УДК: 517.956, 517.956.6
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_2(5)_3

ОБ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА В ТРЁХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Апаков Юсупжон Пулатович, д.ф.-м.н., профессор
yusupjonapakov@gmail.com
Институт Математики им. В.И.Романовского Акад. наук Республики Узбекистан
Хамитов Азизбек Ахмаджон угли докторант (PhD)
azizbek.khamitov.93@mail.ru
Наманганский инженерно-строительный институт
Наманган, Узбекистан

Аннотация. *В данной работе рассматривается граничная задача для неоднородного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в трёхмерном пространстве. Единственность решение доказана методом интегралов энергии, а существование решения методом разделения переменных. Решение выписано через построенную функцию Грина. При обосновании равномерной сходимости установлено отличие от нуля «малого знаменателя».*

Ключевые слова: *Дифференциальные уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, граничная задача, собственное значение, собственная функция, функциональный ряд, абсолютная и равномерная сходимость.*

ON A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A THIRD-ORDER INHOMOGENEOUS EQUATION IN THREE-DIMENSIONAL SPACE

Apakov Yupjon Pulatovich, DrSc, professor
yusupjonapakov@gmail.com
V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics
Uzbekistan Academy of Sciences
Namangan Engineering-Construction Institute
Namangan, Uzbekistan
Hamitov Azizbek Ahmadjon uglu, Postgraduate Student
azizbek.khamitov.93@mail.ru
Namangan Engineering-Construction Institute
Namangan, Uzbekistan

Abstract. *This work considers a boundary value problem for a third-order non-homogeneous equation with multiple characteristics in three-dimensional space. The uniqueness of the solution is proved by the method of energy integrals, and the existence of the solution is proved by the process of separation of variables. The solution is written out through the constructed Green function. When justifying uniform convergence, a difference from zero of the "small denominator" is established.*

Key words: *Third-order differential equations with multiple characteristics, boundary value problem, eigenvalue, eigenfunction, functional series, absolute and uniform convergence.*

1. Введение

Дифференциальные уравнения в частных производных третьего порядка рассматриваются при решении задач теории нелинейной акустики и в гидродинамической теории космической плазмы, а также фильтрации жидкости в пористых средах [1].

В работе [2], учитывая свойства вязкости и теплопроводности газа, из системы Навье-Стокса было получено уравнение третьего порядка с кратными характеристиками, содержащее вторую производную по времени

$$u_{xxx} + u_{yy} - \frac{\nu}{y} u_y = u_x u_{xx}, \quad \nu = const.$$

Это уравнение при $\nu = 1$ описывает осесимметричный поток, а при $\nu = 0$ описывает плоско - параллельный поток [3].

Первые результаты по уравнению третьего порядка с кратными характеристиками были получены в работах H. Block [4], E. Del Vecchio [5].

L. Catabriga в работе [6] для уравнения $D_x^{2n+1} u - D_y^2 u = 0$ построил фундаментальное решение в виде двойного несобственного интеграла и изучил свойства потенциала, решил краевые задачи.

В работах [7-8] построены фундаментальные решения уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, содержащие вторые производные по времени, выраженные через вырожденные гипергеометрические функции, изучены их свойства, найдены оценки при $|t| \to \infty$.

В работах [9-10] в плоскости, т.е. при $z = 0$, рассмотрены краевые задачи для неоднородного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками.

2. Постановка задачи

В области $D = \{(x, y, z): \ 0 < x < p, \ 0 < y < q, \ 0 < z < r\}$ рассмотрим следующее уравнение третьего порядка вида

$$L[u] \equiv \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z), \tag{1}$$

где $p, q, r \in R$ и для него исследуем следующую задачу:

Задача A**.** Найти решение уравнения (1) в области D из класса $u(x, y, z) \in C^{3,2,2}_{x,y,z}(D) \cap C^{2,1,1}_{x,y,z}(\overline{D})$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x, 0, z) = u(x, q, z) = 0, \ u(x, y, 0) = u(x, y, r) = 0, \tag{2}$$

$$u(p, y, z) = \psi_1(y, z), \ u_x(p, y, z) = \psi_2(y, z), \ u_{xx}(0, y, z) = \psi_3(y, z), \tag{3}$$

