УДК 517.9
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_2(5)_10

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РАЗЛОЖЕНИЯ В ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ РЯДЫ ПО СПЕКТРАЛЬНОМУ ПАРАМЕТРУ В ЗАДАЧАХ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Кангужин Балтабек Есматович, доктор ф.-м.н., профессор
kanguzhin53@gmail.com
Хужахметов Жамшид Жангабайулы, магистрант
qjhmtv@gmail.com
Казахский Национальный университет имени Аль-Фараби
Алматы, Казахстан

Аннотация. *В статье рассматривается применение метода разложения в экспоненциальные ряды по спектральному параметру для решения задач на собственные значения операторов Штурма-Лиувилля. Предложен новый подход к разложению характеристического определителя в экспоненциальные ряды, показавший эффективность для вычисления больших собственных значений. Теоретические положения подкреплены асимптотическими формулами для собственных значений и собственных функций. Обсуждаются практические методы достижения более высокой вычислительной точности. Работа основывается на развитии ранее предложенных методов и открывает новые перспективы в численном анализе задач математической физики.*

Ключевые слова: *оператор Штурма-Лиувилля, спектральный анализ, экспоненциальные ряды.*

ӨЗДҮК МААНИЛЕР МАСЕЛЕСИНДЕ СПЕКТРАЛДЫК ПАРАМЕТР БОЮНЧА ЭКСПОНЕНЦИАЛДЫК КАТАРЛАРГА АЖЫРАТУУ ЫКМАСЫН КОЛДОНУУ

Кангужин Балтабек Есматович, ф.-м.и. доктору, профессор
kanguzhin53@gmail.com
Хужахметов Жамшид Жангабайулы, магистрант
qjhmtv@gmail.com
Аль-Фараби атындагы Казак Улуттук Университети
Алматы, Казахстан

Аннотация. *Макалада Штурм-Лиувилль операторлорунун өздүк маанилерин эсептөөгө спектралдык параметр боюнча экспоненциалдык катарларды колдонуу каралат. Характеристикалык детерминантты экспоненциалдык катарларга ажыратуунун жаңы ыкмасы сунушталып, чоң өздүк маанилерди эсептөөдө эффективдүү экени көрсөтүлдү. Теориялык негиздер өздүк маанилер жана өздүк функциялар үчүн асимптотикалык формулалар менен бекемделет. Эсептөөлөрдүн тактыгын жогорулатуу үчүн практикалык ыкмалар талкууланат. Бул иш мурдагы ыкмаларды өнүктүрүүгө негизделип, математикалык физиканын сандык анализинде жаңы мүмкүнчүлүктөрдү ачат.*

Ачкыч сөздөр: *Штурм-Лиувилль оператору, спектралдык анализ, экспоненциалдык катарлар.*

APPLICATION OF THE METHOD OF DECOMPOSITION INTO EXPONENTIAL SERIES BASED ON THE SPECTRAL PARAMETER IN EIGENVALUE PROBLEMS

Kanguzhin Baltabek Esmatovich, Doctor of Ph. and Math.l Sc., Professor
kanguzhin53@gmail.com
Khujakmetov Jamshid Zhangabaiuly, Master's Student
qjhmtv@gmail.com
Al-Farabi Kazakh National University

Almaty, Kazakhstan

Abstract. *The article explores the application of exponential series based on the spectral parameter to solve eigenvalue problems of Sturm-Liouville operators. A novel approach for decomposing the characteristic determinant into exponential series is proposed, demonstrating effectiveness for computing large eigenvalues. The theoretical framework is supported by asymptotic formulas for eigenvalues and eigenfunctions. Practical methods for achieving higher computational precision are also discussed. The work is based on an extension of earlier methods and offers new perspectives for numerical analysis in mathematical physics.*

