УДК 517.9
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_2(5)_7

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ В КПП-МОДЕЛИ ПРИ НЕЛОКАЛЬНОЙ КОНКУРЕНЦИИ

Давыдов Алексей Александрович, д.ф.м.н., профессор
davydov@mi-ras.ru
Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова
Москва, Россия
International Institute for Applied Systems Analysis (IIASA)
Laxenburg, Austria
Платов Антон Сергеевич, к.ф.м.н., доцент
platovmm@mail.ru
Национальный исследовательский технологический университет МИСИС
Туницкий Дмитрий Васильевич, д.ф.м.н., ведущий научный сотрудник
dtunitsky@yahoo.com
Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова РАН
Москва, Россия

Аннотация. *Мы рассматриваем нелокальное уравнение Колмогорова-Петровского-Пискунова и Фишера, описывающее динамику ресурса, распределенного на замкнутом многообразии, например, на двумерной сфере - поверхности Земли. Нелокальность выражается зависимостью члена реакции уравнения от интеграла произведения искомого решения с некоторым интегральным ядром по многообразию. Например, при равенстве единице этого ядра мы получаем зависимость члена реакции от общего объем ресурса на многообразии. При естественных предположениях о параметрах уравнения доказана теорема единственности решения задачи Коши при ограниченных неотрицательных начальных данных, имеющего непрерывную* L_2*-норму на многообразии и ограниченного.*

Ключевые слова: *КПП-модель, задача Коши, единственность решения.*

ON UNIQUENESS OF THE SOLUTION TO CAUCHY PROBLEM IN KPP-MODELWITH NONLOCAL COMPETITION

Davydov Alexey Alexandrovich, Doctor of Ph. Math. Sc., Professor
davydov@mi-ras.ru
Lomonosov Moscow State University
Moscow, Russia
International Institute for Applied Systems Analysis (IIASA
Laxenburg, Austria
Platov Anton Sergeevich, PhD, Associate Professor
platovmm@mail.ru
National University of Science and Technology MISIS
Tunitsky Dmitry Vasilievich, Doctor of Ph. Math. Sc., Leading Researcher
dtunitsky@yahoo.com

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of the Russian Academy of Sciences
Moscow, Russia

Abstract. *We consider the nonlocal Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov and Fisher equation describing the dynamics of a resource distributed on a closed manifold, for example, on a two-dimensional sphere - the Earth's surface. Nonlocality is defined by the dependence of the reaction term of the equation on the integral of the product of the desired solution with some integral kernel over the manifold. For example, if this kernel is equal to one, we obtain the dependence of the reaction term on the total volume of the resource on the manifold. Under natural assumptions about the parameters of the equation, a uniqueness theorem is proved for a solution to the Cauchy problem with bounded nonnegative initial data, which has a continuous L_2-norm on the manifold and is bounded.*

Keywords: *KPP model, Cauchy problem, uniqueness of solution*

1. Введение.

Анализ динамики возобновляемых ресурсов является важной составляющей в изучении многих проблем прикладного характера, включая оптимизацию эксплуатации промысловых популяций, задачи сохранения окружающей среды и биоразнообразия, а также других вопросов. В силу ценности получаемых при этом анализе результатов, инструменты этого анализа разрабатываются и применяются различными исследовательскими группами в мире. Разработка подобных инструментов или их применение проводились в работах [3], [4], [10], [15], [16], в работах [9], [19], [25], [26] в применении к задачам рационального природопользования и сохранения окружающей среды, в работах [1], [2], [7], [10], [11], [15], [17], [23], [27] при оптимизации динамики ресурса с бесконечным горизонтом планирования его использования.

Модель Колмогорова-Петровского-Пискунова и Фишера (=КПП и Фишера) [12], [13] появилась в первой половине 20-го века для анализа динамики распределенной популяции при наличии диффузии и внутривидовой конкуренции. Она объединяет модель Фурье распространения тепла [14] с логистической моделью Ферхюльста [26]. А именно, к уравнению теплопроводности добавляется член реакции, в котором коэффициенты естественно зависят от точки ареала обитания популяции.