где $\psi_i(y, z), \ i = \overline{1,3}, \ f(x, y, z)$ – заданные достаточно гладкие функции, причем

$$\begin{cases} \psi_i(0, z) = \psi_i(q, z) = 0, \dfrac{\partial^2 \psi_i(0, z)}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 \psi_i(q, z)}{\partial y^2} = 0, \\ \psi_i(y, 0) = \psi_i(y, r) = 0, \dfrac{\partial^2 \psi_i(y, 0)}{\partial z^2} = \dfrac{\partial^2 \psi_i(y, r)}{\partial z^2} = 0, \qquad i = \overline{1,3}. \\ f(x, 0, z) = f(x, q, z) = 0, \ f(x, y, 0) = f(x, y, r) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

Отметим, что для уравнения (1) при $f(x, y, z) = 0$ в работах [11-12], исследованы некоторые корректные краевые задачи в конечных и бесконечных областях.

3. Единственность решения

Теорема 1. Если задача A имеет решение, то оно единственно.

Доказательство. Предположим обратное, пусть задача A имеет два решения $u_1(x,y,z)$ и $u_2(x,y,z)$. Тогда функция $u(x,y,z)=u_1(x,y,z)-u_2(x,y,z)$ удовлетворяет уравнению (1) с однородными краевыми условиями. Докажем, что $u(x,y,z)\equiv 0$ в $\overline{D}$.

Для этого уравнения (1) умножим на *u*, тогда получим

$$uL[u]\equiv\frac{\partial}{\partial x}\left(uu_{xx}-\frac{1}{2}u_x^2\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(uu_y\right)+u_y^2-\frac{\partial}{\partial z}\left(uu_z\right)+u_z^2=0. \qquad (5)$$

Интегрируя тождество (5) по области D и учитывая однородные краевые условия, получим

$$\frac{1}{2}\int_0^q\int_0^r u_x^2(0,y,z)dydz+\iiint_D u_y^2(x,y,z)\,dxdydz+\iiint_D u_z^2(x,y,z)\,dxdydz=0.$$

Отсюда следует, что $u_y(x,y,z)=0$ и $u_z(x,y,z)=0$, т.е. $u(x,y,z)=h(x)$, здесь $h(x)$ является произвольной функцией, удовлетворяющей условиям задачи. Тогда поставляя в уравнение (1), имеем $h'''(x)=0$. Отсюда, $h(x)=C_1x^2+C_2x+C_3$. Из условии (3), получим

$$\begin{cases}2C_1=0,\\ C_1p^2+C_2p+C_3=0,\\ 2C_1p+C_2=0.\end{cases}$$

Основной определитель этой системы равен

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 0 & 0\\ p^2 & p & 1\\ 2p & 1 & 0\end{vmatrix}=-2\neq 0.$$

Так как $\Delta\neq 0,$ то $C_1=C_2=C_3=0,$ отсюда получим $h(x)=0$. Следовательно, $u(x,y,z)\equiv 0$, $(x,y,z)\in\overline{D}$. В силу последнего, получим $u_1(x,y,z)=u_2(x,y,z)$.

Теорема 1 доказана.

4. Существование решения

Теорема 2. Если выполняются следующие условия:

$$1)\ \frac{\partial^6\psi_i(y,z)}{\partial y^3\partial z^3}\in C\left[0<y<q,0<z<r\right],\ i=\overline{1,3};$$

$$2)\ \frac{\partial^5 f(x,y,z)}{\partial x\partial y^2\partial z^2}\in C\left[0<x<p,0<y<q,0<z<r\right],$$

и (4), то решение задачи A существует.

Доказательство. Решения задачи A, ищем в виде

$$u(x,y,z)=\mathrm{X}(x)V(y,z).$$

Поставляя в уравнение (1) и разделяя переменные, для $V(y,z)$ имеем следующую задачу:

$$\begin{cases} V_{yy} + V_{zz} + \lambda V = 0, \\ V(0,z) = V(q,z) = 0, \\ V(y,0) = V(y,r) = 0, \end{cases} \qquad (6)$$

где λ - параметр разделения.