Key words: *Sturm-Liouville operator, spectral analysis, exponential series.*

1. Введение

В работе [6] предложен метод разложения в степенные ряды по спектральному параметру, который оказался эффективным для численного нахождения собственных значений оператора Штурма-Лиувилля. Задача вычисления собственных значений оператора Штурма-Лиувилля сводится к нахождению нулей так называемого характеристического определителя $\Delta(\lambda)$. Характеристический определитель оператора Штурма-Лиувилля представляет целую функцию от спектрального параметра λ. Таким образом, характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ разлагается в степенной ряд по спектральному параметру λ с бесконечным радиусом сходимости. В работе [6] дан простой способ нахождения коэффициентов Тейлора. Оказалось, что рекуррентные формулы для нахождения коэффициентов Тейлора дают простой и мощный метод для численного вычисления собственных значений. Однако такой подход эффективен при вычислении не очень больших собственных значений. Для очень больших собственных значений метод, предложенный в работе [6], не то чтобы неэффективен, но для нахождения таких собственных значений целесообразно использовать экспоненциальные ряды по спектральному параметру. Предлагаемые нами экспоненциальные ряды эффективны для вычисления достаточно больших по модулю собственных значений.

2. Экспоненциальные ряды по спектральному параметру для уравнения Штурма-Лиувилля на отрезке

Рассмотрим линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка на отрезке

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \ 0 \le x \le b. \tag{1}$$

Такие уравнения называют уравнениями Штурма-Лиувилля. Коэффициент $q(x)$ часто называют потенциалом. Условия, которыми удовлетворяет потенциал, будут уточняться в зависимости от изучаемой проблемы. Комплексное число λ играет роль спектрального параметра. Часто вместо параметра λ удобно использовать параметр ρ, так что $\rho^2 = \lambda$.

Предположим, что λ - комплексное число. Через $\varphi(x,\lambda)$ обозначим решение однородного уравнения (1), подчиненного условиям Коши при $x = b$:

$$\varphi(b,\rho) = 1, \ \varphi'(b,\rho) = h, \tag{2}$$

где h - некоторая комплексная константа.

Согласно результатам монографии [1], решение $\varphi(b,\rho)$ является решением интегрального уравнения:

$$\varphi(x,\rho)=\cos\rho(x-b)+h\frac{\sin\rho(x-b)}{\rho}+\int_x^b\frac{\sin\rho(x-b)}{\rho}q(t)\varphi(t,\rho)dt.$$

Положим

$$\varphi_0(x,\rho)=\cos\rho(x-b)+h\tfrac{\sin\rho(x-b)}{\rho}. \qquad (3)$$

Пусть при

$$\varphi_n(x,\rho)=\int_x^b\tfrac{\sin\rho(x-b)}{\rho}q(t)\varphi_{n-1}(t,\rho)dt. \qquad (4)$$

В монографии [1] доказано, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k(x,\rho)$ сходится равномерно по λ для $|\lambda|\le N$ и равномерно x для $x\in[0;b]$. Здесь N - произвольное положительное число. Таким образом, функция $\varphi(x,\rho)$ является целой функцией от параметра ρ^2.

Для дальнейших целей удобно получить экспоненциальное представление для $\varphi_n(x,\rho)$. Из соотношений (4) при фиксированном натуральном n имеем равенство:

$$\varphi_n(t_{n+1,}\lambda)=\frac{1}{(\sqrt{\lambda})^n}\int_b^{t_{n+1}}dt_n\dots\int_b^{t_3}dt_2\int_b^{t_2}dt_1\prod_{i=1}^{n}q(t_i)\prod_{i=1}^{n}\sin\sqrt{\lambda}\,(t_{i+1}-t_i)\left[\cos\sqrt{\lambda}\,(t_1-b)+\frac{h}{\lambda}\sin(t_1-b)\right],\qquad n=1,2,\dots,$$

где $t_{n+1}=x$.

