ВЕСТНИК ОШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
МАТЕМАТИКА. ФИЗИКА. ТЕХНИКА. 2024, № 2(5)

УДК 517. 928
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_2(5)_5

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Аширбаева Айжаркын Жоробековна, д.ф.-м.н., профессор
aijarkyn.osh@mail.ru
Бекиева Малика Раимжоновна, преподаватель
malikabekieva9gmail.com
Ошскийгосударственный университет
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *Для нелинейной системы второго порядка рассматривается задача Коши. Данная задача сводится к интегральному уравнению с использованием нескольких обозначений. Приведение задачи к интегральному уравнению, таким образом, является одной из актуальных задач. В работе рассмотрена система, нелинейная относительно неизвестной функции.*

Ключевые слова: *Частные производные, второй порядок, система, интегральное уравнение, нелинейное, обозначение, новые функции.*

СЫЗЫКТУУ ЭМЕС ЭКИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ЖЕКЕЧЕ ТУУНДУЛУУ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН БИР СИСТЕМАСЫ ЖӨНҮНДӨ

Аширбаева Айжаркын Жоробековна, ф.-м.и.д., профессор,
aijarkyn.osh@mail.ru
Бекиева Малика Раимжоновна, окутуучу
malikabekieva9gmail.com
Ош мамлекеттикуниверситети
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *Сызыктуу эмес экинчи тартип системасы үчүн Коши маселеси каралган. Колган маселе бир нече белгилерди колдонуу менен интегралдык теңдемеге келтирилген. Маселени ушундай жол менен интегралдык теңдемеге келтирүү актуалдуу маселелердин бири болуп саналат. Макалада каралып жаткан система белгисиз функцияга карата сызыктуу эмес.*

Ачкыч сөздөр: *Жекече туундулар, экинчи тартип, система,интегралдык теңдеме, сызыктуу эмес, белгилөө, жаңы функциялар.*

ON A SYSTEM OF NONLINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE SECOND ORDER

Ashirbayeva Aizharkyn Zhorobekovna, Dr Sc, professor
aijarkyn.osh@mail.ru
Bekieva Malika Raimjonovna, teacher
malikabekieva9gmail.com
Osh State University
Osh, Kyrgyzstan

Abstract. *The Cauchy problem is considered for a nonlinear second-order system. This problem is reduced to an integral equation using several notations. Thus, reducing the problem to an integral equation is one of the urgent tasks. The paper considers a system that is nonlinear with respect to an unknown function.*

Keywords: *Partial derivatives, second order, system, integral equation, nonlinear, notation, new functions.*

Введение. При решении поставленной задачи Коши используем метод дополнительно аргумента (МДА). При использовании этого метода данное уравнение должно быть записано в удобной операторной форме. Чтобы записать уравнение в операторной форме, мы используем обозначения и вводим новые неизвестные функции. Такой подход использовался в статьях [4-5].

Применению МДА для дифференциальных уравнений в частных производных высшего порядка со многими переменными посвящены работы [1,3].

Постановка задачи. Рассмотрим систему, нелинейную относительно неизвестной функции вида:

$$\begin{cases} u_{tt} = k^2(t,x)u_{xx} + a_1(t,x)u + b_1(t,x)\omega + f_1(t,x,u,\omega) \\ \omega_{tt} = k^2(t,x)\omega_{xx} + a_2(t,x)u + b_2(t,x)\omega + f_2(t,x,u,\omega). \end{cases} \tag{1}$$

Системы второго порядка (1) рассматривается со следующими условиями:

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0} = u_k(x), \quad k = 0,1, \quad x \in R. \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial^k \omega}{\partial t^k}\right|_{t=0} = \omega_k(x), \quad k = 0,1, \quad x \in R. \tag{3}$$

В работе используются пространства функций $\overline{C}^{(k)}(\Omega)$, $Q_m(T)$ введенные в[1].

Методы решения.