Найдем собственные значения и собственные функции задачи (6). Решение задачи (6) ищем в виде

$$V(y,z) = Y(y)Z(z). \qquad (7)$$

Подставляя (7) в уравнение (6), разделяя переменные, имеем задачи

$$\begin{cases} Y'' + \nu Y = 0, \\ Y(0) = Y(q) = 0, \end{cases} \qquad (8)$$

$$\begin{cases} Z'' + \mu Z = 0, \\ Z(0) = Z(r) = 0, \end{cases} \qquad (9)$$

где ν и μ - положительные постоянные, связанные соотношением $\lambda = \nu + \mu.$

Известно из [13], что решения задачи (8), (9) имеют следующий вид:

$$\begin{cases} Y_n(y) = A_n \sin\dfrac{n\pi y}{q}, \\ Z_m(z) = A_m \sin\dfrac{m\pi z}{r}, \end{cases}$$

где $A_{n,m}$ - некоторые постоянные множители, $\nu_n = \left(\dfrac{n\pi}{q}\right)^2, \mu_m = \left(\dfrac{m\pi}{r}\right)^2$, $n,m \in N$ - собственные значения.

Тогда, в качестве решения спектральной задачи (8), (9) возьмем функции

$$V_{n,m}(y,z) = \frac{2}{\sqrt{qr}} \sin\frac{n\pi y}{q} \sin\frac{m\pi z}{r}, \qquad (10)$$

которые соответствуют собственным значениям

$$\lambda_{n,m} = \left(\frac{n^2}{q^2} + \frac{m^2}{r^2}\right)\pi^2, \quad n,m \in N.$$

Отметим, что система собственных функций (10) задачи (7), (8) является полной и ортонормированной в пространстве $L_2(0 < y < q, 0 < z < r)$ [14-15].

Разложим $f(x,y,z)$ в ряд Фурье по $\{V_{n,m}(y,z)\}$:

$$f(x,y,z) = \frac{2}{\sqrt{qr}} \sum_{n,m=1}^{+\infty} f_{n,m}(x) \sin\frac{n\pi y}{q} \sin\frac{m\pi z}{r},$$

где $f_{n,m}(x)=\dfrac{2}{\sqrt{qr}}\int\limits_0^q\int\limits_0^r f(x,y,z)\sin\dfrac{n\pi y}{q}\sin\dfrac{m\pi z}{r}dydz.$

Интегрируя функцию $f_{n,m}(x)$ по частям и учитывая условия (4), имеем оценку

$$\left|f_{n,m}(x)\right|\le M\frac{\left|F_{n,m}(x)\right|}{n^2m^2}, \qquad (11)$$

здесь

$$M=\left(\frac{qr}{\pi^2}\right)^2,\quad F_{n,m}(x)=\frac{2}{\sqrt{qr}}\int\limits_0^q\int\limits_0^r\frac{\partial^4 f(x,y,z)}{\partial y^2\partial z^2}\sin\frac{n\pi y}{q}\sin\frac{m\pi z}{r}dydz.$$

В дальнейшем максимальное значение всех найденных положительных известных чисел в оценках будем обозначать через M .

Решение задачи A ищем в виде

$$u(x,y,z)=\frac{2}{\sqrt{qr}}\sum_{n,m=1}^{+\infty}X_{n,m}(x)\sin\frac{n\pi y}{q}\sin\frac{m\pi z}{r}. \qquad (12)$$

Поставляя (12) в уравнение (1), учитывая граничные условия (3), получим следующую задачу:

$$\begin{cases}X'''_{n,m}(x)+\lambda_{n,m}X_{n,m}(x)=f_{n,m}(x),\\ aX_{n,m}(0)+bX''_{n,m}(0)=\psi_{1n,m},\\ cX_{n,m}(p)+dX''_{n,m}(p)=\psi_{2n,m},\\ X'_{n,m}(p)=\psi_{3n,m},\end{cases} \qquad (13)$$

где $\psi_{in,m}=\dfrac{2}{\sqrt{qr}}\int\limits_0^q\int\limits_0^r\psi_i(y,z)\sin\dfrac{n\pi y}{q}\sin\dfrac{m\pi z}{r}dydz,\ i=\overline{1,3}.$

