УДК 517. 928
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_2(5)_8

СЫЗЫКТУУ ЭМЕС ТӨРТҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ ЖЕКЕЧЕ ТУУНДУЛУУ ТЕҢДЕМЕ ҮЧҮН КОШУМЧА АРГУМЕНТ УСУЛУН КОЛДОНУУ

Жолдошова Чебире Буркановна, окутуучу
chebire86@mail.ru
М. М. Адышев атындагы Ош технологиялык университети
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *Төртүнчү тартиптеги жекече туундулуу теңдеменин, болгонда да сызыктуу эмес болгон учурда чечимин табуу же жалгыз чечимдин жашашын изилдөө бир топ татаалдыктарды жаратат. Макалада мындай типтеги теңдемелер үчүн кошумча аргумент кийирүү усулу колдонулган жана чечимдин жашашы, жалгыздыгы жөнүндөгү теорема далилденген.*

Ачкыч сөздөр: *сызыктуу эмес, жекече, туунду, функциялар классы,оператордук теңдеме, кысып чагылтуулар принциби.*

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО АРГУМЕНТА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Жолдошова Чебире Буркановна, преподаватель
chebire86@mail.ru
Ошский технологический университет имени М. Адышева
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *Поиск решения уравнения с частными производными четвертого порядка, особенно нелинейного, или исследование существования единственного решения представляет собой значительную сложную задачу. В статье был использован метод дополнительного аргумента для уравнения такого типа и доказана теорема о существовании единственного решения.*

Ключевые слова: *нелинейный, частный, производная, класс функций, операторное уравнение, принцип сжимающих отражений.*

USING THE ADDITIONAL ARGUMENT METHOD FOR A NONLINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION OF THE FOURTH ORDER

Zholdoshova Chebire Burkanovna, teacher
chebire86@mail.ru
Osh Technological University named after M. Adyshev
Osh, Kyrgyzstan

Abstract. *Finding a solution to a fourth-order partial differential equation, especially a nonlinear one, or investigating the existence of a single solution is a significant challenge. In the article, the method of an additional argument was used for an equation of this type and the theorem on the existence of a single solution was proved.*

Keywords: *nonlinear, partial, derivative, class of functions, operator equation, principle of compressive reflections.*

Киришүү

[1] жумушунда киргизилген жана бизде колдонулуучу функциялар класстары:

$$Q_n(T)=\{(t_1,t_2,t_3,..,t_n,x)|\ 0\le t_1\le t_2\le t_3\le ...\le t_n\le T,\ x\in R\},$$

$\overline{C}^{(k)}(\Omega)$ - өзүнүн k –тартипке чейинки үзгүлтүксүз жана чектелген жекече туундуларына ээ болгон функциялардын классы.

Биз төмөнкү жардамчы интегралдык теңдемени карайлы:

$$p(\tau,t,x)=x-\int_\tau^t u(s,p(s,t,x))ds,\quad (\tau,t,x)\in Q_2(T) \tag{1}$$

мындагы $u(t,x)$ функциясы төртүнчү тартипке чейинки үзгүлтүксүз жана чектелген жекече туундуларга ээ функция болсун жана x аргументи боюнча Липшицтин шартын кандайдыр бир оң L саны менен канаатандырсын.

Эгерде биз төмөнкү дифференциалдык операторду киригизсек:

$$D[\omega]=\frac{\partial}{\partial t}+\omega\frac{\partial}{\partial x},$$

Анда (1) интегралдык теңдемесинен төмөнкү барабардыкка ээ болобуз:

$$D[u(t,x)]p(\tau,t,x)=0 \tag{2}$$

Дагы кошумча белгилеп кетүүчү нерсе эгерде (1) интегралдык тендемесинде x өзгөрмөсүнүн ордуна $p(t,\theta,x)$ функциясын кое турган болсок төмөнкү теңдештикти алабыз:

$$p(\tau,t,p(t,\theta,x))=p(\tau,\theta,x),\quad (\tau,t,\theta,x)\in Q_3(T), \tag{3}$$

