УДК 517.75
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_2(5)_2

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА, СОДЕРЖАЩЕЕ ТРЕТЬЮ ПРОИЗВОДНУЮ ПО ВРЕМЕНИ В ПОЛУОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

Апаков Юсупжон Пулатович, д.ф.-м.н., профессор
yusupjonapakov@gmail.com
Институт математики имени В.И. Романовского АН РУз.
Меликузиева Дилшода Мухторжоновна
meliquziyevadilshoda@gmail.com
Наманганский инженерно-строительный институт
Наманган, Узбекистан

Аннотация. *В работе для уравнения четвёртого порядка с кратными характеристиками рассмотрены краевые задачи в полуограниченных областях. Единственность решения доказана методом интегралов энергии. Существования решений доказаны методом разделения переменных. Решения построен явно в виде бесконечного ряда, обоснована возможность почленного дифференцирования ряда по всем переменным.*

Ключевые слова: *Дифференциальное уравнение с частными производными, уравнение четвёртого порядка, кратные характеристики, краевая задача, единственность, существование, ряд, полуограниченная область, абсолютная и равномерная сходимость.*

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR A FOURTH ORDER EQUATION CONTAINING A THIRD TIME DERIVATIVE IN SEMI-BOUNDED DOMAINS

Apakov Yupjon Pulatovich, Dr Sc, professor
yusupjonapakov@gmail.com
V.I.Romanovskii Institute of Matematics of the Academy of Sciences of the Uzbekistan
Namangan, Uzbekistan
Melikuzieva Dilshoda Muxtorjon qizi
meliquziyevadilshoda@gmail.com
Namangan Engineering-Construction Institute
Namangan, Uzbekistan

Abstract. *In this work, boundary value problems in semi-bounded domains are considered for a fourth-order equation with multiple characteristics. The uniqueness of the solution is proven by the method of energy integrals. The existence of solutions is proved by the method of separation of variables. The solutions are constructed explicitly in the form of an infinite series, and the possibility of term-by-term differentiation of the series with respect to all variables is justified.*

Key words: *Partial differential equation, fourth order equation, multiple characteristics, boundary value problem, uniqueness, existence, series, semi-bounded domain, absolute and uniform convergence.*

1. Введение

Изучение многих задач газовой динамики, теории упругости, теории пластин и оболочек приводится к рассмотрению дифференциальных уравнений в частных производных высоких порядков. С точки зрения физических приложений представляют большой интерес и дифференциальные уравнения четвертого порядка (см. [1-4]).

Монография Джураева Т.Д., Сопуева А. [5], посвящена классификации дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка для таких уравнений.

В работе [6] рассмотренны краевые задачи для неоднородного уравнения четвертого порядка с кратными характеристиками с одним младшим членом.

В работе [7] рассмотрена краевая задача для уравнения четвертого порядка вида

$$u_{xxxx} - u_{tt} = f(x,t).$$

В работе [8] была решена задача с начальными и граничными условиями для уравнения колебания балки вида

$$a^2 u_{xxxx} + u_{tt} = 0,$$

в которой балка длины l, зажата на концах, в массивные тиски.

В работе [9] рассмотрена краевая задача для одного вырождающегося уравнения высокого порядка с младшими членами.

В работах [10-14] рассмотрены краевые задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, содержащее вторую производную по времени.

В работах [15-18] рассмотрены краевые задачи для уравнения с кратными характеристиками в полуограниченных областях.

Краевые задачи для уравнений четвертого порядка, содержащее третью производную по времени мало изучены [19-22].

2. Постановка задачи

В областях $D^+ = \{(x,y): \quad 0 < x < p, \quad 0 < y < +\infty\}$ и $D^- = \{(x,y): \quad 0 < x < p, \quad -\infty < y < 0\}$ рассмотрим уравнение

$$L[u] \equiv \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 0 \qquad (1)$$

где $p > 0$ - действительное число, и для него исследуем следующие задачи.