Применяя интегрирование по частям к $\psi_{in,m}$ с учетом условия (4), получаем оценку

$$\left|\psi_{in,m}\right|\le M\frac{\left|\Psi_{in,m}\right|}{n^3m^3}, \qquad (14)$$

здесь

$$\Psi_{in,m}=\frac{2}{\sqrt{qr}}\int\limits_0^q\int\limits_0^r\frac{\partial^6\psi_i(y,z)}{\partial y^3\partial z^3}\cos\frac{n\pi y}{q}\cos\frac{m\pi z}{r}dydz.$$

Решение задачи (13) находим методом построение функции Грина, для этого с помощью функции

$$U_{n,m}(x)=X_{n,m}(x)-\rho_{n,m}(x), \qquad (15)$$

изменим граничные условия на однородные.

Функция $\rho(x)$ имеет вид

$$\rho_{n,m}(x)=\frac{1}{2}(x-p)^2\psi_{1n,m}+\psi_{2n,m}+(x-p)\psi_{3n,m}. \qquad (16)$$

Подставляя (15), (16) в (13) получим задачу

$$\begin{cases} U'''_{n,m}(x) + \lambda_{n,m} U_{n,m}(x) = \lambda_{n,m} g_{n,m}(x), \\ U_{n,m}(p) = U'_{n,m}(p) = U''_{n,m}(0) = 0, \end{cases} \tag{17}$$

здесь

$$g_{n,m}(x) = (p-x)\psi_{3n,m} - \psi_{2n,m} - \frac{1}{2}(x-p)^2 \psi_{1n,m} + \frac{f_{n,m}(x)}{\lambda_{n,m}}.$$

Учитывая (11), (14) и $\lambda_{n,m} = \left(\frac{\pi n}{q}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{r}\right)^2 \geq \frac{2\pi^2}{qr} nm,\ \ n,m \in N$, имеем оценки

$$\begin{aligned} \left| g_{n,m}(x) \right| &\leq \frac{M}{n^3 m^3} \left(\sum_{i=1}^{3} \left| \Psi_{in,m} \right| + \left| F_{n,m}(x) \right| \right), \\ \left| g'_{n,m}(x) \right| &\leq \frac{M}{n^3 m^3} \left(\sum_{i=1}^{3} \left| \Psi_{in,m} \right| + \left| F'_{n,m}(x) \right| \right). \end{aligned} \tag{18}$$

Решение задачи (17) ищем в виде:

$$U_{n,m}(x) = \lambda_{n,m} \int_0^p G_{n,m}(x,\xi) g_{n,m}(\xi) d\xi, \tag{19}$$

здесь $G_{n,m}(x,\xi)$ функция Грина задачи (17) и имеет вид:

$$G_{n,m}(x,\xi) = \begin{cases} G_{1n,m}(x,\xi), 0 \leq x < \xi, \\ G_{2n,m}(x,\xi), \xi < x \leq p, \end{cases} \tag{20}$$

здесь

$$G_{1n,m}(x,\xi) = \frac{1}{\overline{\Delta}} \left(\begin{array}{l} e^{-k_{n,m}x} \left(2e^{k_{n,m}\left(p - \frac{\xi}{2}\right)} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} k_{n,m}\xi \right) - 2e^{k_{n,m}\left(\xi - \frac{p}{2}\right)} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} k_{n,m} p \right) \right) - \\ -2e^{-\frac{k_{n,m}}{2}(p-x)} \left(e^{k_{n,m}\xi} + 2e^{-\frac{k_{n,m}}{2}\xi} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} k_{n,m}\xi \right) \right) \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} k_{n,m}(p-x) + \frac{\pi}{6} \right) \\ +2e^{k_{n,m}\left(\frac{x}{2} - \frac{\xi}{2}\right)} \left(e^{k_{n,m}p} + 2e^{\frac{-k_{n,m}}{2}p} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} k_{n,m} p \right) \right) \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} k_{n,m}(\xi - x) + \frac{\pi}{6} \right) \end{array} \right),$$

