмущением для псевдопараболического уравнения // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика, 42 (2022), Стр. 59–74.
7. Садыбеков М.А., Дилдабек Г., Тенгаева А.А. О новой нелокальной краевой задаче для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа // Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатики. №1(83). 2016. – Стр. 55 – 66.
8. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии.–М.: Высш. шк. 1995.–301 с.
9. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. – М.: Наука, 2006. – 287 с.
10. Сабитов К.Б. Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа. – М.: Наука, 2016. – 272 с.
11. Джураев Т.Д. Попёлек Я. О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка // Дифференциальные уравнения. – 1991. – Т. 27, № 10. – С. 1734-1745.
12. Джураев Т.Д., Сопуев А. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвёртого порядка. - Ташкент: Фан, 2000. – 144 с.
13. Шхануков М.Х. Локальные и нелокальные краевые задачи для уравнений третьего порядка: Дис … докт. физ.-мат. наук: 01.01.02. – Нальчик, 1985. – 225 с.

14. Жегалов В.И. Миронов А.Н. Дифференциальные уравнения со старшими частными производными // Казань: Изд. Казанского математического общества, 2001. – 226 с.
15. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанного-составного типов. – Ташкент: Фан, 1979. – 240 с.
16. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. – Ташкент: Фан, 1986. – 144 с.
17. Dzhuraev T. D. and Apakov Yu. P. On a self-similar solution of one third-order equation with multiple characteristics // Vestn. Samar. Tekh. Univ., Ser.: Fiz.-Mat. Nauki. 2007. 2 (15). 18–26.
18. Кожобеков К. Г. Нелокальная задача сопряжения для нелинейных уравнений в частных производных третьего порядка // Вестник КазНУ, сер. мат., мех., инф. 2009. №1 (60). 3–40.
19. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. – Новосибирск: Сибирское научное издание, 2009. – 457 с.
20. Юлдашев Т.К. Нелокальная краевая задача для неоднородного псевдопараболического интегро-дифференциального уравнения с вырожденным ядром // Вестн. Волгогр. гос. ун-та. Сер. 1, Мат. Физ. 2017. Выпуск 1(38). 42–54.
21. Yuldashev T. K. On a boundary value problem for an integro-differential partial differential equations of the fourth order with a degenerate kernel. Itogi Nauki Tekh. Ser.: Sovrem. Mat. Prilozh., Temat. Obzory. 2018. 145. 95–109.
22. Апаков Ю. П., Мамажонов С. М. Разрешимость одной краевой задачи для уравнения четвертого порядка параболо-гиперболического типа в пятиугольной области // Сибирский журнал индустриальной математики. 2021. Т. 24. - С.25–38. DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.402
23. Yuldashev T. K., Apakov Yu. P. and Zhuraev A. Kh. Boundary value problem for third order partial integrodifferential equation with a degenerate kernel // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021, 42, 1317–1327. DOI: 10.1134/S1995080221060329.
24. Апаков Ю.П., Мамажонов С.М. Разрешимость одной краевой задачи для уравнения четвёртого порядка параболо-гиперболического типа в пятиугольной области. Сибирский журнал индустриальной математики. 2021. Т. 24, № 4. С. 25–38. DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.402
25. Сопуев А., Апаков Ю.П., Мирзаев О.М. Решение второй краевой задачи для уравнения пятого порядка с кратными характеристиками // Вестник ОшГУ. 2022. №1. – С. 136–148. DOI: 10.52754/16947452-2022-1-136.
26. Apakov Yu. P., Umarov R.A. On unique solvability of boundary-value problem for a viscous transonic equation // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2022, Vol. 41, 738-748. DOI: 10.1134/S199508022206004X.
27. Мамажанов М., Шерматова Х.М. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа в треугольной области с тремя линиями изменения типа уравнения // Сибирский журнал индустриальной математики. 2022. Том 25, №3(91). – С. 93-103.
28. Apakov Yu. P., Sopuev A.A. Boundary Value Problems for a Mixed Equation of Parabolic-Hyperbolic Type of the Third Order // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2023, Vol. 44, No. 12, pp. 5149–5157.
29. Сопуев А., Нуранов Б.С. Краевые задачи для смешанного параболическо-гиперболического уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами // Лобачевский Я. Математика 45, 3424–3431 (2024). https://doi.org/10.1134/S1995080224604089
30. Трикоми Ф. О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа. – М.-Л.: Гостехиздат, 1949. – 190 с.
31. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. Интегральные уравнения: Задачи и примеры с подробными решениями. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 192 с.
32. Полянин А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.