Чындыгында эле (1)де алмаштыруу жүргүзөлү:

$$p(\tau,t,p(t,\theta,x))=p(t,\theta,x)-\int_\tau^t u(s,p(s,t,p(t,\theta,x))ds,$$

$$p(\tau,\theta,x)=x-\int_\tau^\theta u(s,p(s,\theta,x))ds.$$

Эгерде $q(\tau,t,\theta,x)=|p(\tau,t,p(t,\theta,x))-p(\tau,\theta,x)|$ белгилөөсүн колдонсок, анда:

$$|p(\tau,t,p(t,\theta,x))-p(\tau,\theta,x)|\le\left|x-\int_t^\theta u(s,p(s,\theta,x))ds-\int_\tau^t u(s,p(s,t,p(t,\theta,x)))ds-\right.$$

$$\left.-x+\int_\tau^\theta u(s,p(s,\theta,x))ds\right|\le\left|-\int_t^\theta u(s,p(s,\theta,x))ds+\int_\tau^\theta u(s,p(s,\theta,x))ds-\right.$$

$$\left.-\int_\tau^t u(s,p(s,t,p(t,\theta,x)))ds\right|\le\int_\tau^t L|p(s,t,p(t,\theta,x))-p(s,\theta,x)|ds.$$

Жыйынтыкта төмөнкү барабарсыздык келип чыгат:

$$q(\tau,t,\theta,x;u)\le\int_\tau^t Lq(s,t,\theta,x;u)ds. \tag{4}$$

(4) барабарсыздыгынан $q(\tau,t,\theta,x;u)\equiv 0$ мындан (3) теңдештигинин аткарылаары келип чыгат.

Маселенин коюлушу. Сызыктуу эмес, жекече туундулуу оператордук-дифференциалдык теңдемени карайлы:

$$D^2[-u(t,x]D^2[u(t,x)]u(t,x) = F(t;u), \quad (t,x) \in Q_1(T), \qquad (5)$$

$F(t;u) -$ каалагандай u функциясы үчүн t өзгөрмөсүнөн гана көз каранды болгон оператор жана ал төмөнкү эки шартты канаатандырат:

үзгүлтүксүз оператор;

$L>0$ жана $T^* \leq T$ үчүн:

$$\| F(t;u_1) - F(t;u_2) \|_{Q_1(T^*)} \leq L \| u_1(t,x) - u_2(t,x) \|_{Q_1(T^*)} .$$

(5) теңдемеси оператордук формада берилди. Жеке учурда:

$$D[-u(t,x]D[u(t,x)]u(t,x) = u_{tt}(t,x) - u^2(t,x)u_{xx}(t,x) + u_x(t,x)[u_t(t,x) - u(t,x)u_x(t,x)].$$

(5) теңдемеси үчүн төмөнкүдөй баштапкы шарттарды карайбыз:

$$\frac{\partial^k u(t,x)}{\partial t^k}\Big|_{t=0} = \psi_k(x), \quad k = 0,1,2,3, \qquad (6)$$

мында $\psi_k(x) \in \overline{C}^{(4)}(R), \quad k = 0,1,2,3.$

ТЕОРЕМА. Эгерде (6) баштапкы шартында берилген функциялар төмөнкү шарттарды канаатандырса:

$$D[-u(t,x)]D^2[u(t,x)]u(t,x)\Big|_{t=0} = 0, \qquad (7)$$

$$D^2[u(t,x)]u(t,x)\Big|_{t=0} = 0. \qquad (8)$$

Анда (1)-(2) маселесинин жалгыз $u(t,x) \in \overline{C}^{(4)}(Q_1(T^*)$ чечими жашайт, мындагы $T^* \leq T$ баштапкы берилгендерден аныкталат.

Далилдөө.