$$G_{2n,m}(x,\xi) = \frac{1}{\overline{\Delta}} \left(e^{k_{n,m}\xi} + 2e^{-\frac{k_{n,m}}{2}\xi} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} k_{n,m}\xi \right) \right)$$

$$\left(e^{k_{n,m}(p-x)} - 2e^{-\frac{k_{n,m}}{2}(p-x)} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} k_{n,m}(p-x) + \frac{\pi}{6} \right) \right),$$

$$\overline{\Delta} = 3k_{n,m}^2 e^{k_{n,m}p} \left(1 + 2e^{-\frac{3}{2}k_{n,m}p} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} k_{n,m} p \right) \right),$$

$$k_{n,m}=\sqrt[3]{\lambda_{n,m}}=\sqrt[3]{\left(\frac{n^2}{q^2}+\frac{m^2}{r^2}\right)\pi^2},\quad n,m\in N.$$

В силу (12) и (15) решение задачи A имеет вид

$$u(x,y,z)=\frac{2}{\sqrt{qr}}\sum_{n,m=1}^{+\infty}\left(U_{n,m}(x)+\rho_{n,m}(x)\right)\sin\frac{n\pi y}{q}\sin\frac{m\pi z}{r}. \tag{21}$$

Если функция $u(x,y,z)$ определяемая рядом (21), и ее производные u_{xxx}, u_{yy} и u_{zz} сходятся абсолютно и равномерно в области $\overline{D}$, то она даёт решение задачи A.

Докажем абсолютную и равномерную сходимость ряда (21). Из (21) имеем оценку

$$\left|u(x,y,z)\right|\le M\sum_{n,m=1}^{+\infty}\left(\left|U_{n,m}(x)\right|+\left|\rho_{n,m}(x)\right|\right).$$

Теперь подставляя $G_{n,m}(x,\xi)=-\frac{1}{\lambda_{n,m}}G_{n,m\xi\xi\xi}(x,\xi)$ в (19) и интегрируя по частям, имеем

$$U_{n,m}(x)=-g_{n,m}(x)+g_{n,m}(0)G_{2n,m\xi\xi}(x,0)-g_{n,m}(p)G_{1n,m\xi\xi}(x,p)+$$
$$+\int_0^p G_{n,m\xi\xi}(x,\xi)g_{n,m}{}'(\xi)d\xi.$$

Учитывая (16), (18) и

$$\left|G_{2n,m\xi\xi}(x,0)\right|\le M,\ \left|G_{1n,m\xi\xi}(x,p)\right|\le M,\ \left|G_{n,m\xi\xi}(x,\xi)\right|\le M,$$

из функция Грина (20), получим оценки

$$\left|\rho_{n,m}(x)\right|\le\frac{M}{n^3m^3}\left(\left|\Psi_{1n,m}\right|+\left|\Psi_{2n,m}\right|+\left|\Psi_{3n,m}\right|\right),$$

$$\left|U_{n,m}(x)\right|\le\frac{M}{n^3m^3}\left(\sum_{i=1}^{3}\left|\Psi_{in,m}\right|+\left|F_{n,m}(0)\right|+\left|F_{n,m}(p)\right|+\left|F_{n,m}(x)\right|+\left|F'_{n,m}(x)\right|\right).$$

Отсюда

$$\left|u(x,y,z)\right|\le M\sum_{n,m=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3m^3}\left(\sum_{i=1}^{3}\left|\Psi_{in,m}\right|+\left|F_{n,m}(0)\right|+\left|F_{n,m}(p)\right|+\left|F_{n,m}(x)\right|+\left|F'_{n,m}(x)\right|\right)<\infty.$$

Отсюда следует, что ряд (21) сходится абсолютно и равномерно.