Задача A_1. Найти решение уравнения (1) в области D^+ из класса $u(x,y) \in C^{4,3}_{x,y}(D^+) \cap C^{3,2}_{x,y}(D^+ \cup \Gamma_1)$, имеющее ограниченную третью производную по x и вторую производную по y при $y \to +\infty$, равномерно по x и $u_{xx} \in L_2(D^+)$, удовлетворяющее следующим краевым условиям:

$$u(0,y) = u(p,y) = u_{xx}(0,y) = u_{xx}(p,y) = 0, \quad 0 \le y < +\infty, \qquad (2)$$

$$u(x,0) = \psi_1(x), \quad u_y(x,0) = \psi_2(x), \quad \lim_{y \to +\infty} u(x,y) = 0, \quad 0 \le x \le p, \qquad (3)$$

где $\Gamma_1 = \partial D^+$-граница области D^+, $\psi_1(x) \in C^5[0,p], \quad \psi_2(x) \in C^4[0,p]$- заданные функции, причем

$$\psi_1^{(k)}(0)=\psi_1^{(k)}(p)=0, \quad k=0,2,4.$$
$$\psi_2^{(j)}(0)=\psi_2^{(j)}(p)=0, \quad j=0,2. \tag{4}$$

Задача A_2**.** Найти решение уравнения (1) в области D^- из класса $u(x,y)\in C_{x,y}^{4,3}(D^-)\cap C_{x,y}^{3,2}(D^-\cup\Gamma_2)$, имеющее ограниченную производную третьего порядка по x и вторую производную по y при $y\to-\infty$, равномерно по x и $u_{xx}\in L_2(D^-)$, удовлетворяющее краевому условию (2) при $-\infty<y\le 0$ и

$$u(x,0)=\psi_3(x), \quad \lim_{y\to-\infty}u(x,y)=\lim_{y\to-\infty}u_y(x,y)=0, \quad 0\le x\le p, \tag{5}$$

где $\Gamma_2=\partial D^-$ - граница области D^-, $\psi_3(x)\in C^5[0,p]$- заданная функция, причем

$$\psi_3^{(r)}(0)=\psi_3^{(r)}(p)=0, \qquad r=0,2,4. \tag{6}$$

3. Единственность решения

Теорема 1. Если задачи A_1 и A_2 имеют решение, то оно единственно.

Доказательство. Предположим обратное, пусть задача A имеет два решения $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$. Тогда функция $u(x,y)=u_1(x,y)-u_2(x,y)$ удовлетворяет уравнению (1) с однародными краевыми условиями. Докажем, что $u(x,y)\equiv 0$ в D^+ (D^-).

Для этого уравнение (1) умножим на u, тогда получим

$$uL[u]\equiv\frac{\partial}{\partial x}(uu_{xxx}-u_xu_{xx})-\frac{\partial}{\partial y}\left(uu_{yy}-\frac{1}{2}u_y^2\right)+u_{xx}^2=0. \tag{7}$$

Интегрируя тождество (7) по области $D_d=\{(x,y):0<x<p, \quad 0<y<d\}$, где $d>0$ имеем

$$\begin{gathered}\int_0^d\left[u(p,y)u_{xxx}(p,y)-u(0,y)u_{xxx}(0,y)\right]dy-\\-\int_0^d\left[u_x(p,y)u_{xx}(p,y)-u_x(0,y)u_{xx}(0,y)\right]dy-\\-\int_0^p\left[u(x,d)u_{yy}(x,d)-u(x,0)u_{yy}(x,0)\right]dx+\\+\frac{1}{2}\int_0^p\left[u_y^2(x,d)-u_y^2(x,0)\right]dx+\iint_{D_d}u_{xx}^2dxdy=0.\end{gathered} \tag{8}$$

Если $d \to +\infty$, то $D_d \to D^+$. Учитывая однородные краевые условия задачи A_1, т.е. $\psi_i(x)=0, \quad i=1,2,$ и свойства функции $u(x,y)$ при $y \to +\infty$, а также, что $u_{xx} \in L_2(D^+)$, из (8) получаем

$$\frac{1}{2}\lim_{d\to+\infty}\int_0^p u_y^2(x,d)\,dx + \iint_{D^+} u_{xx}^2 dxdy = 0.$$

Из второго слагаемого имеем

$$u_{xx}=0 \quad \Rightarrow \quad u(x,y)=x\cdot f_1(y)+f_2(y), \quad (x,y)\in D^+ \cup \Gamma_1.$$

где $f_1(y), \quad f_2(y)$ – произвольные функции, удовлетворяюшие всем условиям задачи.

Полагая $x=0$, имеем

$$u(0,y)=f_2(y)=0 \quad \Rightarrow \quad f_2(y)=0,$$

полагая $x=p$, имеем

$$u(p,y)=p\cdot f_1(y)=0 \quad \Rightarrow \quad f_1(y)=0.$$

Следовательно, $u(x,y)\equiv 0,$ в $D^+ \cup \Gamma_1$.

