УДК 517.928

DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_2(5)_1

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОПАРНО КОМПЛЕКСНО-СОПРЯЖЕННЫМИ ТОЧКАМИ ПОВОРОТА

Алыбаев Курманбек Сарманович, д.ф.-м.н., профессор
alybaevkurmanbek@rambler.ru
Нурматова Майрамгул Нарбековна, старший преподаватель
nurmatova_mairamgul@mail.ru
Жалал-Абадский государственный университет имени Б.Осмонова
Жалал-Абад, Кыргызстан

Аннотация. *В данной работе рассматривается автономная система сингулярно возмущенных уравнений быстрых переменных, состоящая из* 2n *уравнений первого порядка и одного уравнения медленной переменной. Матрица первого приближения быстрых переменных имеет попарно комплексно-сопряженные собственные значения. Собственные значения имеют нулей и они являются точками поворота. Система имеет положение равновесие, причем устойчивость положения равновесия теряется всеми собственными значениями при некотором значении медленной переменной. Доказано, что решение сингулярно возмущенного уравнения в течении конечного времени остается вблизи возникшего неустойчивого положения равновесия.*

Ключевые слова: *сингулярно возмущенные уравнения, положение равновесия, устойчивость, аналитические, гармонические функции, линии уровня, ограниченность, сходимость, задержка решения.*

ТҮГӨЙЛӨШ КОМПЛЕКСТИК-ТҮЙҮНДӨШ БУРУЛУУ ЧЕКИТТЕРИ МЕНЕН СИНГУЛЯРДЫК КОЗГОЛГОН ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН ЧЕЧИМДЕРИНИН АСИМПТОТИКАСЫ

Алыбаев Курманбек Сарманович, ф.-м.и.д., профессор
alybaevkurmanbek@rambler.ru
Нурматова Майрамгул Нарбековна, улук окутуучу
nurmatova_mairamgul@mail.ru
Б.Осмонов атындагы Жалал-Абад мамлекеттик университети
Жалал-Абад, Кыргызстан

Аннотация. *Бул эмгекте биринчи даражадагы тез өзгөрмөлүү 2n теңдемеден жана жай өзгөрмөлүү бир теңдемеден турган автономдук теңдемелердин системасы каралат. Тез өзгөрмөлөрдүн биринчи жакындоо матрицасы түгөйлөш комплекстик-түйүндөш өздүк маанилерге ээ, алар бурулуу чекиттери болуп саналышат. Система тең салмактуу абалга ээ жана ал жай өзгөрмөнүн кандайдыр бир маанисинде бардык өздүк маанилерде туруктуулугун жоготот. Сингулярдык козголгон теңдеменин чечими пайда болгон туруксуз тең салмактуулук абалга чектүү убакыт аралыгында жакын кармала тургандыгы далилденди.*

Ключевые слова: *сингулярдык козголгон теңдеме, тең салмактуулук абал, туруктуулук, аналитикалык, гармоникалык функциялар, деңгээл сызыктар, чектелгендик, жыйналуучулук, чечимдин кармалышы.*

ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF SOLUTIONS TO SINGULARLY PERTURBED EQUATIONS WITH PAIRWISE COMPLEX CONJUGATE TURNING POINTS

Alybaev Kurmanbek Sarmanovich, Doctor of Ph. and Math. Sc., professor
alybaevkurmanbek@rambler.ru
Nurmatova Mairamgul Narbekovna, Senior Lecturer
nurmatova_mairamgul@mail.ru
Jalal-Abad state university named after B.Osmonov
Jalal-Abad, Kyrgyzstan

Annotation. *This paper considers an autonomous system of singularly perturbed equations of fast variables, consisting of 2n first-order equations and one equation of a slow variable. The matrix of the first approximation of fast variables has pairwise complex conjugate eigenvalues. The eigenvalues have zeros and they are turning points. The system has an equilibrium position, and the stability of the equilibrium position is lost by all eigenvalues at a certain value of the slow variable. It has been proven that the solution of a singularly perturbed equation remains close to the resulting unstable equilibrium position for a finite time.*

Key words: *singularly perturbed equations, equilibrium position, stability, analytical, harmonic functions, level lines, boundedness, convergence, solution delay.*