Теперь докажем, что частные производные ряда (21) входящие в уравнения (1), также сходятся абсолютно и равномерно в области $\overline{D}$. Для этого вычисляем частные производные ряда (21) по переменными y и z до второго порядка, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{2\pi^2}{\sqrt{q^5 r}}\sum_{n,m=1}^{+\infty}n^2\left(U_{n,m}(x)+\rho_{n,m}(x)\right)\sin\frac{n\pi y}{q}\sin\frac{m\pi z}{r},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{2\pi^2}{\sqrt{qr^5}}\sum_{n,m=1}^{+\infty}m^2\left(U_{n,m}(x)+\rho_{n,m}(x)\right)\sin\frac{n\pi y}{q}\sin\frac{m\pi z}{r}.$$

Учитывая оценку $u(x,y,z)$, получим

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right| \le M\sum_{n,m=1}^{+\infty}\frac{1}{nm^3}\left(\sum_{i=1}^{3}\left|\Psi_{in,m}\right| + \left|F_{n,m}(0)\right| + \left|F_{n,m}(p)\right| + \left|F_{n,m}(x)\right| + \left|F'_{n,m}(x)\right|\right),$$

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right| \le M\sum_{n,m=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3 m}\left(\sum_{i=1}^{3}\left|\Psi_{in,m}\right| + \left|F_{n,m}(0)\right| + \left|F_{n,m}(p)\right| + \left|F_{n,m}(x)\right| + \left|F'_{n,m}(x)\right|\right).$$

Используя неравенства Коши- Буняковского и Бесселя, получим

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right| \le M\sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{nm^3}\right)^2}\left(\sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty}\left|\Psi_{1n,m}\right|^2} + \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty}\left|\Psi_{2n,m}\right|^2} + \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty}\left|\Psi_{3n,m}\right|^2} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty}\left|F_{n,m}(0)\right|^2} + \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty}\left|F_{n,m}(p)\right|^2} + \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty}\left|F_{n,m}(x)\right|^2} + \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty}\left|F'_{n,m}(x)\right|^2}\right) \le$$

$$\le \overline{M}\left(\sum_{i=1}^{3}\left\|\frac{\partial^6\psi_i(y,z)}{\partial y^3\partial z^3}\right\|_{L_2[0<y<q,0<z<r]} + \left\|\frac{\partial^4 f(0,y,z)}{\partial y^2\partial z^2}\right\|_{L_2[0<y<q,0<z<r]} + \left\|\frac{\partial^4 f(p,y,z)}{\partial y^2\partial z^2}\right\|_{L_2[0<y<q,0<z<r]} + \right.$$

$$\left. + \left\|\frac{\partial^4 f(x,y,z)}{\partial y^2\partial z^2}\right\|_{L_2[0<x<p,\,0<y<q,\,0<z<r]} + \left\|\frac{\partial^5 f(x,y,z)}{\partial x\partial y^2\partial z^2}\right\|_{L_2[0<x<p,\,0<y<q,\,0<z<r]}\right) < \infty,$$

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right| \le M\sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^3 m}\right)^2}\left(\sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty}\left|\Psi_{1n,m}\right|^2} + \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty}\left|\Psi_{2n,m}\right|^2} + \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty}\left|\Psi_{3n,m}\right|^2} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty}\left|F_{n,m}(0)\right|^2} + \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty}\left|F_{n,m}(p)\right|^2} + \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty}\left|F_{n,m}(x)\right|^2} + \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty}\left|F'_{n,m}(x)\right|^2}\right) \le$$

$$\le \overline{M}\left(\sum_{i=1}^{3}\left\|\frac{\partial^6\psi_i(y,z)}{\partial y^3\partial z^3}\right\|_{L_2[0<y<q,0<z<r]} + \left\|\frac{\partial^4 f(0,y,z)}{\partial y^2\partial z^2}\right\|_{L_2[0<y<q,0<z<r]} + \left\|\frac{\partial^4 f(p,y,z)}{\partial y^2\partial z^2}\right\|_{L_2[0<y<q,0<z<r]} + \right.$$

$$\left. + \left\|\frac{\partial^4 f(x,y,z)}{\partial y^2\partial z^2}\right\|_{L_2[0<x<p,\,0<y<q,\,0<z<r]} + \left\|\frac{\partial^5 f(x,y,z)}{\partial x\partial y^2\partial z^2}\right\|_{L_2[0<x<p,\,0<y<q,\,0<z<r]}\right) < \infty,$$