Через I_n обозначим -мерный единичный параллелепипед, вершины которого имеют вид $(0,e^2,e^3,\dots,e^{\mathrm{n}})$. Здесь числа e_i $(i=\overline{1,n})$ могут принимать значения либо ноль, либо один. Пусть фиксирована вершина $(0,e^2,e^3,\dots,e^{\mathrm{n}})\in I_n$, тогда через M_0 обозначим количество равных между собой соседних координат. Иначе говоря,

$$M_0=card\{\exists i\in[1,n]\cap\mathbb{N}:\ e_i=e_{i+1}\}.$$

Используя тождество при $n=2k-1$:

$$\begin{cases} n=2k-1:\ \prod_{i=1}^{2k-1}\sin\alpha_i=\frac{4}{4^k}\sum_{\left(o\varepsilon_1\,\varepsilon_2\dots\varepsilon_{2k-1}\right)\in I_{2k-1}}(-1)^{k-1+\sum_{s=1}^{2k-1}\varepsilon_s}\sin\sum_{i=1}^{2k-1}(-1)^{\varepsilon_i}\alpha_i\,, \\ n=2k:\ \prod_{i=1}^{2k}\sin\alpha_i=\frac{2}{4^k}\sum_{(o\varepsilon_1\varepsilon_2\dots\varepsilon_{2k})\in I_{2k}}(-1)^{k+\sum_{s=1}^{2k}\varepsilon_s}\cos\sum_{i=1}^{2k}(-1)^{\varepsilon_i}\alpha_i\,, \end{cases} \qquad (5)$$

при $n=2k-1$ и $n=2k$ из соотношения (5)-(6) выводим требуемые экспоненциальные представления.

Для этого введем величины при $n=2k-1$:

$$min\mathcal{T}_{1(2k-1)}=\left((-1)^{\varepsilon_{2k-1}}+2\left(k-1+A\left[\frac{M_0}{2}\right]-M_0\right)\right)x-\left(2\left(k-A\left[\frac{M_0}{2}\right]\right)-1\right)b,$$

$$max\mathcal{T}_{1(2k-1)}=\left((-1)^{\varepsilon_{2k-1}}-2\left(k-1-A\left[\frac{M_0}{2}\right]\right)\right)x+\left(2\left(k+A\left[\frac{M_0}{2}\right]-M_0\right)-3\right)b,$$

$$min\mathcal{T}_{2(2k-1)}=\left(-(-1)^{\varepsilon_{2k-1}}+2\left(k+A\left[\frac{M_0}{2}\right]-M_0\right)\right)x-\left(2\left(k-A\left[\frac{M_0}{2}\right]\right)-1\right)b,$$

$$min\mathcal{T}_{2(2k-1)} = \left(-(-1)^{\varepsilon_{2k-1}} + 2\left(k + A\left[\frac{M_0}{2}\right] - M_0\right)\right)x - \left(2\left(k - A\left[\frac{M_0}{2}\right]\right) - 1\right)b,$$

при $n = 2k$:

$$min\mathcal{T}_{1(2k)} = \left((-1)^{\varepsilon_{2k-1}} + 2\left(k - A\left[\frac{M_0}{2}\right]\right)\right)x - \left(2\left(k - A\left[\frac{M_0}{2}\right] - M_0\right) - 1\right)b,$$

$$max\mathcal{T}_{1(2k)} = \left((-1)^{\varepsilon_{2k-1}} + 2\left(k - 1 - A\left[\frac{M_0}{2}\right] - M_0\right)\right)x + \left(2\left(k + A\left[\frac{M_0}{2}\right]\right) - 1\right)b,$$

$$min\mathcal{T}_{2(2k)} = \left(2 - (-1)^{\varepsilon_{2k-1}} + 2\left(k - A\left[\frac{M_0}{2}\right]\right)\right)x - \left(2\left(k + A\left[\frac{M_0}{2}\right] - M_0\right) - 1\right)b,$$

$$min\mathcal{T}_{2(2k)} = \left(-(-1)^{\varepsilon_{2k-1}} - 2\left(k - 1 + A\left[\frac{M_0}{2}\right] - M_0\right)\right)x - \left(2\left(k - A\left[\frac{M_0}{2}\right]\right) + 1\right)b.$$