Здесь мы рассматриваем нелокальную модель КПП и Фишера на замкнутом многообразии M (например, на -мерном торе, естественно появляющемся при изучении распределенного ресурса в периодической среде [3], или на двумерной сфере, которая является естественной моделью поверхности Земли [8], [23], [27]). Нелокальность выражается зависимостью коэффициентов члена реакции от общего объема ресурса, что приводит к уравнению

$$p_t - Lp = ap - bp^2, \qquad (1.1)$$

где $p = p(t, x)$, $p \geq 0$, — плотность изучаемого ресурса в точке x многообразия M его распределения в момент времени t, L — равномерно эллиптический оператор, непрерывно зависящий от точки ареала (см. [21], [22]), функции a и b характеризуют скорости процессов возобновления ресурса и насыщения им среды, соответственно, предполагаются ограниченными, измеримо зависящими от точки среды и непрерывно от показателя E объема имеющегося ресурса, например, его суммарной массы (это и делает модель нелокальной, чего нет, например, в [8], [21], [22]). Таким образом,

$$a = a(x, E), \quad b = b(x, E),$$

где показатель E определяется строго монотонным непрерывным функционалом на конусе неотрицательных плотностей распределения, имеющим нулевое значение в нуле, например, вида

$$E = \int_M K\,(x,y)p(x,t)^\alpha dx \tag{1.2}$$

с некоторым положительным ограниченным измеримым весом K и положительной степенью α (при $K = 1, \alpha = 1$ здесь считается общий объем распределенного ресурса). Как отмечено выше, нелинейная зависимость тех или иных характеристик при изучении возобновляемых ресурсов встречалась и ранее (см. например, [5], [6], [20]). Кроме того, функция b предполагается отделенной от нуля некоторым положительным числом b_0. В частности, при достаточно больших значениях плотности ресурса правая часть уравнения (1.1) отрицательна.

Учитывая, что функции a и b лишь измеримы по фазовой переменной решение уравнения (1.1) или решение задачи Коши для него понимается в слабом смысле (см., например, [18], [22]).

В настоящей работе мы показываем, что при $\alpha = 1$ и выполнении для функций a и b условия Липшица по E в изучаемой модели может существовать не более одного решения задачи с ограниченными начальными данными. Вопрос существования решения остается открытым, как и вопрос о существовании глобального аттрактора нетривиальных неотрицательных решений (см. [8], [21], [22], [27]). Существование неотрицательного стационарного решения в этой модели изучалось в [24].

2. Формулировка результата

Теорема 1. *Пусть M — замкнутое гладкое многообразие, на котором оператор L является непрерывным равномерно эллиптическим, ядро K ограничено и измеримо, а коэффициенты a и b ограничены, измеримы и удовлетворяю условию Липшица по E. Тогда при $\alpha = 1$ задача Коши для уравнения (1.1) с ограниченным начальным значением не может иметь более одного решения,*

- *дифференцируемого при положительном времени,*
- *не превосходящего по модулю фиксированной положительной константы P,*
- *имеющего на этом многообразии непрерывную L_2-норму.*

Доказательство. Доказательство проведем в более наглядном случае, когда ресурс распределен на -мерном торе, а оператор L имеет дивергентную форму. В этом случае уравнение (1.1) можно переписать в более привычной форме

$$p_t = (A(x)p_x)_x + a(x,E)p - b(x,E)p^2. \tag{2.3}$$

Допустим, что для рассматриваемой задачи Коши с некоторыми ограниченными измеримыми начальными данными $p(0,x)$ существует два решения p и $\tilde{p}$, не превосходящие по абсолютной величине некоторой константы P и определенные при малых положительных временах.

В силу уравнения (2.3) имеем

$$p_t = (A(x)p_x)_x + a(x,E)p - b(x,E)p^2 \text{ и } \tilde{p}_t = (A(x)\tilde{p}_x)_x + a(x,\tilde{E})\tilde{p} - b(x,\tilde{E})\tilde{p}^2. \tag{2.4}$$

Вычитая почленно из первого уравнения второе, получим

$$(p-\tilde{p})_t = (A(x)(p-\tilde{p})_x)_x + [a(x,E)p - a(x,\tilde{E})\tilde{p}] + [-b(x,E)p^2 + b(x,\tilde{E})\tilde{p}^2]. \tag{2.5}$$