С заданной функцией $k(t,x) \in \overline{C}^{(2)}(Q_1(T))$ будем решать следующие интегральные уравнения (ИУ) относительно $p(s,t,x)$, $q(s,t,x)$:

$$p(s,t,x) = x - \int_s^t k(\nu, p(\nu,t,x))d\nu, (s,t,x) \in Q_2(T), \tag{4}$$

$$q(s,t,x) = x + \int_s^t k(\nu, q(\nu,t,x))d\nu, (s,t,x) \in Q_2(T). \tag{5}$$

Введем новые неизвестные функции и обозначения:

$$D[\omega] = \frac{\partial}{\partial t} + \omega\frac{\partial}{\partial x},$$

$$\vartheta_1(t,x) = D[-k(t,x)]u(t,x), \tag{6}$$

$$\vartheta_2(t,x) = D[-k(t,x)]\omega(t,x), \tag{7}$$

$$g(t,x) = \frac{-1}{k(t,x)}[k_t(t,x) + k(t,x)k_x(t,x)],$$

$$\beta(t,x) = D[k(t,x)]g(t,x).$$

Из (6), (7) используя МДА соответственно получаем:

$$u(t,x) = u_0\big(p(0,t,x)\big) + \int_0^t \vartheta_1\big(s, p(s,t,x)\big)ds, \tag{8}$$

$$\omega(t,x)=\omega_0\left(p(0,t,x)\right)+\int_0^t \vartheta_2\left(s,p(s,t,x)\right)ds \qquad (9)$$

Теорема.

Пусть: $u_k(x),\omega_k(x)\in\overline{C}^{(2-k)}(R),(k=0,1),$

$$a_i(t,x),b_i(t,x)\in\overline{C}^{(2)}(Q_1(T)),\ f_i(t,x,u,\omega)\in\overline{C}^{(2)}(Q_1(T)\times R^2).$$

Тогда задача (1)-(3) имеет единственное решение в$\overline{C}(Q_1(T^*))$, где $T^*>0$ определяется из исходных данных.

Доказательство. Задача (1)-(3) с помощью МДА сводиться к решению следующей системы:

$$\begin{gathered}\vartheta_1(t,x)=\frac{1}{2}\varphi_1(q(0,t,x))+\frac{1}{2}g(t,x)u-\frac{1}{2}\int_0^t g(s,q)\vartheta_1(s,q)ds-\frac{1}{2}\int_0^t\beta(s,q)u(s,q)ds+\\+\int_0^t a_1(s,q)u(s,q)ds+\int_0^t b_1(s,q)\omega(s,q)ds+\int_0^t f_1(s,q,u(s,q),\omega(s,q))ds,\end{gathered} \qquad (10)$$

$$\begin{gathered}\vartheta_2(t,x)=\frac{1}{2}\varphi_2(q(0,t,x))+\frac{1}{2}g(t,x)\omega-\frac{1}{2}\int_0^t g(s,q)\vartheta_2(s,q)ds-\frac{1}{2}\int_0^t\beta(s,q)\omega(s,q)ds+\\+\int_0^t a_2(s,q)u(s,q)ds+\int_0^t b_2(s,q)\omega(s,q)ds+\int_0^t f_2(s,q,u(s,q),\omega(s,q))ds,\end{gathered} \qquad (11)$$

где

$$\left[2\vartheta_1(t,x)-g(t,x)u(t,x)\right]\Big|_{t=0}=\varphi_1(x),$$

$$\left[2\vartheta_2(t,x)-g(t,x)\omega(t,x)\right]\Big|_{t=0}=\varphi_2(x).$$

Сначала докажем, что система (10), (11) удовлетворяет задачу (1)-(3).

Дифференцируя (10), имеем:

$$\begin{gathered}\vartheta_{1t}(t,x)+k(t,x)\vartheta_{1x}(t,x)=k(t,x)g(t,x)u_x(t,x)+a_1(t,x)u(t,x)+\\+b_1(t,x)\omega(t,x)+f_1(t,x,u,\omega).\end{gathered} \qquad (12)$$

Принимая во внимание введенные обозначения (6), из (12) получаем первое уравнение системы (1). Точно так же дифференцируя (11), получаем второе уравнение системы (1). ИУ (10), (11) удовлетворяют (2), (3).