Лемма 1. Пусть k - фиксированное натуральное число. Тогда найдется непрерыные по τ функций $A^{M_0}_{1(2k-1)}(x, \tau_{1(2k-1)}, b)$, $A^{M_0}_{2(2k-1)}(x, \tau_{2(2k-1)}, b)$, $B_{2k-1}(x)$ такие, что справедливо экспоненциальное представления

$$\begin{aligned}
&\varphi_{2k-1}(x,\rho) \\
&= \sum_{\varepsilon_{2k-1}=0}^{1} \sum_{M_0=0}^{2k-1} C^{M_0}_{2k-2} \left[\frac{1}{\rho^{2k-1}} \int\limits_{min\tau_{1(2k-1)}}^{max\tau_{1(2k-1)}} A_{1(2k-1)}(x, \tau_{1(2k-1)}, b) sin\rho\tau_{1(2k-1)} d\tau_{1(2k-1)}\right. \\
&- \frac{1}{\rho^{2k-1}} \int\limits_{min\tau_{2(2k-1)}}^{max\tau_{2(2k-1)}} A^{M_0}_{2(2k-1)}(x, \tau_{2(2k-1)}, b) sin\rho\tau_{2(2k-1)} d\tau_{2(2k-1)} \\
&+ \frac{h}{\rho^{2k}} \int\limits_{min\tau_{2(2k-1)}}^{max\tau_{2(2k-1)}} A^{M_0}_{2(2k-1)}(x, \tau_{2(2k-1)}, b) cos\rho\tau_{2(2k-1)} d\tau_{2(2k-1)} \\
&\left. - \frac{h}{\rho^{2k}} \int\limits_{min\tau_{1(2k-1)}}^{max\tau_{1(2k-1)}} A^{M_0}_{1(2k-1)}(x, \tau_{1(2k-1)}, b) cos\rho\tau_{1(2k-1)} d\tau_{1(2k-1)}\right] \\
&+ \frac{1}{\rho^{2k-1}} B_{2k-1}(x) sin\rho(x-b) - \frac{1}{\rho^{2k-1}} \int\limits_{b-x}^{x-b} A^{2k-1}_{2(2k-1)}(x, \tau_{2(2k-1)}, b) sin\rho\tau_{2(2k-1)} d\tau_{2(2k-1)} \\
&- \frac{h}{\rho^{2k}} B_{2k-1}(x) cos\rho(x-b) + \frac{h}{\rho^{2k-1}} \int\limits_{b-x}^{x-b} A^{2k-1}_{2(2k-1)}(x, \tau_{2(2k-1)}, b) cos\rho\tau_{2(2k-1)} d\tau_{2(2k-1)}.
\end{aligned}$$

Лемма 2. Пусть k - фиксированное натуральное число. Тогда найдется непрерыные по τ функций $A_{1(2k)}^{M_0}(x,\tau_{1(2k)},b)$, $A_{2(2k)}^{M_0}(x,\tau_{2(2k)},b)$, $B_{2k}(x)$ такие, что справедливо экспоненциальное представления