Теореманын далилдөөсүндө жеңилдик үчүн колдонулуучу белгилөөлөрдү карайбыз:

$$z(t,x;u) = D^2[u(t,x)]u(t,x),$$
$$z_1(t,x;u) = D[-u(t,x)]z(t,x;u),$$
$$z_2(t,x;u) = D[-u(t,x)]z_1(t,x;u).$$
$$\theta(t,x;u) = D[u(t,x)]u(t,x).$$

Белгилөөлөрдүн жардамында (1) төмөнкү көрүнүштөргө келет:

$$D^2[-u(t,x)]z(t,x;u) = F(t;u). \qquad (9)$$

$$D[-u(t,x)]z_1(t,x;u) = F(t;u). \qquad (10)$$

(10), (6) маселеси үчүн [2,3] макалаларында колдонулган, кошумча аргумент кийирүү усулу (КАКУ) деп аталган усулду колдонобуз. КАКУнун жардамында каралган баштапкы маселе төмөнкү интегралдык теңдемеге келтирилет:

$$z_1(t,x;u) = \int_0^t F(s;u)ds. \qquad (11)$$

(11)ден t жана x боюнча туундуларды алсак, дифференциалдык оператор боюнча (10)дун орун алаарын көрөрбүз. $t = 0$ шартында $z_1(0,x;u) = 0$ болот.

Башкача айтканда теоремадагы (7) шартын канаатандырат.

(11), (9) маселеси үчүн да КАКУну колдонуп төмөнкүгө келебиз:

$$z(t,x;u)=\int_0^t (t-s)F(s;u)ds. \tag{12}$$

Биз (1) теңдемесине удаалаш КАКУну колдонуу менен (12)ге келдик. (12)ден (11)ди дифференциалдык операторду колдонуу менен алабыз жана теоремадагы (8) шарты орун алат. Теореманын (7) жана (8) шарттары (11) жана (12) формулаларын келтирип чыгарууда колдонулду.

(12)ни ыңгайлуу формада жазып алалы:

$$D[u(t,x)]\theta(t,x;u)=\int_0^t (t-s)F(s;u)ds=I(t;u). \tag{13}$$

(13) үчүн КАКУну колдонобуз, баштапкы берилгендерди эске алуу менен:

$$\theta(t,x;u)=\varphi(p(0,t,x))+\int_0^t I(\rho;u)d\rho, \tag{14}$$

$$\theta(t,x;u)\big|_{t=0}=\varphi(x),$$

мындагы $p(s,t,x)$ функциясы (1) интегралдык теңдемесинен аныкталат жана ал үчүн (2), (3) барабардыктары орун алат.

Чындыгында эле (14)төн төмөнкүнү алууга болот:

$$D[u(t,x)]\theta(t,x;u)=\varphi'(p(0,t,x))D[u(t,x)]p(0,t,x)+I(t;u).$$

Акыркы теңдеме үчүн (2) барабардыгын колдонсок (14) орундалат жана $\theta(0,x;u)=\varphi(x).$

Эми (14), (6) маселесин чечүүнү карайлы. КАКУну колдонолу:

$$u(t,x)=\psi_0(p(0,t,x))+t\varphi(p(0,t,x))+\int_0^t (t-\rho)I(\rho;u)d\rho, \tag{15}$$

Жогорудагы учурлардай эле (15) үчүн дифференциалдык оператор каралса, (14) келип чыгат. Эгерде *t=0* деп алсак: $u(0,x)=\psi_0(x)$.

Жыйынтыкта биз (15) интегралдык теңдемеси менен коюлган маселенин эквиваленттүү экендигин алдык. Мындай жыйынтыкка төрт жолу КАКУну удаалаш колдонуу менен жана тескерисинче интегралдык теөдемелерге дифференциалдык операторду колдонуу менен жеттик. Биз үчүн (15)тин жалгыз чечиминин жашашын аныктоо жетиштүү. Андыктан (15) үчүн өзгөртүп жүргүзүүлөрдү жасайбыз жана кысып чагылтуулар принцибинин (КЧП) негизинде жалгыз локалдык чечимдин жашашын аныктайбыз.