Теперь введя обозначения:

$$z_1(t,x;u)=2\vartheta_1(t,x)-g(t,x)u(t,x),$$

$$z_2(t,x;u)=2\vartheta_2(t,x)-g(t,x)\omega(t,x),$$

запишем систему (1) в виде оператора:

$$D[k(t,x)]z_1(t,x;u)=-g(t,x)\vartheta_1(t,x)-\beta(t,x)u+2a_1(t,x)u+2b_1(t,x)\omega+2f_1(t,x,u,\omega),$$

$$D[k(t,x)]z_2(t,x;u)=-g(t,x)\vartheta_2(t,x)-\beta(t,x)\omega+2a_2(t,x)u+2b_2(t,x)\omega+2f_2(t,x,u,\omega).$$

Для последней системы применяя МДА, получаем систему ИУ (10), (11).

Теперь подставляя (8), (9) в (10), (11), получаем систему

ИУ относительно неизвестных функций $\vartheta_1(t,x),\quad \vartheta_2(t,x)$в операторном виде:

$$
\begin{aligned}
A\vartheta_1 = \vartheta_1(t,x) &= \frac{1}{2}\varphi_1(q(0,t,x)) + \frac{1}{2}g(t,x)\left(u_0\left(p(0,t,x)\right) + \int_0^t \vartheta_1\left(s, p(s,t,x)\right)ds \right) - \\
&- \frac{1}{2}\int_0^t g(s,q)\vartheta_1(s,q)ds - \frac{1}{2}\int_0^t \beta(s,q)\left(u_0\left(p(0,s,q(s,t,x))\right) + \int_0^s \vartheta_1\left(\tau, p(\tau,s,q)\right)d\tau \right)ds + \\
&+ \int_0^t a_1(s,q)\left(u_0\left(p(0,s,q(s,t,x))\right) + \int_0^s \vartheta_1\left(\tau, p(\tau,s,q)\right)d\tau \right)ds + \\
&+ \int_0^t b_1(s,q)\left(\omega_0\left(p(0,s,q(s,t,x))\right) + \int_0^s \vartheta_2\left(\tau, p(\tau,s,q)\right)d\tau \right)ds + \\
&+ \int_0^t f_1(s,q,u_0\left(p(0,s,q)\right) + \int_0^s \vartheta_1\left(\tau, p(\tau,s,q)\right)d\tau, \omega_0\left(p(0,s,q)\right) + \int_0^s \vartheta_2\left(\tau, p(\tau,s,q)\right)d\tau)ds,
\end{aligned}
\tag{13}
$$

$$
\begin{aligned}
A\vartheta_2 = \vartheta_2(t,x) &= \frac{1}{2}\varphi_2(q(0,t,x)) + \frac{1}{2}g(t,x)\left(\omega_0\left(p(0,t,x)\right) + \int_0^t \vartheta_2\left(s, p(s,t,x)\right)ds \right) - \\
&- \frac{1}{2}\int_0^t g(s,q)\vartheta_2(s,q)ds - \frac{1}{2}\int_0^t \beta(s,q)\left(\omega_0\left(p(0,s,q(s,t,x))\right) + \int_0^s \vartheta_2\left(\tau, p(\tau,s,q)\right)d\tau \right)ds + \\
&+ \int_0^t a_2(s,q)\left(u_0\left(p(0,s,q(s,t,x))\right) + \int_0^s \vartheta_1\left(\tau, p(\tau,s,q)\right)d\tau \right)ds + \\
&+ \int_0^t b_2(s,q)\left(\omega_0\left(p(0,s,q(s,t,x))\right) + \int_0^s \vartheta_2\left(\tau, p(\tau,s,q)\right)d\tau \right)ds + \\
&+ + \int_0^t f_2(s,q,u_0\left(p(0,s,q)\right) + \int_0^s \vartheta_1\left(\tau, p(\tau,s,q)\right)d\tau, \omega_0\left(p(0,s,q)\right) + \int_0^s \vartheta_2\left(\tau, p(\tau,s,q)\right)d\tau)ds.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Для системы ИУ (13), (14) применяя принцип сжатых отображений, докажем, что при$T^* > 0$, что система имеет единственное решение в $\overline{C}(Q_1(T^*))$.

