УДК 514.75
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_2(5)_9

# $E_6$ МЕЙКИНДИГИН БӨЛҮКТӨП ЧАГЫЛТУУНУН КВАЗИКОШМОК СЫЗЫГЫ ЖӨНҮНДӨ

*Зулпукар кызы Анаргул, магистрант*
*zulpukarkyzy213478@oshsu.kg*
*Режапова Нигорахон Абдухашимовна, магистрант*
*rezhapova094323@oshsu.kg*
*Момунова Айзирек Абдибалиевна, магистрант*
*momunova121886@oshsu.kg*
*Ош мамлекеттик университети*
*Ош, Кыргызстан*

***Аннотация.*** *$\Omega \subset E_6$ аймагында ушундай жылма сызыктардын көптүгү берилген: ар бир $X \in \Omega$ чекити аркылуу берилген көптүктүн бир гана $\omega^1$ сызыгы өтөт. Ушул сызык үчүн Френенин репери [1] боло тургандай кыймылдуу репер тандалып алынган. Бул репердин координаталык векторлорунун интегралдык сызыктары Френенин торчосун [2] түзүшөт. Ушул торчонун $\omega^1$ сызыгынын жанымасында $F_1^6$ чекити инварианттык түрдө аныкталат. $X$ чекити $\Omega$ аймагында кыймылга келгенде, $F_1^6$ чекити өзүнүн $\Omega_1^6 \subset E_6$ аймагын “сызып” чыгат. Натыйжада $f_1^6(X) = F_1^6$ боло тургандай $f_1^6 : \Omega \to \Omega_1^6$ бөлүктөп чагылтуусу аныкталат.*

*$\Delta_4 = (X, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_5, \vec{e}_6)$ жана $f_1^6(\Delta_4) = \Delta'_4$ бөлүштүрүүсү каралган. Френенин торчосу Френенин циклдик торчосу болгон учурда $\theta \subset \Delta_5$ жана $\bar{\theta} = f_1^6(\theta)$ сызыктары $(\Delta_4, \Delta'_4)$ түгөй бөлүштүрүүлөрүнүн $f_1^6$ бөлүктөп чагылтуусундагы квазикошмок сызыктары болушунун зарыл жана жетиштүү шарты далилденген.*

***Ачкыч сөздөр:*** *евклиддик мейкиндик, бөлүктөп чагылтуу, Френенин репери, Френенин торчосу, квазикошмок сызык, бөлүштүрүү.*

# О КВАЗИДВОЙНОЙ ЛИНИИ ЧАСТИЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА $E_6$

*Зулпукар кызы Анаргул., магистрант*
*zulpukarkyzy213478@oshsu.kg*
*Режапова Нигорахон Абдухашимовна, магистрант*
*rezhapova094323@oshsu.kg*
*Момунова Айзирек Абдибалиевна, магистрант*
*momunova121886@oshsu.kg*
*Ошский государственный университет*
*Ош, Кыргызстан*

***Аннотация.*** *В области $\Omega \subset E_6$ рассмотрено семейство гладких линий: через каждую точку $X \in \Omega$ проходит одна линия $\omega^1$ заданного семейства. В пространстве $E_6$ выбран подвижной репер таким образом, чтобы он был репером Френе [1] для линии $\omega^1$ заданного семейства. Интегральные линии координатных векторов этого репера образуют сеть Френе [1]. На касательной к линии $\omega^1$ этой сети инвариантным образом определяется точка $F_1^6$. Когда точка $X$ смещается в области $\Omega$, точка $F_1^6$ описывает свою область $\Omega_1^6 \subset E_6$. В результате получается частичное отображение $f_1^6 : \Omega \to \Omega_1^6$ такое, что $f_1^6(X) = F_1^6$.*

*Рассмотрены четырехмерные распределения $\Delta_4 = (X, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_5, \vec{e}_6)$ и $f_1^6(\Delta_4) = \Delta'_4$. В случае, когда сеть Френе является циклической сетью Френе доказаны необходимое и достаточное условия для того,* *чтобы линии $\theta \subset \Delta_5$ и $\bar{\theta} = f_1^6(\theta)$ являлись квазидвойными линиями пары распределений $(\Delta_4, \Delta'_4)$ в частичном отображении $f_1^6$.*

***Ключевые слова:*** *евклидово пространство, частичное отображение, репер Френе, сеть Френе, распределение, квазидвойная линия.*

