УДК 517.968

DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_2(5)_4

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Аширбаева Айжаркын Жоробековна, д.ф.-м.н., профессор
aigarkyn.osh@mail.ru
Абдакимова Гулсара Кутбиллаевна
agulsara88@mail.ru
Ошский технологический университет имени М. Адышева
Ош, Кыргызская Республика

Аннотация. *Рассматривается задача решения дифференциального уравнения в частных производных. Порядок уравнения равен трем, квазилинейный, а также неизвестная функция содержится под интегралом. Для такого уравнения были рассмотрены краевые условия и использован метод дополнительного аргумента.*

Ключевые слова: *Третий порядок, квазилинейный, интегральный оператор, краевые условия, принцип сжимающих отражений, конечный, однородный.*

ҮЧҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ СЫЗЫКТУУ ЭМЕС ЖЕКЕЧЕ ТУУНДУЛУУ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН ЧЕЧИМДЕРИН ИЗИЛДӨӨ

Аширбаева Айжаркын Жоробековна, ф.-м.и.д., профессор
aigarkyn.osh@mail.ru
Абдакимова Гулсара Кутбиллаевна
agulsara88@mail.ru
М. Адышеватындагы Ош технологиялык университети
Ош, Кыргыз Республикасы

Аннотация. *Жекече туундулуу дифференциалдык теңдемени чечүү маселеси каралган. Теңдеменин тартиби үчкө барабар, квазисызыктуу ошондой эле белгисиз функция интегралдын ичинде да камтылат. Мындай теңдеме үчүн чектик шарттар каралып, кошумча аргумент киийрүү усулу колдонулган.*

Ачкыч сөздөр: *Үчүнчү тартип, квазисызыктуу, интегралдык опреатор, чектик шарттар, кысып чагылтуулар принциби, чектелүү, бир тектүү.*

NVESTIGATION OF SOLUTIONS OF NONLINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS IN PARTIAL DERIVATIVES OF THE THIRD ORDER

Ashirbaeva Aizharkyn Zhorobekovna- Doctor of Ph. and Math.l Sc., professor
aigarkyn.osh@mail.ru
Abdakimova Gulsara Kutbillaevna
agulsara88@mail.ru
Osh technological university named after the M. Adyshev
Kyrgyzstan,Osh

Abstract. *The problem of solving a partial differential equation is considered. The order of the equation is three, quasi-linear, and the unknown function is contained under the integral. For such an equation, boundary conditions were considered and the method of additional argument was used.*

Key words: *Third order, quasi-linear, integral operator, boundary conditions, principle of compressive reflections, finite, homogeneous.*

Введение. В данной работе использована предложенная в [1] схема применения метода дополнительного аргумента (МДА) для уравнений высокого порядка.

Исследование решений дифференциальных, интегро-дифференциальных уравнений с частными производными различных типов с применением МДА рассмотрено в ряде работ. Исследование решения дифференциального уравнения в частных производных второго порядка гиперболического типа новым способом рассмотрено в работах [2,6,7], а применение МДА для системы дифференциальных уравнений - в статьях [5,9]. Доказательства теорем существования и единственности решения начальной задачи для операторно-дифференциальных уравнений и систем таких уравнений приведены в работах [4,8].

В настоящее время представляет большой интерес нахождения приближенного решения начальной задачи с использованием МДА [3].

В предлагаемой статье мы рассмотрим начальные и предельные граничные условия для уравнения третьего порядка и приведем его к интегральному уравнению с использованием указанного метода на основе обозначений. Доказано существование решения предельной краевой задачи и ограниченность частных производных решения.

Постановка задачи.

Рассматривается уравнение:

$$u_t(t,x)+u(t,x)u_x(t,x)-u_{txx}(t,x)-u(t,x)u_{xxx}(t,x)=F(t,x;u), \quad (1)$$

$$G_2(T)=[0,T]\times R,\ T\in R_+=(0,\infty).$$

Уравнение (1) интегро-дифференциальное, так как содержит интегральный оператор $F(t,x;u)$, содержащий функцию $u(t,x)$ в целом и под знаком интеграла.

Пусть оператор $F(t,x;u)$ имеет следующий конкретный вид:

$$F(t,x;u)=f(t,x,u,\int_{-\infty}^{\infty}K(t,x,\xi)u(t,\xi)d\xi).$$

Рассматриваются условия для уравнения (1):

начальное:

$$u(0,x)=\varphi(x)\,, \quad (2)$$

предельное краевое:

$$u(t,\infty)=u_x(t,\infty)=0\,. \quad (3)$$

условие согласования: $\varphi(\infty)=\varphi'(\infty)=0$.