Интегрируя тождество (7) по области $D_c=\{(x,y): 0<x<p, \quad -c<y<0\}, c>0$ учитывая однородные краевые условия задачи A_2 и свойства функции $u(x,y)$ при $y\to-\infty$, а также что $u_{xx}\in L_2(D^-)$, получим

$$\frac{1}{2}\int_0^p u_y^2(x,0)\,dx + \iint_{D^-} u_{xx}^2 dxdy = 0.$$

Отсюда следует, что $u(x,y)\equiv 0$ в $D^- \cup \Gamma_2$.

4. Существование решения

С целью доказательства существования решения, рассмотрим следующую вспомагательную задачу: найти нетривиальное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2) и представимое в виде

$$u(x,y)=X(x)\cdot Y(y) \tag{9}$$

Подставляя (9) в уравнение (1) и разделяя переменные, относительно функции $X(x)$ и $Y(y)$ получим обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$X^{(4)}(x)-\lambda\cdot X(x)=0, \tag{10}$$

$$Y^{(3)}(y)-\lambda\cdot Y(y)=0, \tag{11}$$

где λ параметр разделения.

Учитывая граничные условия (2) для уравнения (10) имеем следующую задачу:

$$X(0)=X(p)=X''(0)=X''(p)=0 \qquad (12)$$

а) Пусть $\lambda = d^4, \quad d>0$. Тогда общее решение уравнения (10) определим в следующеем виде:

$$X(x)=C_1e^{dx}+C_2e^{-dx}+C_3\cos dx+C_4\sin dx, \qquad (13)$$

где $C_i -$ произвольные постоянные. Удовлетворяя функция (13) первыми двумя условиями из (12),

$$\begin{cases} X(0)=C_1+C_2+C_3=0, \\ X''(0)=C_1+C_2-C_3=0, \\ X(p)=C_1e^{dp}+C_2e^{-dp}+C_3\cos dp+C_4\sin dp=0, \\ X''(p)=C_1e^{dp}+C_2e^{-dp}-C_3\cos dp-C_4\sin dp=0, \end{cases}$$

находим $C_1=C_2, \quad C_3=0$. Имеем следующую нетривиальное решение задачи (12) существует только при

$$d_n=\frac{\pi n}{p}, \ \ n=1,2,3,...$$

$$\lambda_n=d_n^4=\left(\frac{\pi n}{p}\right)^4, \ \ n=1,2,3,...$$

Эти числа являются собственными значениями задачи (12), а соответсвующие ими собственные функции имеют следующий вид:

$$X_n(x)=\sqrt{\frac{2}{p}}\sin\frac{\pi n}{p}x. \qquad (14)$$

б) Пусть $\lambda=0$. Тогда общее решение уравнения (10) определим в следующеем виде:

$$X(x)=C_1x^3+C_2x^2+C_3x+C_4, \qquad (15)$$

где $C_i -$ произвольные постоянные. Удовлетворяя функция (15) первыми двумя условиями из (12),

$$\begin{cases} X(0)=C_4=0, \\ X''(0)=C_2=0, \\ X(p)=C_1p^3+C_2p^2+C_3p+C_4=0, \\ X''(p)=6C_1p+2C_2=0, \end{cases}$$

находим $C_1=C_2=C_3=C_4=0$. (15) имеет только нулевое решение.

в) Пусть $\lambda=-d^4, \quad d>0$.

$$X(x)+d^4X(x)=0,$$
$$k^4+d^4=0,$$
$$\left(k^2+d^2\right)^2-2k^2d^2=\left(k^2-\sqrt{2}kd+d^2\right)\left(k^2+\sqrt{2}kd+d^2\right)=0,$$
$$k_{1,2}=\frac{\sqrt{2}}{2}d\pm\frac{\sqrt{2}}{2}di,\quad k_{3,4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}d\pm\frac{\sqrt{2}}{2}di.$$

Тогда общее решение уравнения (10) определим в следующеем виде:

$$\begin{gathered}X(x)=e^{\frac{\sqrt{2}}{2}dx}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{2}}{2}dx+C_2\sin\frac{\sqrt{2}}{2}dx\right)+\\ +e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}dx}\left(C_3\cos\frac{\sqrt{2}}{2}dx+C_4\sin\frac{\sqrt{2}}{2}dx\right),\end{gathered}\tag{16}$$

