УДК 517.968

DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_2(5)_6

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Басаров Сержан Жандосулы
bassarov.serzhan98@gmail.com
Евразийский Национальный Университет им. Л.Н.Гумилева
Бекмаганбетов Куаныш Абдрахманович, д.ф.-м.н., профессор
bekmaganbetov-ka@yandex.ru
Нурсултанов Ерлан Даутбекович, д.ф.-м.н., профессор
er-nurs@yandex.ru
Казахстанский филиал МГУ имени М.В. Ломоносова
Астана, Казахстан

Аннотация. *В работе мы вводим пространство стохастических процессов с непрерывным временем. Доказана интерполяционная теорема типа Марцинкевича для этих пространств для квазилинейных операторов.*

Ключевые слова: *стохастические процессы, мартингалы, интерполяционная теорема типа Марцинкевича, интеграл Ито, остановленный процесс.*

INTERPOLATION METHODS FOR SPACES OF STOCHASTIC PROCESSES

Basarov Serzhan Zhandosuly
bassarov.serzhan98@gmail.com
Eurasian National University named after. L.N. Gumileva
Bekmaganbetov Kuanysh Abdrakhmanovich, Doctor of Ph. and Math. Sc., Professor
bekmaganbetov-ka@yandex.ru
Nursultanov Erlan Dautbekovich, Doctor of Ph. and Math. Sc., Professor
er-nurs@yandex.ru
Kazakhstan branch of Moscow State University named after M.V. Lomonosov
Astana, Kazakhstan

Abstract. *In this paper we define spaces of continuous stochastic processes. We obtain the Marcinkiewicz-type interpolation theorem for such spaces and quasi-linear operators.*

Keywords. *stochastic processes, martingales, the Marcinkiewicz-type interpolation theorem, Ito's integral, stopped process.*

1. Пространство $N_{p,q}(F)$ и его свойства

Пусть задано вероятностное пространство (Ω, F, P) и некоторая фильтрация $F=\{\mathrm{F}_t\}_{t\in T}$, где $T\subset \mathrm{R}$, то есть неубывающее семейство σ-алгебр $\Im_t$, $t\in T$, таких, что $\Im_s \subseteq \Im_t \subseteq \Im$ *при* $s\le t,\ s,t\in T$.

Пусть стохастический процесс $X = \{X_t\}_{t \in T}$, где $X_t : \Omega \to \mathrm{R}$ согласован с фильтрацией $F = \{\Im_t\}_{t \in T}$, то есть X_t является $\Im_t$-измеримой величиной при каждом $t \in T$. Для стохастического процесса $X = \{X_t, \Im_t\}_{t \in T}$ определим функцию

$$\overline{X}_t(F) = \sup_{A \in \Im_t, P(A) > 0} \frac{1}{P(A)} \left| \int_A X_t P(d\omega) \right|.$$

Эту функцию назовем мажорантой процесса X по фильтрации F.

Пусть $0 < p < \infty$, $0 < q \le \infty$ и $T = [0, \infty)$. Через $N_{p,q}(F)$ ([3], [4]), обозначим множество стохастических процессов X, определенных на F для которых конечен функционал

$$\|X\|_{N_{p,q}}(F) = \begin{cases} \left(\int_0^\infty \left(t^{-1/p} \overline{X}_t \right)^q \dfrac{dt}{t} \right)^{1/q} & \text{при} \quad 0 < q < \infty \\ \sup\limits_{t 0} t^{-1/p} \overline{X}_t & \text{при} \quad q = \infty \end{cases}. \qquad (1)$$

Так как интерес представляет поведение стохастического процесса при $t \to \infty$, то в дальнейшем будем считать, что все рассматриваемые нами процессы таковы, что их нормы не имеют особенностей при $t = 0$.

Говорят [1], что стохастический процесс $X = \{X_t, \Im_t\}_{t \in T}$ является мартингалом, если выполнены следующие условия:

1) $E|X_t| < \infty$, $t \in T$;

2) $E(X_t | \Im_s) = X_s$ (п. н), $s, t \in T$, $s \le t$;

субмартингалом, если

2′) $E(X_t | \Im_s) \;\; X_s$ (п. н), $s, t \in T$, $s \le t$;

супермартингалом, если

2″) $E(X_t | \Im_s) \square X_s$ (п. н), $s, t \in T$, $s \le t$.