Методы решения.

Для (1) введем обозначение: $z(t,x)=u(t,x)-u_{xx}(t,x)$.

Тогда (1) принимает вид: $D[u(t,x)]z(t,x)=F(t,x;u)$.(4)

Следовательно, для задачи (4),(2) применяется МДА. Такие применения МДА можно посмотреть в работах [2-4].

Имеем эквивалентную начальной задаче (4), (2) систему интегральных уравнений(ИУ):

$$z(t,x)=\overline{\varphi}(p(0,t,x;u)+\int_0^t F(\eta,p(\eta,t,x;u);u(\eta,p(\eta,t,x;u))d\eta,\ (t,x)\in G_2(T) \tag{5}$$

$$p(\tau,t,x;v)=x-\int_\tau^t u(s,p(s,t,x;u))ds,(\tau,t,x)\in Q_2(T), \tag{6}$$

здесь $\overline{\varphi}=z(0,x)$,

$$Q_n(T)=\{(t_1,t_2,t_3,..,t_n,x)|\ 0\le t_1\le t_2\le t_3\le ...\le t_n\le T,\ x\in R\};$$

Действительно (5), (6) удовлетворяет начальной задаче (4), (2). ИУ типа (6) и его свойства рассмотрены в работах [1-4]. Теперь рассмотрим уравнение (5) с условием (3). Из (5), (3) имеем

$$u(t,x)=\int_x^\infty e^{x-s}\int_{-\infty}^s e^{\xi-s}[\overline{\varphi}(p(0,t,\xi;u)+$$

$$+\int_0^t F(\eta,p(\eta,t,\xi;u);u(\eta,p(\eta,t,\xi;u))d\eta]d\xi ds,\quad (t,x)\in G_2(T). \tag{7}$$

Обозначая в (7) через $v(\tau,t,x)=u(\tau,\ p(\tau,t,x;u))$, имеем:

$$v(\tau,t,x)=\int_{p(\tau,t,x;v)}^\infty e^{p(\tau,t,x;v)-s}A(s;p,v)ds,\qquad (\tau,t,x)\in Q_2(T), \tag{8}$$

где $A(s,p,v)=\int_{-\infty}^s e^{\xi-s}[\overline{\varphi}(p(0,\tau,\xi;v)+\int_0^\tau F(\eta,p(\eta,\tau,\xi;v);v(\eta,\tau,\xi))d\eta]d\xi.$

В работе используется следующая лемма.

Лемма 1. Если $\varphi(p)=\int_p^\infty e^{p-s}\psi(s)ds,\quad \psi\in\overline{C}(R),$ то

$$\|\varphi\|\le\|\psi\|,\quad \|\varphi'\|\le 2\|\psi\|.$$

Доказательство. Дифференцируя, получаем

$$|\varphi'(p)|=\left|-\psi(p)+\int_p^\infty e^{p-s}\psi(s)ds\ \right|\le\|\psi\|+\|\psi\|=2\|\psi\|.$$

Пусть:

$\overline{C}$ -пространствонепрерывных и ограниченных функций;

Lip(N|$_u$,M|$_v$,…) класс функций, удовлетворяющих условию Липшица.

Теорема. Пусть $\overline{\varphi}(x)\in\overline{C}(R)\cap Lip\big|_L$,

$$f(t,x,u,I)\in\overline{C}(G_2(T))\times R\cap Lip(M\big|_x,N\big|_u,H\big|_I),\quad K(t,x,s)\in\overline{C}(G_2(T)\times R),$$

причем

$$\int_{-\infty}^{\infty}|K(t,x,s|ds<\gamma=const.$$

Тогда существует такое $T^*\in R_+$, что уравнение (8) имеет единственное решение в $\overline{C}(G_2(T^*))$.