## ABOUT QUASI-DOUBLE LINE OF THE PARTIAL MAPPING OF THE SPACE $E_6$

*Zulpukar kyzy Anargul, undergraduate*
*zulpukarkyzy213478@oshsu.kg*
*Rezhapova Nigorakhon Abduhashimovna, undergraduate*
*rezhapova094323@oshsu.kg*
*Momunova Ayzirek Abdibalievna, undergraduate*
*momunova121886@oshsu.kg*
*Osh State University*
*Osh, Kyrgyzstan*

***Abstract:*** *In domain $\Omega \subset E_6$ it is considered the family of smooth lines such than through a point $X \in \Omega$ passes one line $\omega^1$ of given family. A movable frame $\mathcal{R}$ of the space $E_6$ chosen as follows: $\mathcal{R}$ was Frenet's frame for the line $\omega^1$ of given family. The integral lines of the coordinate vectors of this frame form a Frenet's net. On the tangent to the line $\omega^1$ of this net the point $F_1^6$ is defined in an invariant way. When the point X moves in the domain $\Omega$, the point $F_1^6$ describes it's domain $\Omega_1^6 \subset E_6$. Thus we get the partial mapping $f_1^6: \Omega \to \Omega_1^6$ such, that $f_1^6(X) = F_1^6$.*

*It is considered the four dimensional distributions $\Delta_4 = (X, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_5, \vec{e}_6)$ and $f_1^6(\Delta_4) = \Delta'_4$.*

*If the case when net of Frenet is cyclic net of Frenet it is proved necessary and sufficient conditions for lines $\theta \subset \Delta_5$ and $\bar{\theta} = f_1^6(\theta)$ to be quasi-double lines of the pair of distributions $(\Delta_4, \Delta'_4)$ in the partial mapping $f_1^6$.*

***Key words:*** *Euclidean space, of Frenet's net, Frenet's frame, partial mapping, distribution, quasi-double line.*

**Киришүү.** $\Omega \subset E_6$ мейкиндигинин $\Omega$ аймагында ушундай жылма сызыктардын көптүгү берилген $X \in \Omega$ ар бир чекити аркылуу аркылуу берилген көптүктүн бирден гана сызыгы өтөт. Ортонормаланган,

$\mathcal{R} = (X, \vec{e}_{i,})$ $(i, j, k = \overline{1,6})$ реперин $\Omega$ аймагында бул репер берилген көптүктүн $\omega^1$ сызыгы үчүн Френенин репери [1,2] боло тургандай тандап алабыз. $\mathcal{R}$ реперинин деривациондук формулалары төмөнкүдөй көрүнүштө болушат:

$$d\overrightarrow{X} = \omega^i \vec{e}_i, \; d\vec{e}_i = \omega_i^k \vec{e}_k. \tag{1}$$

Мындагы $\omega^i$, $\omega_i^k$ дифференциалдык формалары евклиддик мейкиндиктин структуралык теңдемелерин канаатандырышат:

$$D\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i, D\omega_i^k = \omega_i^j \wedge \omega_j^k, \omega_i^j + \omega_j^i = 0. \tag{2}$$

$\vec{e}_i$ вектордук талааларынын интегралдык сызыктары берилген көптүктүн $\omega^1$ сызыгы үчун Френенин торчосун $\Sigma_6$ түзүшөт. $\mathcal{R}$ репери $\Sigma_6$, торчосунун сызыктарынын жанымаларына тургузулгандыктан, $\omega_i^k$ формалары башкы формалар болушат, б.а.

$$\omega_i^k = \Lambda_{ij}^k \omega^j. \tag{3}$$

(2) формулалардын акыркы барбардыгын эске алсак, анда төмөндөгү келип чыгат:

$$\Lambda_{ij}^k = -\Lambda_{kj}^i. \tag{4}$$

(3) барабардыкты сырттан дифференцирлеп төмөндөгүнү алабыз:

$$D\omega_i^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k D\omega^j.$$

Мындан, (2) формуланы колдонсок, төмөндөгү келип чыгат:

$$.\omega_i^j \wedge \omega_j^k = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j + \Lambda_{ij}^k \omega^\ell \wedge \omega_\ell^j.$$

(3) формуланын негизинде акыркы барабардык төмөндөгүдөй көрүнүшкө келет:

$$\omega_i^j \wedge \Lambda_{j\ell}^k \omega^\ell = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{ij}^k \omega_\ell^j \wedge \omega^\ell,$$

же

$$\Lambda_{j\ell}^k \omega_i^j \wedge \omega^\ell = d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell \wedge \omega^j.$$