Определение 2. Пусть $F = \{\Im_t\}_{t \in T}$ -- некоторая фильтрация. Будем говорить, что процесс X принадлежит классу $W(F)$, если найдется константа C, такая, что для любых $1 \le s \le t$ и произвольных $A \in \Im_s$ справедливо неравенство

$$\left| \int_A X_s P(d\omega) \right| \le C \left| \int_A X_t P(d\omega) \right|.$$

Введенный класс $W(F)$ содержит мартингалы, неотрицательные субмартингалы, неположительные супермартингалы. Свойство процесса, определяющее его принадлежность классу $W(F)$, назовем обобщенной монотонностью.

Следующие леммы описывают свойства постранств $N_{p,q}(F)$.

Лемма 1. Пусть стохастический процесс X принадлежит классу $W(F)$. Тогда при $0 < q \le q_1 \le \infty$ справедливо неравенство

$$\|X\|_{N_{p,q1}(F)} \le c \|X\|_{N_{p,q}(F)}.$$

Лемма 2. Пусть $0 < p < \infty,\ a > 1$. Если стохастический процесс X принадлежит классу $W(F)$, то при $0 < q < \infty$ справедливо соотношение

$$\|X\|_{N_{p,q}(F)} \approx \left(\sum_{k \in Z} \left(a^{-k/p} \overline{X}_{a^k} \right)^q \right)^{1/q},$$

а при $q = \infty$

$$\|X\|_{N_{p,\infty}(F)} \approx \sup_{k \in Z} a^{-k/p} \overline{X}_{a^k}{}^{1/q}.$$

Лемма 3. (Неравенство Гельдера). Пусть $0 < p, p_1, p_2 < \infty$, $0 < q, q_1, q_2 \le \infty$ и $1/p = 1/p_1 + 1/p_2$, $1/q = 1/q_1 + 1/q_2$. Если стахостические процессы $X = (X_t, \overline{\Im}_t)$ и $Y = (Y_t, \overline{\Im}_t)$ являются процессами из классов $N_{p1,q1}(F)$ и $N_{p2,q2}(F)$ соответственно, то процесс $XY = (X_t Y_t, \overline{\Im}_t)$ принадлежит $N_{p,q}(F)$ и верно неравенство

$$\|XY\|_{N_{p,q1}(F)} \le \|X\|_{N_{p1,q1}(F)} \|Y\|_{N_{p2,q2}(F)}.$$

Лемма 4. (Неравенство Харди). Пусть $s \ge 1,\ \alpha > 0,\ \beta > 0,\ \gamma > 0$, тогда для неотрицательной последовательности $a = \{a\}_{k \in Z}$ имеют место наравенства:

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(2^{-\alpha k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} 2^{-\beta m} a_m \right)^s \right)^{1/s} \le C_{\alpha,\beta,\gamma,s} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(2^{-(\beta+\alpha/\gamma)k} a^k \right)^s \right)^{1/s},$$

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(2^{\alpha k} \sum_{m=\gamma k}^{\infty} 2^{-\beta m} a_m \right)^s \right)^{1/s} \le C_{\alpha,\beta,\gamma,s} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(2^{-(\beta-\alpha/\gamma)k} a^k \right)^s \right)^{1/s}.$$

2. Интерполяционные методы для стохастических процессов

Пусть $A(F) = (A_0(F), A_1(F))$ -- пара квазинормированных собственных подпространств линейного хаусдорфового пространства $\aleph(F)$ стохастических процессов, определенных на вероятностном пространстве $(\Omega, \Im, P)$ с фильтрацией $F = \{\Im_t\}_{t \in T}$. Очевидно, эта пара является совместимой парой и, следовательно, для нее определяется шкала интерполяционных пространств относительно вещественного метода [2].