Доказательство. Для (8) применяем принцип сжатых отображений(ПСО) и лемму 1:

$$|A(s,p,v)|=\int_{-\infty}^{s}e^{\xi-s}[\|\overline{\varphi}\|+\int_{0}^{\tau}\|F\|d\eta]d\xi\le\|\overline{\varphi}\|+T^*\|F\|=\overline{V},\|v\|\le\overline{V}.$$

Из (6) и (8) получаем оценки:

$$\|p_{n+1}-p_n\|\le T^*\|v_{n+1}-v_n\|;$$

$$\|v_{n+1}-v_n\|\le\Bigg\|\int_{p_{n+1}(\tau,t,x;v)}^{\infty}e^{p_{n+1}(\tau,t,x;v)-s}A(s;p_{n+1},v_{n+1})ds-$$

$$-\int_{p_n(\tau,t,x;v)}^{\infty}e^{p_n(\tau,t,x;v)-s}A(s;p_{n+1},v_{n+1})ds+$$

$$+\int_{p_n(\tau,t,x;v)}^{\infty}e^{p_n(\tau,t,x;v)-s}A(s;p_{n+1},v_{n+1})ds-\int_{p_n(\tau,t,x;v)}^{\infty}e^{p_n(\tau,t,x;v)-s}A(s;p_n,v_n)ds\Bigg\|,$$

$$(\tau,t,x)\in Q_2(T).$$

Отсюда в силу леммы1 получаем оценки:

$$\|v_{n+2}-v_{n+1}\|\le 2\|A(p_{n+1},v_{n+1})\|\|p_{n+1}-p_n\|+\|A(p_{n+1},v_{n+1})-A(p_n,v_n\|\le$$

$$\le 2\overline{V}\|p_{n+1}-p_n\|+\underset{S}{Sup}\int_{-\infty}^{s}e^{p-s}[L\|p_{n+1}-p_n\|+$$

$$+\int_{0}^{\tau}(M\|p_{n+1}-p_n\|+(N+H\gamma)\|v_{n+1}-v_n\|)d\alpha]ds\le$$

$$\le 2\overline{V}\|p_{n+1}-p_n\|+L\|p_{n+1}-p_n\|+T^*M\|p_{n+1}-p_n\|+t_0(N+H\gamma)\|v_{n+1}-v_n\|\le$$

$$\le(2\overline{V}+L+t_0M)t_0\|v_{n+1}-v_n\|+T^*(N+H\gamma)\|v_{n+1}-v_n\|\le$$

$$\le T^*((2\overline{V}+L+t_0M)+N+H\gamma)\|v_{n+1}-v_n\|.$$

$$\|v_{n+2}-v_{n+1}\|\le T^*(2\overline{V}+L+t_0M)+N+H\gamma)\|v_{n+1}-v_n\|.$$

Отсюда при $T^*<(2\overline{V}+L+T^*M+N+H\gamma)^{-1}$ по ПСО получаем доказательство теоремы.

Лемма 2. При $T\le T^*$, функция $v(\tau,t,x)$ имеет непрерывные и ограниченные частные производные по всем аргументам.

Доказательство. Из доказательства теоремы получаем, что функция $v_\tau(\tau,t,x)$ ограничена:

$$v_\tau(\tau,t,x)=v\ \ (\tau,t,x)A(x-\int_{\tau}^{t}v(\eta,t,x)d\eta;p;v).$$

Теперь найдем производную по t :

$$v_t(\tau,t,x) = (v(t,t,x) + \int\limits_{\tau}^{t} v_t(\eta,t,x)d\eta)A(x - \int\limits_{\tau}^{t} v(\eta,t,x)d\eta; p; v) +$$

$$+ \int\limits_{p(\tau,t,x;v)}^{\infty} e^{p(\tau,t,x;v)-s}[-v(t,t,x) - \int\limits_{\tau}^{t} v_t(\eta,t,x)d\eta]A(s,p,v)ds$$

Применим ПСО:

$$\|v_t\| \le \|K_1\| \cdot \|v\| + \|K_1\| \cdot \|v_t\| T^*.$$

$$\|v_t\| - \|K_1\| \cdot \|v_t\| T^* - \|K_1\| \cdot \|v\| \le 0,$$

где $\|A - K\| \le K_1 = const,$

$$K(\tau,t,x;p,v) \equiv \int\limits_{p(\tau,t,x;v)}^{\infty} e^{p(\tau,t,x;v)-s} A(s;p,v)ds.$$

Пусть

$$\|K_1\| \cdot \|v_t\| - \|v_t\| - \|K_1 v\| = 0.$$

Отсюда решая уравнение, получаем ограниченность v_t :

$$\|v_t\| \le M_0 = const.$$

Аналогично получаем ограниченность v_x.

Из леммы 2 следует, что функция $p(\tau,t,x)$ имеет непрерывные и ограниченные частные производные по всем аргументам.

Лемма 3. Производные $u_t, u_x, u_{txx}, u_{xxx}$ от решения задачи (1) - (2) - (3) равномерно ограничены.