$$\varphi_{2k}(x,\rho)=\sum_{\varepsilon_{2k-1}=0}^{1}\sum_{M_0=0}^{2k-3}C_{2k-1}^{M_0}\left[\frac{1}{\rho^{2k}}\int_{min\tau_{1(2k)}}^{max\tau_{1(2k)}}A_{1(2k)}(x,\tau_{1(2k)},b)cos\rho\tau_{1(2k)}d\tau_{1(2k)}\right.$$
$$+\frac{1}{\rho^{2k}}\int_{min\tau_{2(2k)}}^{max\tau_{2(2k)}}A_{2(2k)}^{M_0}(x,\tau_{2(2k)},b)cos\rho\tau_{2(2k)}d\tau_{2(2k)}$$
$$+\frac{h}{\rho^{2k+1}}\int_{min\tau_{2(2k)}}^{max\tau_{2(2k)}}A_{2(2k)}^{M_0}(x,\tau_{2(2k)},b)sin\rho\tau_{2(2k)}d\tau_{2(2k)}$$
$$\left.-\frac{h}{\rho^{2k+1}}\int_{min\tau_{1(2k)}}^{max\tau_{1(2k)}}A_{1(2k)}^{M_0}(x,\tau_{1(2k)},b)sin\rho\tau_{1(2k)}d\tau_{1(2k)}\right]$$
$$+\frac{1}{\rho^{2k}}B_{2k}(x)cos\rho(x-b)-\frac{1}{\rho^{2k}}\int_{b-x}^{x-b}A_{2(2k-1)}^{2k}(x,\tau_{2(2k)},b)cos\rho\tau_{2(2k)}d\tau_{2(2k)}$$
$$+\frac{h}{\rho^{2k+1}}B_{2k}(x)sin\rho(x-b)$$
$$+\frac{h}{\rho^{2k+1}}\int_{b-x}^{x-b}A_{2(2k-1)}^{2k}(x,\tau_{2(2k)},b)sin\rho\tau_{2(2k)}d\tau_{2(2k)}.$$

Используя леммы 1 и 2, требуемое решение задачи (1) - (2) может быть записано в виде экспоненциального ряда по спектральному параметру.

Теорема. Пусть $q\in C[a,b]$. Тогда для любого комплексного λ решение задачи (1) - (2) существует и единственно, причем справедливо представлений

$$\varphi(x,\rho)=cos\rho(x-b)+\frac{1}{\rho}\big(h+B_1(x)\big)sin(x-b)-\frac{1}{\rho}\int_{b-x}^{x-b}A_{23}^{1}(x,\tau_{23},b)sin\rho\tau_{23}d\tau_{23}-$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\rho^{2k}}(B_{2k}(x)-hB_{2k+1}(x))cos\rho(x-b)+\right.$$
$$\frac{1}{\rho^{2k}}\sum_{\varepsilon_{2k-1}=0}^{1}\Big(\sum_{M_0=0}^{2k-3}C_{2k-1}^{M_0}\int_{min\tau_{1(2k-1)}}^{max\tau_{1(2k-1)}}A_{2(2k+1)}\big(x,\tau_{2(2k+1)},b\big)cos\rho\tau_{1(2k-1)}d\tau_{1(2k+1)}-$$
$$\sum_{M_0=0}^{2k-3}C_{2k-1}^{M_0}\int_{min\tau_{1(2k+1)}}^{max\tau_{1(2k+1)}}A_{1(2k+1)}^{M_0}\big(x,\tau_{1(2k+1)},b\big)cos\rho\tau_{1(2k+1)}d\tau_{1(2k+1)}+$$
$$\sum_{M_0=0}^{2k-3}C_{2k-1}^{M_0}\int_{min\tau_{1(2k)}}^{max\tau_{1(2k)}}A_{1(2k)}\big(x,\tau_{1(2k)},b\big)cos\rho\tau_{1(2k)}d\tau_{1(2k)}+$$
$$\sum_{M_0=0}^{2k-2}C_{2k-1}^{M_0}\int_{min\tau_{2(2k)}}^{max\tau_{2(2k)}}A_{2(2k)}^{M_0}\big(x,\tau_{2(2k)},b\big)cos\rho\tau_{2(2k)}d\tau_{2(2k)}\Big)+$$
$$h\int_{b-x}^{x-b}A_{2(2k-1)}^{2k+1}\big(x,\tau_{2(2k-1)},b\big)cos\rho\tau_{2(2k-1)}d\tau_{2(2k-1)}+$$