Пусть $0 < \theta < 1$. При $0 < q < \infty$ положим

$$A_{\theta,q} = (A_0, A_1)_{\theta,q} = \left\{ X \in \aleph(F) : \|X\|_{(A_0,A_1)_{\theta,q}} = \left(\int_0^\infty (t^{-\theta} K(t,X))^q \frac{dt}{t} \right)^q < \infty \right\},$$

а при $q = \infty$

$$A_{\theta,\infty} = (A_0, A_1)_{\theta,\infty} = \left\{ X \in \aleph(F) : \|X\|_{(A_0,A_1)_{\theta,\infty}} = \sup_{0<t<\infty} t^{-\theta} K(t,X) < \infty \right\},$$

где

$$K(t, X; A_0, A_1) = \inf_{X = X_0 + X_1} (\|X_0\|_{A_0} + t\|X_1\|_{A_1}) \text{ – функционал Петре.}$$

Рассмотрим следующую модификацию интерполяционного метода.

Случайная величина $\tau:\Omega\to[0,\infty]$ называется марковским моментом (относительно фильтрации $F=\{\Im_t\}_{t\in T}$), если $\{\omega:\tau(\omega)\square t\}\in\Im_t$ для каждого $t\in T$. Марковский момент называется моментом остановки, если $\tau(\omega)<\infty$ (п.н.) (**Ошибка! Источник ссылки не найден.**).

Пусть $\Re=\{\tau(\omega)\}$ -- моменты остановок относительно фильтрации F, $A(F)=(A_0(F),A_1(F))$ -- пара квазинормированных собственных подпространств $\aleph(F)$. Для $X\in\aleph(F)$ определим функционал

$$K_{\Re}(t,X)=K(t,X;A_0,A_1;\Re)=\inf_{\tau\in\mathrm{T}}\left(\left\|X-X^{\tau}\right\|_{A_0}+t\left\|X^{\tau}\right\|_{A_1}\right),\ t>0.$$

Здесь точная нижняя грань берется по всем остановкам из $\Re$. При $0<q<\infty$ положим

$$A_{\theta,q}^{\mathrm{T}}=(A_0,A_1)_{\theta,q}^{\Re}=\left\{X\in\aleph(F):\|X\|_{(A_0,A_1)_{\theta,q}^{\mathrm{T}}}=\left(\int_0^{\infty}(t^{-\theta}K_{\mathrm{T}}(t,X))^q\frac{dt}{t}\right)^q<\infty\right\},$$

а при $q=\infty$

$$A_{\theta,\infty}^{\Re}=(A_0,A_1)_{\theta,\infty}^{\Re}=\left\{X\in\aleph(F):\|X\|_{(A_0,A_1)_{\theta,\infty}^{\mathrm{T}}}=\sup_{0<t<\infty}t^{-\theta}K_{\Re}(t,X)<\infty\right\}.$$

Очевидно, что $K(t,X)\square K_{\Re}(t,X)$ для всех $t>0$, и следовательно, имеет место вложение $A_{\theta,q}^{\Re}\subseteq A_{\theta,q}$.

Пусть T – преобразование стохастического процесса X. Будем говорить, что преобразование T квазилинейно, если найдется $C>0$ такое, что

$$\left|(T(X))_t-(T(Y))_t\right|\square C\left|\left(T(X-Y)\right)_t\right|\ \textit{для любого}\ t\in T\ (\textit{п.н.}).\quad(2)$$

Теорема 1. Пусть $(A_0(F),A_1(F))$, $(B_0(\Phi),B_1(\Phi))$ -- две совместимые пары пространств стохастических процессов и $\Re=\{\tau(\omega)\}$ – некоторое фиксированное семейство моментов остановок относительно фильтрации F. Если T – преобразование стохастического процесса X и выполнены условия

$$\left\|T(X-X^{\tau})\right\|_{B_0}\le M_0\left\|X-X^{\tau}\right\|_{A_0},\quad\left\|T(X^{\tau})\right\|_{B_1}\le M_1\left\|X^{\tau}\right\|_{A_1}$$

для всех остановок $\tau\in\Re$, то верно неравенство

$$\|T(X)\|_{B_{\theta,q}}\le CM_0^{1-\theta}M_1^{\theta}\|X\|_{A_{\theta,q}^{\Re}},$$

где C -- константа из определения квазилинейности преобразования T.