где $C_i -$ произвольные постоянные. Учитывая граничные условия (2) для уравнения (16), из система

$$\begin{cases}X(0)=C_1+C_3=0\Rightarrow C_1=C_3,\\ X''(0)=C_2-C_4=0\Rightarrow C_2=C_4,\\ X(p)=C_1sh\sqrt{2}dp\cdot\cos\frac{\sqrt{2}}{2}dp+C_2ch\sqrt{2}dp\cdot\sin\frac{\sqrt{2}}{2}dp=0,\\ X''(p)=-C_1ch\sqrt{2}dp\cdot\sin\frac{\sqrt{2}}{2}dp+C_2sh\sqrt{2}dp\cdot\cos\frac{\sqrt{2}}{2}dp=0,\end{cases}$$

находим $C_1=C_2=C_3=C_4=0$. (16) имеет только нулевое решение.

Рассмотрим задачу A_1.

Учитывая граничные условия (3) для уравнения (11) имеем следующую задачу:

$$\begin{cases}Y^{(3)}(y)-\lambda Y(y)=0,\\ Y(0)=\psi_{1n},\\ Y'(0)=\psi_{2n},\\ \lim\limits_{y\to+\infty}Y(y)=0.\end{cases}$$

где $\psi_{in}=\int\limits_0^p\psi_i(\xi)X_n(\xi)d\xi,\quad i=1,2.$

Общее решение уравнения (11) имеет вид

$$Y_n(y)=C_{1n}e^{k_ny}+e^{-\frac{1}{2}k_ny}\left(C_{2n}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_ny\right)+C_{3n}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_ny\right)\right),\tag{17}$$

где $k_n=\sqrt[3]{\lambda_n}$, а $C_i, i=\overline{1,3}$ пока неизвестные постоянные.

Удовлетворив условию (3) из (17) имеем

$$\begin{cases} C_{1n}=0, \\ C_{2n}=\psi_{1n}, \\ C_{3n}=\dfrac{2}{\sqrt{3}k_n}\psi_{2n}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\psi_{1n}, \end{cases}$$

C_{2n} и C_{3n} - коэффициенты Фурье функций $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$, т.е.

$$C_{2n}=\int_0^p \psi_1(\xi)X_n(\xi)d\xi, \qquad C_{3n}=\int_0^p \psi_2(\xi)X_n(\xi)d\xi,$$

В дальнейшем максимальное значение всех найденных положительных известных чисел в оценках будем обозначать через M.

Интегрируем по частям $\psi_1(x)$ пять раза и $\psi_2(x)$ четыре раза принимая во внимание условие (4) получим следующие оценки:

$$|C_{2n}|\le M\frac{|\Psi_{1n}|}{n^5}, \quad |C_{3n}|\le M\frac{|\Psi_{2n}|}{n^4}, \tag{18}$$

где

$$\Psi_{1n}=\int_0^p \psi_1^{(5)}(\xi)\cos\frac{\pi n}{p}\xi d\xi,$$

$$\Psi_{2n}=\int_0^p \psi_2^{(4)}(\xi)\sin\frac{\pi n}{p}\xi d\xi.$$

Решение задача A_1 имеет вид

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)\left(e^{-\frac{1}{2}k_n y}\left(C_{2n}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_n y\right)+C_{3n}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_n y\right)\right)\right) \tag{19}$$

Докажем абсолютную и равномерную сходимость ряда (19). Учитывая (18) из (19) получим

$$|u(x,y)|\le M\sum_{n=1}^{\infty}|X_n(x)|\left(\frac{|\Psi_{1n}|}{n^5}+\frac{|\Psi_{2n}|}{n^{16/3}}\right)<\infty.$$

Отсюда следует, что ряд (19) сходится абсолютно и равномерно.