Доказательство. Найдемпроизводные изИУ:

$$u(t,x) = \int\limits_{x}^{\infty} e^{x-s} \int\limits_{-\infty}^{s} e^{\xi-s}[\overline{\varphi}(p(0,t,\xi;u) +$$

$$+ \int\limits_{0}^{t} f(\eta, p(\eta,t,\xi;u), u(\eta, p(\eta,t,\xi;u), \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(\eta, p(\eta,t,\xi;u),\zeta)u(\eta,\zeta)d\zeta)d\eta]d\xi ds.$$

$$u_t(t,x) = \int\limits_{x}^{\infty} e^{x-s} \int\limits_{-\infty}^{s} e^{\rho-s}\{\overline{\varphi}'(-u(t,x) - \int\limits_{0}^{t} v_t(\tau,t,\rho))d\tau) +$$

$$+ f(t,x,u,I) + \int\limits_{0}^{t}[f_x(\tau,p,v)p_t + f_u(\tau,p,v)v_t +$$

$$+ f_I(\tau,p,v)\int\limits_{-\infty}^{\infty} K_p(\eta, p(\eta,t,\xi;u),\zeta)u(\eta,\zeta)d\zeta)d\eta p_t]d\tau\}d\rho ds,$$

$$u_x(t,x) = -\int\limits_{-\infty}^{x} e^{\rho-x}[\overline{\varphi}(p(0,t,\rho) +$$

$$+\int_0^t F(\nu, p(\nu,t,\rho); v(\nu,t,\rho))d\nu]d\rho ds + u(t,x),$$

$$u_{xxx}(t,x) = -[\overline{\varphi}' p_x + \int_0^t [\, f_x p_x + f_u v_x + + f_I \int_{-\infty}^{\infty} K_p u(\eta,\zeta)d\zeta)d\eta p_x]d\tau\}d\rho ds + u_x(t,x).$$

Ограниченность u_{txx} следует из равенства

$$u_{txx} = u_t + uu_x - uu_{xxx} = f \; .$$

Вывод. Интегро-дифференциальное уравнение в частных производных третьего порядка с начальным и предельным граничным условиямиприведено к решению ИУ. Доказано существование единственного решения, имеющее ограниченные частные производные.

Литература

1. Аширбаева А.Ж. Решение нелинейных дифференциальных и интегро–дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка методом дополнительного аргумента:Автореф. дисс. докт. физ.–матем. наук, 01.01.02 [Текст] / А.Ж. Аширбаева.- Бищкек, 2012. - - 34 с.
2. Аширбаева А.Ж. Новый способ приведения дифференциального урав-нения в частных производных второго порядка гиперболического типа к интегральному уравнению [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазия-ева // Вестник ОшГУ. – 2013. – № 1. – Спец. выпуск. – С. 87–90.
3. Аширбаева А.Ж. Приближенное решение начальной задачи для нели-нейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка методом дополнительного аргумента [Текст] / А.Ж. Ашир-баева // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2014. – Вып. 46. – С. 37–40.
4. Аширбаева А.Ж. Решение нелинейного операторно-дифференциаль-ного уравнения в частных производных второго порядка методом дополнительного аргумента [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазия-ева // Вестник КРСУ. 2015. –Т.15 –№5. – С. 61–64.
5. Аширбаева А.Ж. Решение системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных методом дополнительногоаргу-мента [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Ж.И. Мамбетов // Естественные и ма-тематические науки в современном мире. Новосибирск, 2017.-№1(48). -С.111-124.
6. Аширбаева А.Ж. Новый способ приведения дифференциального урав-нения в частных производных второго порядка гиперболического типа к интегральному уравнению [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазия-ева // Вестник ОшГУ. – 2013. – № 1. – Спец. выпуск. – С. 87–90.
7. Мамазиаева Э.А. Исследование решений операторно-дифференциаль-ного уравнения гиперболического типа [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазияева // Вестник ОшГУ. – Ош, 2014. – № 3. -С. 27–32.
8. Мамбетов Ж.И. Решение нелинейного операторно-дифференциального уравнения в частных производных второго порядка со многими пере-менными методом дополнительного аргумента[Текст] / А.Ж. Ашир-баева, Э.А. Мамазиаева, Ж.И. Мамбетов // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. Бишкек, 2017. –№5. – С. 81–86.
9. Мамбетов Ж.И. Решение системы интегро-дифференциальных уравне-ний методом дополнительного аргумента [Текст] / А.Ж. Аширбаева, Ж. И. Мамбетов // Вестник ОшГУ. Специальный выпуск – Ош, 2013. – № 1. -С. 91–94.