Теорема 2. Пусть $X=\{X_t,\Im_t\}_{t\in T}\in W(F)$ и $1<p_0<p_1<\infty$, $1\square q_0,q_1,q\le\infty$, $0<\theta<1$, $1/p=(1-\theta)/p_0+\theta/p_1$, $\Re=\{a^k\}_{k\in\mathrm{Z}}$ -- последовательность остановок. Тогда справедливы неравенства

$$\|X\|_{N_{p,q}(F)}\le c_1\|X\|_{(N_{p_0,q_0}(F)_r N_{p_1.q_1}(F))_{\theta q}},$$

$$\|X\|_{N_{p_0,q_0}(F)_r N_{p_1.q_1}(F))_{\theta q}^{\Re}}\le c_2\|X\|_{N_{p,q}(F)},$$

где константы c_1, c_2 зависят только от параметров $p_i, q_i (i = 0,1)$ и θ.

2.1 Ограниченность некоторых операторов в классах $N_{p,q}(F)$

Пусть $X = \{X_t, t \geq 0\}$ -- стохастический процесс заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \Im, P)$. Пусть, далее $\Im_t^X$ -- σ-алгебра, порожденная величинами $X_s, 0 \leq s \leq t$. Положим $\Im^X = \sigma\{X_t, t \geq 0\}$. Будем считать, что вероятностное пространство полно и σ-алгебры $\Im^X, \Im_t^X$ $(t \geq 0)$ расширены классом $\aleph$ событий нулевой вероятности. Рассматривается естественная фильтрация $(\Im_t^X)_{t\geq 0}$.

Тогда для стохастического процесса $f_s(\omega)$ можно определить интеграл Ито

$$I_t(f) = \int_{(0,t]} f_s(\omega) dX_s(\omega), \quad t \in [0, \infty).$$

Если $X_s(\omega)$ и $f_s(\omega)$ – мартингалы, то интеграл Ито $I_t(f)$ является мартингалом.

Теорема 3. Пусть $0 < q < p < \infty$, $1 \leq \gamma \leqq \infty$, $1/r = 1/q - 1/p$. Пусть $f(t)$ – детерминированная функция из $C^1([0,\infty))$ такая, что

$$\sup_{t>0} t^{-1/r} f(t) + \sup_{t>0} t^{1-1/r} f'(t) \leqq B < \infty,$$

тогда имеет место неравенство

$$\|I_t(f)\|_{N_{q,\gamma}}(G) \leqq CB\|X\|_{N_{p,\gamma}}(G),$$

где константа C зависит только от параметров p, q, γ.

Теорема 4. Пусть $0 < p < \infty$, $1 \leqq q \leq \infty$, процесс $X = (X_t, \wp_t)_{t0}$ из $W(G)$, $\tau(\omega)$ -- марковский момент, $X^\tau = (X_{t\wedge\tau}, \wp_t)_{t\geq 0}$ – остановленный процесс. Тогда имеет место неравенство

$$\|X^\tau\|_{N_{p,q}}(G) \leqq C\|X\|_{N_{p,q}}(G).$$

Следствие 1. Пусть $0 < p < \infty$, $1 \leqq q \leqq \infty$, процесс $X = (X_t, \wp_t)_{t0}$ является неотрицательным субмартингалом. Тогда процесс $X^* = (X_t^*, \wp_t)_{t0}$ также является субмартингалом и имеет место

$$\|X^*\|_{N_{p,q}}(G) \approx: \|X\|_{N_{p,q}}(G).$$

Данная работа поддержана грантом Комитета науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP23488613).

Литература

1. Ширяев А.Н. Вероятность. -- М.: Наука, 1980. -- 574 с.
2. Берг Й., Лефстрем Й. Интерполяционные пространства. Введение. -- М.: Мир, 1980, 264 с.
3. Nursultanov E., Tikhonov S. \\Net spaces and boundedness of integral operators // J. Geom. Anal. – 2011. – Vol. 21, no. 950-981, DOI 10.1007/s12220-010-9175-7
4. Nursultanov E.D. Net spaces and unequalities of Hardy-Littlewood – Sb.math., vol.189, # 3, (1998). 399-419 p.
5. Nursultanov E., Tikhonov S. Weighted norm inequalities for convolution and Riesz potential // Potential Anal. -- 2015. -- V. 42, 157 2. -- P. 435 -- 456.

6. Nursultanov E.D., Ruzhansky M.V., Tikhonov S.Yu. The Nikolskii Inequality and Functional Classes on Compact Lie Groups // Functional Analysis and Its Applications. -- 2015. -- V. 49, 157 3. -- P. 83 -- 87.