Теперь докажем, что производные ряда (19) входящие в уравнение (1), также сходятся абсолютно и равномерно в области $D^+\cup\varGamma_1$. Для этого вычисляем производные по y из (19), оценив полученные равенства и учитывая (18), имеем

$$\left|\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}k_n^3\left(|C_{2n}|+\frac{2}{\sqrt{3}k_n}|C_{3n}|\right)|X_n(x)|\le M\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\Psi_{1n}|}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\Psi_{2n}|}{n^{4/3}}\right).$$

Используя неравенство Коши-Буняковского и Бесселя, получим

$$\left|\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right| \le M\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left|\Psi_{1n}\right|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}} + M\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\Psi_{2n}\right|}{n^{4/3}} \le M\sqrt{\frac{2}{p}\left\|\Psi_{1n}\right\|^2}\sqrt{\frac{\pi^2}{6}} + M\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\Psi_{2n}\right|}{n^{4/3}} \le$$

$$\le M\frac{\pi}{\sqrt{3p}}\left\|\Psi_{1n}\right\| + M\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\Psi_{2n}\right|}{n^{4/3}} < \infty,$$

так как

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\Psi_{1n}\right|^2 = \frac{2}{p}\left\|\Psi_{1n}\right\|^2_{L_2(0,p)}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Следовательно, ряд, соответствующий функции $\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}$, сходится абсолютно и равномерно. Абсолютная и равномерная сходимость четвертой производной по x ряда (19) следует из равенства $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}$ и доказанного выше.

Рассмотрим задачу A_2.

Учитывая граничные условия (5) для уравнения (17) имеем следующую задачу:

$$\begin{cases} Y^{(3)}(y) - \lambda^4 Y(y) = 0, \\ Y(0) = \psi_{3n}, \\ \lim\limits_{y\to-\infty} Y(y) = \lim\limits_{y\to-\infty} Y'(y) = 0, \end{cases}$$

где $\psi_{3n} = \int_0^p \psi_3(\xi) X_n(\xi) d\xi.$

Следовательно, в (17) необходимо считать, что $C_{2n} = C_{3n} = 0.$ Тогда функция (17) имеет вид

$$Y_n(y) = C_{1n}e^{k_n y}$$

C_{1n} - коэффициенть Фурье функций $\psi_3(x)$, т.е.

$$C_{1n} = \int_0^p \psi_3(\xi) X_n(\xi) d\xi,$$

Принимая во внимание условие (5), интегрируем по частям $\psi_3(x)$ пять раз получим следующие оценки:

$$\left|C_{1n}\right| \le M\frac{\left|\Psi_{3n}\right|}{n^5}, \tag{20}$$

где

$$\Psi_{3n}=\int_0^p \psi_3^{(5)}(\xi)\cos\frac{\pi n}{p}\xi d\xi.$$

Теперь в силу (13), решение задачи A_2 имеет вид

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} C_{1n}e^{k_n y}X_n(x). \qquad (21)$$

Докажем абсолютную и равномерную сходимость ряда (21). Учитывая (20), из (21) получим

$$|u(x,y)|\le M\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\Psi_{3n}|}{n^5}<\infty.$$

Отсюда следует, что ряд (21) сходится абсолютно и равномерно.

Тепер докажем, что производные ряда (21) входящие в уравнение (1), также сходятся абсолютно и равномерно в области $D^- \cup \Gamma_2$. Для этого вычисляем производные по y, оценив полученны равенства и учитывая (21), имеем

$$\left|\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right|\le \sum_{n=1}^{\infty} k_n^3\left(|C_{1n}|\right)|X_n(x)|\le M\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\Psi_{3n}|}{n}\right).$$

Используя неравенство Коши-Буняковского и Бесселя, получим

$$\left|\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right|\le M\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|\Psi_{3n}|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}+M\le M\frac{\pi}{\sqrt{3p}}\|\Psi_{3n}\|<\infty,$$

так как

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\Psi_{3n}|^2=\frac{2}{p}\|\Psi_{3n}\|^2_{L_2(0,p)}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Следовательно, ряд, соответствующий функции $\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}$, сходится абсолютно и равномерно. Абсолютная и равномерная сходимость четвертой производной по x ряда (22) следует из равенства $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}$ и доказанного выше.

Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема 2. Если функции $\psi_i(x)\in C^5[0,p],\ i=1,3,\quad \psi_2(x)\in C^4[0,p],$ и выполняются условия (4) и (6), то решения задач A_1 и A_2 существуют, и представляются в виде (19) и (21) соответсвенно.

Литература

1. Турбин М.В. Исследование начально краевой задачи для модели движения жидкости Герше - Балки . Вест. Воронеж. Гос. Ун-та. Сер.Физ. Мат. -2013. № 2. - С. 246-257.
2. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны.-М.: Мир,1977.-622 с.