$\int_{b-x}^{x-b} A_{2(2k-1)}^{2k}(x,\tau_{2(2k)},b)cos\rho\tau_{2(2k)}d\tau_{2(2k)} + \frac{1}{\rho^{2k+1}}(B_{2k+1}(x)+hB_{2k}(x))sin\rho(x-b) +$
$\frac{1}{\rho^{2k+1}}\sum_{\varepsilon_{2k-1}=0}^{1}\Big(\sum_{M_0=0}^{2k-3} C_{2k-2}^{M_0}\int_{min\tau_{1(2k-1)}}^{max\tau_{1(2k-1)}} A_{1(2k+1)}(x,\tau_{1(2k+1)},b)sin\rho\tau_{1(2k+1)}d\tau_{1(2k+1)} -$
$\sum_{M_0=0}^{2k-3} C_{2k-2}^{M_0}\int_{min\tau_{2(2k+1)}}^{max\tau_{2(2k+1)}} A_{2(2k+1)}^{M_0}(x,\tau_{2(2k+1)},b)sin\rho\tau_{2(2k+1)}d\tau_{2(2k+1)} +$
$\sum_{M_0=0}^{2k-2} C_{2k-1}^{M_0}\int_{min\tau_{2(2k)}}^{max\tau_{2(2k)}} A_{2(2k)}^{M_0}(x,\tau_{2(2k)},b)sin\rho\tau_{2(2k)}d\tau_{2(2k)} +$
$h\sum_{M_0=0}^{2k-2} C_{2k-1}^{M_0}\int_{min\tau_{1(2k)}}^{max\tau_{1(2k)}} A_{1(2k)}^{M_0}(x,\tau_{1(2k)},b)sin\rho\tau_{1(2k)}d\tau_{1(2k)}\Big) -$
$\int_{b-x}^{x-b} A_{2(2k+1)}^{2k-1}(x,\tau_{2(2k+1)},b)sin\rho\tau_{2(2k+1)}d\tau_{2(2k+1)} +$
$h\int_{b-x}^{x-b} A_{2(2k-1)}^{2k}(x,\tau_{2(2k)},b)sin\rho\tau_{2(2k)}d\tau_{2(2k)}\Big\}.$

(6)

3. Асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций.

Займемся теперь выводом асимптотических формул для собственных значений и собственных функций. Из этих формул, в частности, будет следовать существование бесчисленного множества собственных значений.

По-прежнему предположим вначале, что $h \neq \infty$ и $H \neq \infty$ При любом λ функция $\varphi(x,\lambda)$ удовлетворяет, очевидно, первому из краевых условий (1) - (2). Поэтому мы определим собственные значения, если подставим функцию $\varphi(x,\lambda)$ во второе краевое условие.

Согласно лемме 1.2 из [1] собственные значения действительны, т.е. $Im\rho = 0$. Поэтому оценим ряд (7) следующим образом:

$$\varphi(x,\rho) = cos\rho(x-b) + \frac{1}{\rho}\big(h + B_1(x)\big)sin\rho(x-b) - \frac{1}{\rho}\int_{b-x}^{x-b} A_{23}^1(x,\tau_{23},b)sin\rho\tau d\tau + \xi_1. \quad (6')$$

Далее, дифференцируя равенство (6') по x и используя оценку (6'), нетрудно получить оценку:

$$\varphi'_x(x,\rho) = \rho sin\rho(x-b) + \big(h + B_1(x)\big)cos\rho(x-b) - A_{23}^1(x,\tau_{23},b)\frac{sin\rho\tau}{\rho}$$
$$+\frac{1}{\rho}\int_b^x A_{23}^1(x,\tau_{23},b)_x\frac{sin\rho\tau}{\rho}d\tau + \xi_1. \quad (7)$$