Домножая последнее уравнение на $(p-\tilde{p})$ и интегрируя по многообразию, получаем

$$||p-\tilde{p}||_t^2 = \int (A(x)(p-\tilde{p})_x)_x(p-\tilde{p})dx + \int [a(x,E)p - a(x,\tilde{E})\tilde{p}](p-\tilde{p})dx +$$
$$+\int [-b(x,E)p^2 + b(x,\tilde{E})\tilde{p}^2](p-\tilde{p})dx.$$

Рассмотрим каждое слагаемое в правой части последнего уравнения по отдельности и сделаем их подходящую оценку. Для первого слагаемого в силу равномерной эллиптичности оператора L имеем

$$\int (A(x)(p-\tilde{p})_x)x(p-\tilde{p})dx = -\int (A(x)(p-\tilde{p})_x, (p-\tilde{p})_x)dx \leq 0. \quad (2.6)$$

Для подынтегральной функции во втором слагаемом получаем

$$\left|\left[a(x,E)p - a\left(x,\tilde{E}\right)\tilde{p}\right](p-\tilde{p})\right| = \left|\left[a(x,E)(p-\tilde{p}) + \left(a(x,E) - a\left(x,\tilde{E}\right)\right)\tilde{p}\right](p-\tilde{p})\right| \leq$$

$$\leq |a(x,E)|(p-\tilde{p})^2 + N\left|E-\tilde{E}\right| |\tilde{p}|\,|p-\tilde{p}| \leq B(p-\tilde{p})^2 + NkR||p-\tilde{p}||\,|\tilde{p}|\,|p-\tilde{p}|,$$

где B — константа, ограничивающая функцию a, N — константа Липшица для этой функции по E, k — константа, ограничивающая ядро K, а R — корень из объема многообразия. Следовательно, для интеграла по многообразию от второго слагаемого имеем

$$\left|\int \left[a(x,E)p - a\left(x,\tilde{E}\right)\tilde{p}\right](p-\tilde{p})dx\right| \leq B\|p-\tilde{p}\|^2 + NkR^2P\|p-\tilde{p}\|^2 \leq$$

$$\leq (B + NkR^2P)||p-\tilde{p}||^2,$$

где $||p||$ — L_2 - норма функции p.

Аналогично для третьего слагаемого

$$\left|\int [-b(x,E)p^2 + b(x,\tilde{E})\tilde{p}^2](p-\tilde{p})dx\right| \leq D\int |p+\tilde{p}|(p-\tilde{p})^2dx \leq 2DP||p-\tilde{p}||^2,$$

где D- константа, ограничивающая функцию b.

Таким образом, суммируя полученные оценки, получаем следующую оценку для скорости изменения L_2-норма разности решений

$$||p-\tilde{p}||_t^2 \leq S||p-\tilde{p}||^2$$

с $S = B + NkR^2P + 2DP$. Наконец, интегрируя последнее неравенство, получаем

$$||p-\tilde{p}||^2 \leq ||p(0,x) - \tilde{p}(0,x)||^2 e^{St}$$

Учитывая, что рассматривается непрерывное в L_2-норме на многообразии решение, а начальные данные этих решений одинаковы, получаем справедливость теоремы.

Литература

1. Беляков А.О., Давыдов А.А. Оптимизация эффективности циклического использования возобновляемого ресурса, Тр. ИММ УрО РАН, 22, № 2, 2016, 38–46; Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.), 299, suppl. 1 (2017), P. 14 – 21
2. Belyakov A.O., Davydov A.A., Veliov V.M. Optimal cyclic exploitation of renewable resources // J. Dyn. Control Syst.. 2015. Vol. 21, № 3. P. 475–494.
3. Berestycki H., Francois H., Roques L. Analysis of the periodically fragmented environment model: I Species persistence // J. Math. Biol. 2005. V. 51. P. 75–113. DOI: 10.1007/s00285-004-0313-3
4. Berestycki H., Francois H., Roques L. Analysis of the periodically fragmented environment model: II—biological invasions and pulsating travelling fronts//J. Math. Pures Appl.. 2005. V. 84. P. 1101–1146.
5. Davydov A.A., Platov A.S. Optimal stationary solution in forest management model by accounting intra-species competition, Mosc. Math. J., 12:2 (2012), 269–273
6. Давыдов А. А., Платов А. С. Оптимальная эксплуатация двух структурированных по размеру конкурирующих популяций, Тр. ИММ УрО РАН, 19, № 4, 2013, 89–94; Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.), 287, suppl. 1 (2014), 49–54

7. Davydov A.A., Vinnikov E.V. Optimal cyclic dynamic of distributed population under permanent and impulse harvesting// Dynamic Control and Optimization. DCO 2021. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, vol 407, 101–112 (2023)

8. Винников Е.В., Давыдов А.А., Туницкий Д.В. Существование максимального среднего временного сбора в КПП-модели на сфере при постоянном и импульсном отборах // Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр.. 2023. Т. 514, № 1. С. 59–64.