3. Шабров С.А. Об оценках функций влияния одной математической модели четвёртого порядка. Вест. Воронеж. Гос. Ун-та. Сер. Физ. Мат. -2015.20(2) - С. 168-179.
4. Benney D.J.,Luke ,J.C Interactions of permanent waves of finite amplitude . J. -Math. Phys. -1964. 43, -P.309-313. doi.org/10.1002/sapm1964431309
5. Джураев Т.Д., Сопуев А. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвёртого порядка. Ташкент. «Фан». 2000.-144 с.
6. Аманов Д, Мурзамбетова М.Б. Краевая задача для уравнения четвёртого порядка с младшим членом. Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки, -2013, выпуск 1.-С. 3–10. **DOI:** 10.20537/vm130101.
7. Аманов Д. , Бекиев А.Б., Отарова Ж.А . Краевая задача для уравнения четвёртого порядка. Узб.мат.журнал. -2015, -№4. -С.11-18.
8. Сабитов К. Б. Колебания балки с заделанными концами. Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. Науки.- 2015, том 19, № 2.-С. 311–324. https://doi.org/10.14498/vsgtu1406
9. Иргашев Б.Ю. Краевая задача для одного вырождающегося уравнения высокого порядка с младшими членами . Бюллетень Института математики. -2019, -№6. -С.23-29.
10. Dzhuraev T.D., Apakov Yu.P. On the theory of the third- order equation with multiple characteristics containing the second time derivative. Ukrainian Mathematical Journal .-2010.-62, -pp.43–55. https://doi.org/10.1007/s11253-010-0332-8
11. Apakov Yu.P.,Rutkauskas S. On a boundary problem to third order PDE with multiple characteristics. Nonlinear Analysis: Modeling and Control.Vilnius,2011. –Vol.16.-No3. -pp. 255–269. DOI:10.15388/NA.16.3.14092
12. Apakov Yu. P. On the solution of a boundary-value problem for a third-order equation with multiple characteristics. Ukrainian Mathematical Journal.-2012.- 64 (1), -pp.1–11. https://doi.org/10.1007/s11253-012-0625-1
13. Apakov Yu. P. On unique solvability of boundary-value problem for a viscous transonic equation. Lobachevskii Journal of Mathematics, -2020.-41, -pp.1754–1761. https://doi.org/10.1134/S1995080220090036
14. Apakov Yu.P. , Umarov R.A. Solution of the Boundary Value Problem for a Third Order Equation with Little Terms Construction of the Green's Function. Lobachevskii Journal of Mathematics, -2022.-43,-pp.738–748. DOI: 10.1134/S199508022206004X.
15. Апаков Ю.П. К решению краевых задач для уравнения в неограниченных областях . Доклады Академии Наук Республики Узбекистан. –Ташкент, 2006. –№3. –С. 17-20.
16. Апаков Ю.П. Решение краевых задач для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в неограниченных областях . Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. –Нальчик, 2008. -№2(22). –С. 147-151.
17. Апаков Ю.П., Жураев А.Х. Краевые задачи для уравнения пятого порядка с кратными характеристиками в бесконечной области .Узбекиский математический журнал. 2009, №4,- С. 21-28.
18. Apakov Y.P., Hamitov A.A. On solution of the boundary value problems posed for an equation with the third-order multiple characteristics in semi-bounded domains in three dimensional space. Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana, 2023, Vol.29,58. pp.2-14. https://doi.org/10.1007/s40590-023-00523-1
19. Аманов Д.,Скоробогатова Э.Р. Краевые задачи для уравнения четвёртого порядка. Вестник КазНУ сер.мат.,мех., инф. -2009 г .-№ 4(63).-С.16-20.
20. Апаков Ю.П., Меликузиева Д.М. Краевая задача для уравнения четвёртого порядка с кратными характеристиками. Вестник. НамГУ, - 2022, -№5.-С.82-91.
21. Apakov Yu.P., Melikuzieva D.M. On a problem for a fourth-order with multiple characteristics containing the third time derivate. Lobachevskii Journal of Mathematics, 2023 Vol. 44, No. 8, pp.3218-3224. DOI:10.1134/S1995080223080061
22. Apakov Yu.P., Melikuzieva D.M. On a boundary problem for the fourth order equation with the third derivative with respect to time. Bulletin of the Karaganda University.Mathematics Series, No.4(112),2023,pp.30-40. DOI:10.31489/2023M4/30-40