так как

$$\sum_{n,m=1}^{+\infty}\left|\Psi_{in,m}\right|^2 \le \left\|\frac{\partial^6\psi_i(y,z)}{\partial y^3\partial z^3}\right\|^2_{L_2[0<y<q,0<z<r]},\ i=\overline{1,3},\ \sum_{n,m=1}^{+\infty}\left|F_{n,m}(x)\right|^2 \le \left\|\frac{\partial^4 f(x,y,z)}{\partial y^2\partial z^2}\right\|^2_{L_2[0<x<p,\,0<y<q,\,0<z<r]},$$

$$\sum_{n,m=1}^{+\infty}\left|F'_{n,m}(x)\right|^2 \le \left\|\frac{\partial^5 f(x,y,z)}{\partial x\partial y^2\partial z^2}\right\|^2_{L_2[0<x<p,\,0<y<q,\,0<z<r]},\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},\ \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Следовательно, ряд, соответствующий функции $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ сходится абсолютно и равномерно. Абсолютная и равномерная сходимость третьей производной по *x* ряда (21) следует из $\left|\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right| \le \left|\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right| + \left|\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right|$ и доказанного выше.

Теорема 2 доказана.

Литература

1. Юлдашев Т.К. Обратная задача для одного интегро - дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных третьего порядка. // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, - Самара, 2014, № 1(34), С. 56-65.
2. Рыжов О.С. Асимптотическая картина обтекания тел вращения со звуковым потоком вязкого и теплопроводящего газа // Прикл. матем. и механ., - Москва, 1965, Том 29, № 6, С. 1004-1014.
3. Диесперов В.Н. О функции Грина линеаризованного вязкого трансзвукового уравнения. // Журнал вычисл. мат. и мат. физики, - Москва, 1972, Том 12, № 5, С. 1265-1279.
4. Block H. Sur les equations lineaires aux derives parielles a carateristiques multiples // Ark. Mat. Astron. Fus. Note 1, - 1912, 7(13), - pp. 1-34; Note 2, 1912, ibid. 7(21),- pp. 1-30; Note 3, 1912 - 1913, ibid. 8(23). - pp. 1-51.
5. Del Vecchio E. Sulleequazioni $z_{xxx} - z_y + \varphi_1(x, y) = 0$, $z_{xxx} - z_{yy} + \varphi_2(x, y) = 0$ // Memorie R. Accad. Sci. Ser.2. - Torino, 1915, 66. - pp. 1-41.
6. Cattabriga L. Potenziali di linea e di dominio per equazioni non paraboliche in due variabilia caratteristiche multiple // Rendiconti del seminario matimatico della univ. di Padava. - 1961, 31. - pp. 1-45.
7. Джураев Т.Д, Апаков Ю.П. Об автомодельном решении одного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками. // Вестник Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, - Самара, 2007, № 2(15), С. 18-26.
8. Джураев Т.Д., Апаков Ю.П. К теории уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, содержащего вторую производную по времени. // Украинский математический журнал. – Киев, 2010, Том 62, № 1. С. 40-51.
9. Апаков Ю.П., Жураев А.Х. О решении краевой задачи для уравнения третьего порядка с помощью функции Грина // Узбекский математический журнал. 2011. №3. - С. 36-42.
10. Apakov, Y.P., Umarov, R.A. Construction of the Solution of a Boundary- Value Problem for the Third-Order Equation with Lower Terms with the Help of the Green Function // Journal of Mathematical Sciences. 2023. Vol. 274, No. 6. - pp. 807-821.
11. Apakov Yu. P., Hamitov A. A. Third Boundary Value Problem for an Equation with the Third Order Multiple Characteristics in Three Dimensional Space // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. 44, №2, -pp. 523-532.
12. Apakov Yu. P., Hamitov A. A. On solution of the boundary value problems posed for an equation with the third-order multiple characteristics in semi-bounded domains in three dimensional space // Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana, 2023. 29, 58, -pp. 2-14.
13. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: «Наука», 1966. - 724 с.
14. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. – М.: Мир, 1985, 590 стр.
15. Сабитов К.Б. Начально-граничные задачи для уравнения колебаний прямоугольной пластины // Изв. вузов. Матем., 2021, №10. -С.60-70.