(15)те t өзгөрмөсүн s менен x өзгөрмөсүн p(s,t,x) функциясы менен алмаштырабыз жана (3) барабардыгын колдонобуз:

$$u(s,p(s,t,x))=\psi_0(p(0,t,x))+s\varphi(p(0,t,x))+\int_0^s (s-\rho)I(\rho;u)d\rho \tag{16}$$

(16)га (1)ди алып келип коёбуз:

$$v(s,t,x)=\psi_0(x-\int_0^t v(\tau,t,x))d\tau)+s\varphi(x-\int_0^t v(\tau,t,x))d\tau)+\int_0^s (s-\rho)I(\rho;u)d\rho, \tag{17}$$

$$v(s,t,x)=u(s,p(s,t,x)),\quad (s,t,x)\in Q_1(T).$$

Жыйынтыкта $u(t,x) = v(t,t,x)$ барабардыгын канаатандырган $v(s,t,x)$ белгисиз функциясынын жашашын жана жалгыздыгын далилдөө жетиштүү экендигине келдик. (17) үчүн КЧПны колдонобуз.

Ыңгайлуулук үчүн (17)ни төмөнкүдөй формада жазып алабыз:

$$v(\tau,t,x) = J(\tau,t;v), \tag{18}$$

$$J(\tau,t;v) = \psi_0(x - \int_0^t v(\tau,t,x))d\tau) + \tau\varphi(x - \int_0^t v(\tau,t,x))d\tau) + \int_0^s (s-\rho)I(\rho;u)d\rho,.$$

Бизге $T^* < T$ саны табылып, төмөнкү барабарсыздык орун алсын:

$$\left|J(\tau,t;v)\right| = \left|\psi_0(p(0,t,x)) + \tau\varphi(p(0,t,x))\right| + \int_0^t (t-\rho)\left|\int_0^\rho (\rho - s)F(s;0)ds\right| \le$$

$$\le \left|\psi_0\right| + t\left|\varphi\right| + \| F(t;0) \|_{[0,t]} \frac{t^4}{2!} \le \Omega_0(T^*),$$

мында

$$\Omega_0(S) = \left\|\psi_0\right\| + \left\|\varphi\right\|S + \| F(t;0) \|_{[0,t]} \frac{S^4}{2!}.$$

$$\left|J(\tau,t;v_1) - J(\tau,t;v_2)\right| \le T^*\Omega_1 \| v_1 - v_2 \|_{Q_2(T^*)}$$

мындагы

$$\Omega_1 = \left\|\psi_0'\right\| + \left\|\varphi'\right\|T + \frac{T^3}{2!}.$$

Корутунду.

Демек биз далилдедик: (18) теңдемеси жалгыз чечимге ээ болот жана анын нормасы *$2\Omega_0(T^*)$*дан ашпайт. Ошондой эле КЧПнин негизинде (18) теңдемесинин чечими $T^* < T$ үчүн бардык аргументтери боюнча төртүнчү тартипке чейинки үзгүлтүксүз жекече туундуларга ээ болот.

Теорема далилденди.

Адабияттар

1. Аширбаева А.Ж. Метод дополнительного аргумента в теории нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных высшего порядка [Текст] / А.Ж. Аширбаева, М.И. Иманалиев, Т.М. Иманалиев // Исследо-вания по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 1997. – Вып. 26. – С. 3–8.
2. Аширбаева А.Ж. Исследование решений интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Ч.Б. Жолдошева // Вестник ОшГУ, Серия естественных и медицинских наук. – 2012. – № 2. – Вып. 1. – С. 150–153.
3. Аширбаева А.Ж. Сведение нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка к решению интег-рального уравнения [Текст] / А.Ж. Аширбаева // Механика и моделиро-вание процессов технологии. – Тараз: Тараз университеті, 2013. - № 1. - С.14-19.