7. Нурсултанов М.Е. Спектральные свойства оператора Шрёдингера с δ-распределением // Матем. заметки. -- 2016. -- Т. 100, 157 2. -- С. 256-269.

8. Дьяченко М.И., Нурсултанов Е.Д., Нурсултанов М.Е., Теорема Харди-Литтлвуда для кратных рядов Фурье с монотонными коэффициентами // Матем. заметки . -- 2016. -- Т. 99, 157 4. -- С. 502-510.

9. Акылжанов Р.Х., Нурсултанов Е.Д., Ружанский М.В. Неравенства типа Харди-Литтлвуда-Пэли на компактных группах Ли // Матем. заметки. -- 2016. -- Т. 100, 157 2. -- С. 79-82.

10. Akylzhanov R., Nursultanov E., Ruzhansky M. Hardy-Littlewood-Paley inequalities and Fourier multipliers on SU(2) // Stud. Mathematica. -- 2016. -- V. 234, 157 1. -- P. 1-29.

11. Tleukhanova N.T., Nursultanov E.D. Summability of the Fourier cofficients of function from anisotropic Lorentz space // AIP Conference Proceedings 1676, 020071 (2016); doi: 10.1063/1.4930497

12. Tleukhanova N.T., Ydyrys A. On multipliers of Fourier series in the Lorentz space // AIP Conference Proceedings 1676, 020071 (2016); doi: 10.1063/1.4930497

13. Nursultanov E. D., Ruzhansky M. V., and Tikhonov S. Yu , Nikolskii Inequality and Besov, Tribel-Lizorkin and Beurling Spaces s on Compact Hoomogeneous manifolds\\ Ann. Sc. Norm/Super. Pisa CI. Sci (5) Vol 15(2016), 981-1017

14. Dzhumabaeva, D. G.; Dyachenko, M. I.; Nursultanov, E. D.On convergence of multiple trigonometric series with monotone coefficients, SIBERIAN MATHEMATICAL JOURNAL -2017- Vol. 58 no 2 p. 205-214

15. Bekmaganbetov K.A., Toleugazy Ye. Interpolation properties of anisotropic Nikol'skii-Besov $B_{pr}^{\alpha q}(\mathrm{T}^d)$ spaces and embedding theorems // International Conference on Analysis and Applied Mathematics, серия AIP Conference Proceedings, т. 1759 (2016), с. 020134-1- 020134-5

16. Tleukhanova N. Reconstruction Operator of Functions from the Sobolev Space. // Fourier analysis and approximation theory. Editors: M. Ruzhanskii, S. Tikhonov, Applied and Numerical Harmonic Analysis. Birkhauser, Barcelona, 2016. P 181-191. ISSN 2296-5009

17. Kopezhanova A.N., Nursultanov E.D., Persson L.-E. Boas theorem for some Lorentz spaces // Lulea university of Technology, Department of Mathematics, Research report 2. -- 2015. -- 21 p.

18. Ыдырыс А. Асимптотика кратных тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами // Вестник МГУ. Серия математика. -- 2015. -- 157 6. -- С. 15 -- 22.

19. Akylzhanov R., Nursultanov E., Ruzhansky M. Hardy-Littlewood, Hausdor- Young-Paley inequalities, and $L_p - L_q$ multipliers on compact homogeneous manifolds // arXiv:1504.07043, 2015.

20. Нурсултанов Е.Д., Тлеуханова Н.Т. О проблеме мультипликаторов тригонометрических рядов Фурье // Тезисы докладов международной конференции: Функциональные пространства и теория приближения функций. -- Москва, 2015. -- С. 190.

21. Nursultanov E.D., Tikhonov S.Yu., Tleukhanova N.T. Norm convolution inequalities in L_p // Тезисы докладов международной конференции: Функциональные пространства и теория приближения функций. -- Москва, 2015. -- С. 41.

22. Nursultanov E.D., Tleukhanova N.T. On multipliers of Fourier series // Тезисы докладов 10-го международного конгресса "`ISSAC-2015"'. -- Макао, 2015. -- С. 172.

23. Akylzhanov R. Hardy-Littlewood, Hausdorff-Young-Paley inequalities, and $L_p - L_q$ Fourier multipliers on compact homogeneous manifolds // Тезисы докладов 10-го международного конгресса "`ISSAC-2015"'. -- Макао, 2015. -- С. 173.