Теперь, подставляя значения функций $\varphi(x,\rho)$ и $\varphi'_x(x,\rho)$ из оценок (6') и (7) во второе краевое условие (2), для определения собственных значений получим следующее уравнение:

$$cos\rho b - \big(h + B_1(x)\big)\frac{sin\rho\tau}{\rho} + \int_{-b}^{b} A_{23}^1(0,\tau_{23},b)\frac{sin\rho\tau}{\rho}d\tau + \xi_1 = 0$$

$$\rho \to \infty: cos\rho b = 0, \rho_0 = \frac{\pi}{2b}(2m+1), m \in \mathbb{Z}. \quad (8)$$

Корень ищем в виде $\rho = \frac{\pi}{2b(2m+1)} + \delta(m), m \in \mathbb{Z}$. Тогда из уравнения (8) имеем соотношение:

$$cos\left(\frac{\pi}{2}(2m+1)+b\delta\right)-\left(h+B_1(0)\right)\left(\frac{\pi}{2b}(2m+1)+\delta\right)^{-1}sin\left(\frac{\pi}{2}(2m+1)+b\delta\right)+$$

$$+\int_{-b}^{b}A_{23}^{1}(0,\tau_{23},b)\left(\frac{\pi}{2b}(2m+1)+\delta\right)^{-1}sin\left(\frac{\pi}{2}(2m+1)+b\delta\right)d\tau+\xi_1=0 \quad (9)$$

или

$$(-1)^{m+1}sinb\delta+(-1)^{m+1}\left(h+B_1(0)\right)\left(\frac{\pi}{2b}(2m+1)+\delta\right)^{-1}cosb\delta$$

$$+(-1)^{m}\int_{-b}^{b}A_{23}^{1}(0,\tau_{23},b)\left(\frac{\pi}{2b}(2m+1)+\delta\right)^{-1}cosb\delta d\tau+\xi_1=0$$

Отсюда при $m\to\infty$ следует предельное соотношение

$$\lim_{\mathrm{m}\to\infty} sinb\delta(m)=0,$$

которое эквивалентно равенству

$$\lim\nolimits_{\mathrm{m}\to\infty}\delta(m)=0 \quad (10)$$

Из соотношения (9) с учетом пределного равенства (10) имеем

$$(-1)^{m+1}sinb\delta+(-1)^{m+1}\left(h+B_1(0)\right)\left(\frac{\pi}{2b}(2m+1)+\delta\right)^{-1}cosb\delta$$

$$+(-1)^{m}\int_{-b}^{b}A_{23}^{1}(0,\tau_{23},b)\left(\frac{\pi}{2b}(2m+1)+\delta\right)^{-1}cosb\delta d\tau+\xi_1=0$$

Отсюда находим приближенное значение $\delta(m)$. Указанный процесс уточнения вычисления корней можно продолжить до требуемой точности. Таким образом, полученное приближённое значение можно использовать в качестве решения с необходимой точностью. Продолжая процесс уточнения вычисления корней, можно добиться ещё большей точности.

Литература

1. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Введение в спектральную теорию. Самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы. Москва: Наука, 1970. 672 стр.
2. Bondarenko N. An inverse problem for Sturm-Liouville operators on trees with partial information given on the potentials. // Math. Meth. Appl. Sci. - 2018. - Vol. 41.
3. Bondarenko N. Inverse problem for a differential operator on a star-shaped graph with nonlocal matching condition.
4. Law C., Pivovarchik V. Characteristic functions on quantum graphs // J. Phys. A: Math. Theor. 2009.
5. R. Carlson, V. Pivovarchik. Spectral asymptotics for quantum graphs with equal edge lengths. J. Phys. A: Math. Theor. 41 (2008) 145202, 16 pp.
6. V.V. Kravchenko, R.M. Porter, Spectral parameter power series for Sturm–Liouville problems. Math. Method Appl. Sci. 33, 459–468 (2010).
7. Berkolaiko G., Carlson R., Fulling S., Kuchment P. Quantum Graphs and Their Applications // Amer. Math. Soc. 2006.