9. Cohen P.J., Foale S.J. Sustaining small-scale fisheries with periodically harvested marine reserves. Marine Policy 37 (2013), 278–287.

10. Daners D., Medina P. Abstract evolution equations. Periodic problems and applications, Pitman Research Notes in Mathematics Series 279, Longman Scientific & Technical, 1992; ISBN 0 582 09635 9

11. Du Y., Peng R. The periodic logistic equation with spatial and temporal degeneracies. Trans. Amer. Math. Soc. 364 (2012), 6039-6070

12. Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием вещества, и его применение к одной биологической проблеме // Бюллетень МГУ. Сер. А. Математика и Механика. 1937. Т. 1, № 6. С. 1–26.

13. Fisher R.A. The Wave of Advance of Advantageous Genes // Annals of Eugenics, 1937. 7 (4), pp.353–369. DOI:10.1111/j.1469-1809.1937.tb02153.x

14. Fourier J.B.J. Theorie Analytique de la Chaleur. Paris: F. Didot, 1822.

15. Henderson K., Loreau M. An ecological theory of changing human population dynamics // People Nature, 2019, Vol. 1, Issue 1, 31-43.

16. Hess P. Periodic-parabolic Boundary Value Problems and Positivity // Pitman Research Notes in Mathematics Series. 1991, Vol. 155.

17. Medina P.K. Feedback Stabilizability of Time-Periodic Parabolic Equations. In: Jones C.K.R.T., Kirchgraber U., Walther H.O. (eds) Dynamics Reported. Dynamics Reported (Expositions in Dynamical Systems), vol 5 (1996). Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-79931-0_2

18. Ладыженская О.А. Уральцева Н.Н. Солонников В.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. Москва. Наука. 1967

19. Pethame B. Parabolic equations in biology: Growth, reaction, movement and diffusion. Springer, 2015, Lecture Notes on Mathematical Modelling in the Life Sciences, 978-3-319-19499-8; 978-3-319-19500-1.

20. Tarniceriu O.C., Veliov V.M. Optimal Control of a Class of Size-Structured Systems. In: Lirkov, I., Margenov, S., Wasniewski, J. (eds) Large-Scale Scientific Computing. LSSC 2007. Lecture Notes in Computer Science, vol 4818. Springer, Berlin, Heidelberg.

21. Туницкий Д.В. О разрешимости полулинейных эллиптических уравнений второго порядка на замкнутых многообразиях, Изв. РАН. Сер. матем., 86:5 (2022), 97–115.

22. Туницкий Д.В. О стабилизации решений полулинейных параболических уравнений второго порядка на замкнутых многообразиях, Изв. РАН. Сер. матем., 87:4 (2023), 186–204.

23. Туницкий Д.В. Эксплуатация возобновляемого ресурса, распределенного на поверхности Земли // Международная конференция «Системный анализ: моделирование и управление», посвященная памяти академика А.В. Кряжимского, Москва, 23–24 января 2024 г. Тезисы докладов. Москва : МГУ имени М.В. Ломоносова, МАКС Пресс, 2024. С. 113-114.

24. Давыдов А.А., Платов А.С., Туницкий Д.В. , Существование оптимального стационарного решения в КПП-модели при нелокальной конкуренции, Тр. ИММ УрО РАН, 30, № 3, 2024, 113–121.

25. Undersander D., Albert B., Cosgrove D., Johnson D., Peterson P. Pastures for profit: A guide to rotational grazing (A3529), Cooperative Extension Publishing, University of Wisconsin-Extension, 2002.

26. Verhulst P.F. Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement, Correspondance mathematique et physique. 1938. V. 10. P. 113–121.

27. Туницкий Д.В. Об оптимальном управлении сбором возобновляемого ресурса, распределенного на поверхности Земли // Автоматика и телемеханика. 2024. No 7. С. 42–60.