(барабардыктын оң жагындагы экинчи мүчөдө жана индекстеринин ордун алмаштырдык). Мындан төмөндөгүнү алабыз:

$$d\Lambda_{ij}^k \wedge \omega^j - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell \wedge \omega^j - \Lambda_{j\ell}^k \omega_i^j \wedge \omega^\ell = 0\ ,$$

же

$$\left(d\Lambda_{ij}^k - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell - \Lambda_{\ell j}^k \omega_i^\ell\right) \wedge \omega^j = 0.$$

Акыркы барабардыкка Картандын леммасын [3] колдонуп төмөндөгүгө ээ болобуз:

$$d\Lambda_{ij}^k - \Lambda_{i\ell}^k \omega_j^\ell - \Lambda_{\ell j}^k \omega_i^\ell = \Lambda_{ijm}^k \omega^m,$$

же

$$d\Lambda_{ij}^k = \left(\Lambda_{ijm}^k + \Lambda_{il}^k \Lambda_{jm}^l + \Lambda_{lj}^k \Lambda_{im}^l\right)\omega^m. \qquad (5)$$

Чоңдуктардын $\{\Lambda_{ij}^k, \Lambda_{ijm}^k\}$ системасы экинчи тартиптеги геометриялык обьектти түзүшөт.

Берилген көптүктүн $\omega^1$ сызыгы үчүн Френенин формулалары төмөндөгүдөй көрүнүштө болушат:

$$\begin{aligned}
d_1\vec{e}_1 &= \Lambda_{11}^2 \vec{e}_2,\\
d_1\vec{e}_2 &= \Lambda_{21}^1 \vec{e}_1 + \Lambda_{21}^3 \vec{e}_3,\\
d_1\vec{e}_3 &= \Lambda_{31}^2 \vec{e}_2 + \Lambda_{31}^4 \vec{e}_4,\\
d_1\vec{e}_4 &= \Lambda_{41}^3 \vec{e}_3 + \Lambda_{41}^5 \vec{e}_5,\\
d_1\vec{e}_5 &= \Lambda_{51}^4 \vec{e}_4 + \Lambda_{51}^6 \vec{e}_6,\\
d_1\vec{e}_6 &= \Lambda_{61}^5 \vec{e}_5,
\end{aligned}$$

жана

$$\Lambda_{11}^3 = -\Lambda_{11}^3 = 0, \Lambda_{11}^4 = -\Lambda_{41}^1 = 0, \Lambda_{11}^5 = -\Lambda_{51}^1 = 0, \Lambda_{11}^6 = -\Lambda_{61}^1 = 0 \quad (6)$$

$$\Lambda_{21}^5 = -\Lambda_{51}^2 = 0, \Lambda_{21}^4 = -\Lambda_{41}^2 = 0, \Lambda_{31}^5 = -\Lambda_{51}^3 = 0,$$

$$\Lambda_{21}^6 = -\Lambda_{61}^2 = 0, \Lambda_{31}^6 = -\Lambda_{61}^3 == 0,\ \Lambda_{61}^4 = -\Lambda_{41}^6 = 0, \qquad (7)$$

мындагы $k_1^1 = \Lambda_{11}^2$, $k_2^1 = \Lambda_{21}^3$, $k_3^1 = \Lambda_{31}^4$, $k_4^1 = \Lambda_{41}^5 = -\Lambda_{51}^4$, $k_5^1 = \Lambda_{51}^6 = -\Lambda_{61}^5$ – $\omega^1$ сызыгынын биринчи, экинчи, үчүнчү, төртүнчү жана бешинчи ийриликтери (тиешелеш түрдө), $d_1 - \omega^1$ сызыгы боюнча дифференцирлөөнүн символу.

$\Sigma_6$ торчосунун $\omega^i$ сызыгынын жанымасындагы $F_i^{\,j}$ $(i \neq j)$ псевдофокусу төмөндөгүдөй радиус-вектор менен аныкталат:

$$\overrightarrow{F_i^j} = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{ij}^j}\vec{e}_i = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{jj}^i}\vec{e}_i. \qquad (8)$$

Ар бир $(X, \vec{e}_i)$ жанымасында бештен псевдофокус жашайт:

$(X, \vec{e}_1)$ жанымасында – $F_1^2,\ F_1^3,\ F_1^4,\ F_1^5,\ F_1^6$;

$(X, \vec{e}_2)$ жанымасында – $F_2^1, F_2^3, F_2^4, F_2^5, F_2^6$;

$(X, \vec{e}_3)$ жанымасында – $F_3^1, F_3^2, F_3^4, F_3^5, F_3^6$;

$(X, \vec{e}_4)$ жанымасында – $F_4^1, F_4^2, F_4^3, F_4^5, F_4^6$;

$(X, \vec{e}_5)$ жанымасында – $F_5^1, F_5^2, F_5^3, F_5^4, F_5^6$;

$(X, \vec{e}_6)$ жанымасында – $F_6^1, F_6^2, F_6^3, F_6^4, F_6^5$.