Пусть $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2)$ решение системы (13), (14), удовлетворяющее неравенству:

$$
\|\vartheta - \phi\| \le M = const, \quad i = 1,2, \quad \phi = (\phi_1, \phi_2),
$$

$$
\begin{aligned}
\phi_1 &= \frac{1}{2}\varphi_1(q(0,t,x)) + \frac{1}{2}g(t,x)u_0\left(p(0,t,x)\right) - \frac{1}{2}\int_0^t \beta(s,q)u_0\left(p(0,s,q(s,t,x))\right)ds + \\
&+ \int_0^t a_1(s,q)u_0\left(p(0,s,q(s,t,x))\right)ds + \int_0^t b_1(s,q)\omega_0\left(p(0,s,q(s,t,x))\right)ds,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\phi_2 &= \frac{1}{2}\varphi_2(q(0,t,x)) + \frac{1}{2}g(t,x)\omega_0\left(p(0,t,x)\right) - \frac{1}{2}\int_0^t \beta(s,q)\omega_0\left(p(0,s,q(s,t,x))\right)ds + \\
&+ \int_0^t a_2(s,q)u_0\left(p(0,s,q(s,t,x))\right)ds + \int_0^t b_2(s,q)\omega_0\left(p(0,s,q(s,t,x))\right)ds.
\end{aligned}
$$

Покажем, что при $T < T_*$ операторыA_1, A_2 являются операторами сжатия

$$
\|A_i\vartheta - \phi_i\| \le (\|g\|K + \|f_i\|)T + (\|a_i\| + \|b_i\| + \frac{1}{2}\|\beta\|)K\frac{T^2}{2} = \Omega_i(T), \quad i = 1,2,
$$

где

$$\|\vartheta\| \le \|\phi\| + M = K.$$

Справедливы оценки:

$$\left\|A_i\vartheta^1 - A_i\vartheta^2\right\| \le \theta_i(T)\left\|\vartheta^1 - \vartheta^2\right\|, \quad i = 1,2,$$

где

$$\theta_i(T) = \|g\|T + (\|a_i\| + \|b_i\| + \frac{1}{2}\|\beta\| + L_i^1 + L_i^2)\frac{T^2}{2}, \quad i = 1,2,$$

где $f_i(t,x,u,\omega) \in Lip(L_i^1\big|_u, L_i^2\big|_\omega)$.

Обозначим через $T_i, i = 1,2,3,4 -$положительные корни уравнений $\Omega_i(T) = M, \theta_i(T) = 1, \quad i = 1,2.$

При$T < T^* = \min\{T_1\ ,T_2, T_3, T_4\}$ система ИУ (13), (14) имеет единственное решение, следовательно, задача (1)-(3) тоже имеет единственное решение. Теорема доказана.

Вывод. Полученный результат также можно распространить на случай, если коэффициенты производных неизвестных функций второго порядка по аргументу x разные.

Литература

1. Аширбаева А.Ж. Исследования решения нелинейного дифференциально-го уравнения в частных производных [Текст] / А.Ж. Аширбаева // Вестник ОшГУ, Серия естественных наук. - 2008.– № 1. – С. 140–144.
2. Аширбаева А.Ж. Решение нелинейных дифференциальных и интегро–дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка методом дополнительного аргумента: Автореф. дисс. … докт. физ.–матем. наук, 01.01.02 [Текст] / А.Ж. Аширбаева.- Бищкек, 2012. - 34 с.
3. Аширбаева А.Ж. Сведение нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка с n+1 независи-мыми переменными к решению интегрального уравнения [Текст] / А.Ж. Аширбаева // Вестник ОшГУ. –2013. – № 1. – Спец. выпуск – С. 82-86.
4. Аширбаева А.Ж. Метод дополнительного аргумента для системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со многими переменными / А.Ж. Аширбаева, Ж.И. Мамбетов // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. Биш-кек, 2017. –№5. – С. 87–90.
5. Аширбаева А.Ж. Новый способ решения общего уравнения гиперболического типа / А.Ж. Аширбаева // Математическое образование. Москва, 2019. Вып.3(87). С.12-16.