24. Nursultanov E. Interpolation theorem for Morrey-type spaces and its corollaries // Analysis and Partial Differential Equations. Pure Analysis and PDE Group Imperial College London, UK.P.11/ 2016

25. Nursultanov E.D., Tikhonov S.Yu., Tleukhanova N.T. Norm convolution inequalities in L_p // Тезисы докладов международной конференции: Актуальные проблемы математики и математического моделирования. - Алматы, 2015.

26. Джумабаева Д.Г. О сходимости кратных тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами // Тезисы докладов международной конференции: Теория функций, информатика, дифференциальные уравнения и их приложения. - Алматы, 2015.

27. Nursultanov E., Tleukhanova N. Summability of the Fourier coefficients of functions from anisotropic Lorentz space // Third International conference on analysis and applied mathematics (ICAAM 2016): тезисы Международной научной конференции. -- Алматы: Институт математики и математического моделирования, 2016. -- С. 88.

28. Ydyrys A., Tleukhanova N. On multipliers of Fourier series in the Lorentz space // Third International conference on analysis and applied mathematics (ICAAM 2016): тезисы Международной научной конференции. -- Алматы: Институт математики и математического моделирования, 2016. -- С. 119.

29. Bekmaganbetov K.A., Toleugazy Ye. Interpolation properties of anisotropic Nikol'skii-Besov $B_{pr}^{\alpha q}(\mathrm{T}^d)$ spaces and embedding theorems // Third International conference on analysis and applied mathematics (ICAAM 2016): тезисы Международной научной конференции. -- Алматы: Институт математики и математического моделирования, 2016. -- С. 42-43.

30. Бекмаганбетов К.А., Толеугазы Е. О порядке тригонометрического поперечника анизотропного класса Никольского// Abstracts International scientific conference:`Weighted estimates of differential and integral operators and their applicatons.' Астана: ЕНУ им.Л.Н.Гумилева -2017- с.32-35.

31. Tleukhanova N.T., Nursultanov E.D. Recovery operator of periodic functions from the spaces. // Abstracts International scientific conference:`Weighted estimates of differential and integral operators and their applicatons.' Астана: ЕНУ им.Л.Н.Гумилева -2017- p.83-85.

32. Джумабаева Д.Г. О сходимости кратных тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами // Международный научный симпозиум:Теория функций, функциональный анализ и их приложения - Астана: КФ МГУ им.М.В.Ломоносова --2017-с.36-37

33. Ыдырыс А.Ж. About the multipliers of Fourier series on Lorentz space // Международный научный симпозиум Международный научный симпозиум:Теория функций, функциональный анализ и их приложения - Астана: КФ МГУ им.М.В.Ломоносова -2017-с.73-74

34. Bekmaganbetov K.,Toleugazy Y. - About of the orthoprojection widths of the anisotropic Nikol'ski-Besov classes - Abstracts of the VI congress of the turkic world mathematical society - Astana - 2017 - p.163-164

35. Jumabayeva D. - On multiplers of Foutier-Haar series - Abstracts of the VI congress of the turkic world mathematical society - Astana - 2017 - p. 192-194.

36. Nursultanov E. - Net spaces and their applications - Abstracts of the VI congress of the turkic world mathematical society - Astana - 2017 - p. 214-215.

37. Nursultanov E., Sarybekova L., Tleukhanova N. - Some new Fourier multiplier results of Lizorkin and Hermander types - Abstracts of the VI congress of the turkic world mathematical society - Astana - 2017 - p. 2015-2016.

38. Tleukhanova N. - Recovery operator of periodic functions - Abstracts of the VI congress of the turkic world mathematical society - Astana - 2017 - p. 241-242.

39. Международная конференция "`Функциональные пространства и теория приближения функций"', Москва, 2015.

40. 10-ый международный конгресс "`ISSAC-2015"', Макао (Китай), 2015.

41. Международная конференция "`Теория функций, информатика, дифференциальные уравнения и их приложения"', Алматы, 2015.

42. Третья Международная научная конференция "Анализ и прикладная математика" ICAAM 2016: -- Алматы.

43. Международная конференция "Весовые оценки дифференциальных и интегральных операторов и их приложения", Астана, 2017.VI конгресс мирового математического общества тюркских народов, Астана, 2017.