$\Omega \subset E_6$ аймагындагы $\Sigma_6$ торчосу Френенин циклдик торчосу деп аталат, эгерде төмөндөгү реперлер бир учурда $\omega^1$, $\omega^2$, $\omega^3$, $\omega^4$, $\omega^5$, $\omega^6$ сызыктары үчүн (тиешелеш түрдө) Френенин реперлери болушса:

$\mathcal{R}_1 = (X, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5, \vec{e}_6)$, $\mathcal{R}_2 = (X, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5, \vec{e}_6, \vec{e}_1)$,
$\mathcal{R}_3 = (X, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5, \vec{e}_6, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $\mathcal{R}_4 = (X, \vec{e}_4, \vec{e}_5, \vec{e}_6, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$,
$\mathcal{R}_5 = (X, \vec{e}_5, \vec{e}_6, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$, $\mathcal{R}_5 = (X, \vec{e}_6, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5)$.

$\Sigma_6$ торчосу Френенин циклдик торчосу болсун деп эсептейли жана аны $\tilde{\Sigma}_6$ көрүнүшүндө белгилейбиз.

**Изилдөөнүн материалдары.**

$F_1^6 \in (X, \vec{e}_1)$ псевдофокусу төмөндөгүдөй радиус-вектор менен аныкталат:

$$\overrightarrow{F_1^6} = \vec{X} - \frac{1}{\Lambda_{16}^6}\vec{e}_1 = \vec{X} + \frac{1}{\Lambda_{66}^1}\vec{e}_1.$$

$X$ чекити $\Omega \subset E_6$ аймагында кыймылга келгенде, $F_1^6$ чекити өзүнүн $\Omega_1^6 \subset E_6$ аймагын “сызып” чыгат Натыйжада $f_1^6(X) = F_1^6$ боло тургандай $f_1^6 \colon \Omega \to \Omega_1^6$ бөлүктөп чагылтуусуна ээ болобуз.

$\Omega_1^6$ аймагында $\mathcal{R}' = \left(F_1^6, \vec{q}_{i,}\right)$ кыймылдуу реперин алабыз мында $\vec{q}_i$ векторлору төмөнкүдөй көрүнүштө болушат [4,5]:

$$\vec{q}_1 = \left[1 + \frac{D_{161}^6}{(\Lambda_{16}^6)^2}\right]\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{11}^i}{\Lambda_{16}^6}\vec{e}_2;$$
$$\vec{q}_2 = \frac{D_{162}^6}{(\Lambda_{16}^6)^2}\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \frac{\Lambda_{12}^6}{\Lambda_{16}^6}\vec{e}_6;$$
$$\vec{q}_3 = \frac{D_{163}^6}{(\Lambda_{16}^6)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{13}^2}{\Lambda_{16}^6}\vec{e}_2 + \vec{e}_3 - \frac{\Lambda_{13}^6}{\Lambda_{16}^6}\vec{e}_6; \tag{9}$$
$$\vec{q}_4 = \frac{D_{164}^6}{(\Lambda_{16}^6)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{14}^2}{\Lambda_{16}^6}\vec{e}_2 + \vec{e}_4 - \frac{\Lambda_{14}^6}{\Lambda_{16}^6}\vec{e}_6;$$
$$\vec{q}_5 = \frac{D_{165}^6}{(\Lambda_{16}^6)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{15}^2}{\Lambda_{16}^6}\vec{e}_2 + \vec{e}_5 - \frac{\Lambda_{15}^6}{\Lambda_{16}^6}\vec{e}_6;$$
$$\vec{q}_6 = \frac{D_{166}^6}{(\Lambda_{16}^6)^2}\vec{e}_1 - \frac{\Lambda_{16}^2}{\Lambda_{16}^6}\vec{e}_2.$$

Жалпы учурда бул векторлор сызыктуу көз каранды

$\Delta_4 = (X, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_5, \vec{e}_6)$ бөлүштүрүүсүнө таандык болгон $\alpha$ сызыгын карайбыз. Анын жаныма вектору $\vec{\theta} = \theta^2\vec{e}_2 + \theta^3\vec{e}_3 + \theta^5\vec{e}_5 + \theta^6\vec{e}_6$ көрүнүшүндө болот. $f_1^6(\theta) = \bar{\theta}$ сызыгынын жаныма векторун табалы:

$$\vec{\theta} = \theta^2\vec{q}_2 + \theta^3\vec{q}_3 + \theta^5\vec{q}_5 + \theta^6\vec{q}_6.$$

Мындан (9) формулаларды эске алуу менен төмөндөгүнү алабыз:

$\vec{\bar{\theta}} = (\theta^2 q_2^1 + \theta^3 q_3^1 + \theta^5 q_5^1 + \theta^6 q_6^1)\vec{e}_1 + (\theta^2 + \theta^3 q_3^2 + \theta^5 q_5^2 + \theta^6 q_6^2)\vec{e}_2 + \theta^3\vec{e}_3 + \theta^5\vec{e}_5 + (\theta^2 q_2^6 + \theta^3 b_3^6 + \theta^4 b_4^6)\vec{e}_6$,

мында $q_i^j - \vec{q}_i$ векторунун $j$-чы координатасы.

**Аныктама.** Эгерде $\theta \subset \Delta_4$ сызыгынын $X$ чекитиндеги жанымасы жана $\bar{\theta} = f_1^6(\theta)$ сызыгынын $F_1^6$ чекитиндеги жанымасы бир эле төрт ченемдүү ( $\vec{e}_2, \vec{e}_3$, $\vec{e}_5, \vec{e}_6$ векторлоруна керилген) мейкиндикте жатышса, анда $\theta$ жана $\bar{\theta}$ сызыктары $f_1^6$ бөлүктөп чагылтуусунда $(\Delta_4, \Delta'_4)$ түгөй бөлүштүрүүлөрүнүн квазикошмок сызыктары деп аталышат.

$\vec{\theta}, \vec{\bar{\theta}} \in \Delta_4 = (X, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_5, \vec{e}_6)$ шарттарынан төмөндөгү келип чыгат.

$$\theta^2 q_2^1 + \theta^3 q_3^1 + \theta^5 q_5^1 + \theta^6 q_6^1 = 0.$$

Мындан (9) формулаларды эске алсак:

$$\theta^2 Q_{162}^6 + \theta^3 Q_{163}^6 + \theta^5 Q_{165}^6 + \theta^6 Q_{166}^6 = 0. \qquad (10)$$

Тескерисинче, эгерде (10) шарт орун алса, анда $\theta, \bar{\theta}$ сызыктары $f_1^6$ бөлүктөп чагылтуусунда $(\Delta_4, \Delta'_4)$ түгөй бөлүштүрүүлөрүнүн квазикошмок сызытары болушат.

Төмөндөгүдөй теорема далилденди.

**Теорема.** $\theta \subset \Delta_4$ жана $\bar{\theta} = f_1^6(\theta)$ сызыктары $f_1^6$ бөлүктөп чагылтуусунда $(\Delta_4, \Delta'_4)$ түгөй бөлүштүрүүлөрүнүн квазикошмок сызыктары болушу үчүн (10) шарттын орун алышы зарыл жана жетиштүү:

## Адабияттар


1. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ // Москва: Наука, 1967. – С. 481-482.
2. Матиева Г., Абуллаева Ч.Х., Нышанбаева Н.Т. Е5 евклиддик мейкиндигинде бөлүктөп чагылтуусунун квазикошмок сызыктарынын жашашынын зарыл жана жетиштүү шарттары [текст] // Илим. Билим. Техника. – Ош, 2022. – № 3 (75). – С. 32-39.
3. Фиников, С. П. Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии [Текст] / С. П. Фиников. – М.-Л.: Госттехиздат, 1948. – 432 с.
4. Матиева Г., Папиева Т.М., Курбанбаева Н.Н. Геометрия частичных отображений евклидова пространства, порождаемых заданной сетью Френе / Монография. – Ош: «Билим»ОшГУ, 2022. – 130 с.
5. Папиева Т.М., Абдулазизова М.Х., Адиева Б.Т., Исакова Э.М., Максатбек кызы Б. Необходимое и достаточное условие существования квазидвойной линии пары в евклидовом пространстве / Вестник Ошского государственного университета. – 2021. – Е.1. – №1. – С. 110-118.