Введение

Пусть рассматривается система уравнений

$$\varepsilon x'(t,\varepsilon) = A(y)\tilde{x}(t,\varepsilon) + \mathrm{V}\big(\tilde{x}(t,\varepsilon)\big)\tilde{x}(t,\varepsilon), \qquad (1)$$

$$y' = 1, \qquad (2)$$

с начальным условием

$$x(t_0,\varepsilon) = x^0, y(t_0) = t_0 \qquad (3)$$

где $0 < \varepsilon$ – малый вещественный параметр; $t \in \Omega \subset C$ – множество комплексных чисел, $\Omega = \{t \in C,\ |t| < r_0,\ r_0 \epsilon R - \text{множество вещественных чисел и } r_0 \gg |t_0|\}$

$$x = colon(x_1, \dots, x_n), \tilde{x} = colon(x_1 - y,\ x_2\ ,\ x_3 - y\ , x_4\ , \dots, x_{2n-1} - y\ , x_{2n}),$$

$$A(y) = \begin{pmatrix} A_1(y) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2(y) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_n(y) \end{pmatrix},$$

$$A_j(y) = \begin{pmatrix} y & -\alpha_j \\ \alpha_j & y \end{pmatrix},\ (j = 1, \dots, n)\ , 0 < \alpha_1 < \ \dots\ < \alpha_n;$$

$$V\big(\tilde{x}(t,\varepsilon)\big) = ((x_1 - y)^2 +\ x_2^2 + (x_3 - y)^2 + x_4^2 + \dots + (x_{2n-1} - y)^2 + x_{2n}^2).$$

Матрица $A(y)$ имеет $2n$, попарно комплексно-сопряженных, собственных значений вида

$$\lambda_{2j-1}(y) = y + i\alpha_j,\ \lambda_{2j}(y) = y - i\alpha_j,\ j = 1, \dots, n, i = \sqrt{-1}.$$

Система (1), в пространстве быстрых движений, в точке $(y, 0, y, 0, \dots, y, 0)$ имеет положение равновесие. Это положение равновесие устойчиво при $y < 0$ и неустойчива при $y > 0$, т.е. при переходе значения $y = 0$ устойчивость положения равновесия теряется.

<u>Определение</u>. Если устойчивость положения равновесия теряется при некотором значении y, но решение уравнения (1) не сразу покидает возникшее неустойчивое положение равновесия, а в течении конечного времени остаётся вблизи него, то будем говорить, что происходит задержка решения вблизи неустойчивого положения равновесия (ЗР).

Впервые влияние ЗР было обнаружено в работе [1] под руководством Л.С.Понтрягина.

ЗР исследованы в [2], [3], [4], для случая, когда устойчивость положения равновесия теряется только одной парой, комплексно-сопряженных, собственных значений.

В рассматриваемом случае устойчивость положения равновесия теряется всеми собственными значениями, при значении $y = 0$.

Задача. Исследовать решения уравнений (1)-(2), при заданных начальных значений (3), на ЗР.

Для решения поставленной задачи воспользуемся методами изложенного в [5], [6], [7], [8].

Основная часть

Эта часть будет посвящена решению поставленной задачи, которая подразделяется на несколько частей.

1. Преобразование уравнения (1).

Решение уравнения (2) возьмем в виде $y = t$.

В (1) произведем замены (далее для удобства аргументы неизвестной функции будем опускать)

$$x_{2j-1} - t = u_{2j-1}\,, x_{2j} = u_{2j}\,, j = 1, \dots, n\,.$$

Имеем (используем координатную запись векторов)

$$\varepsilon u'_{2j-1} = t\,u_{2j-1} - \alpha_j\,u_{2j} + V(u_1, \dots, u_{2n})\,u_{2j-1} - \varepsilon,$$
$$\varepsilon u'_{2j} = \alpha_j\,u_{2j-1} + t\,u_{2j} + V(u_1, \dots, u_{2n})\,u_{2j}, j = 1, \dots, n.$$

Отсюда получим систему

$$\varepsilon z'_{2j-1} = \left(t + \alpha_j i\right) z_{2j-1} + V_0(z_1,\ z_2, \dots, z_{2n})\,z_{2j-1} - \varepsilon\,, \qquad (4)$$
$$\varepsilon z'_{2j} = \left(t - \alpha_j i\right) z_{2j} + V_0(z_1, z_2, \dots, z_{2n})\,z_{2j} - \varepsilon,$$

с начальным условием

$$z_{2j-1}(t_0, \varepsilon) = z^0_{2j-1}\,, z_{2j}(t_0, \varepsilon) = z^0_{2j}, j = 1, \dots, n\,, \qquad (5)$$

где $\mathrm{V}_0(z_1, z_2, \dots, z_{2n}) = z_1 \cdot z_2 + \ \dots + z_{2n-1} \cdot z_{2n}$.

Теорема. $x(t,\varepsilon)$ – решение задачи (1), (3) существует на отрезке $[t_0, \alpha_1]$ $\left(t_0 = -\sqrt{\alpha_1(2\alpha_n + \alpha_1)}\right)$ и справедливо соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to 0} x(t, \varepsilon) = (y, 0, y, 0, \dots, y, 0)$$

т.е. происходит задержка решения, при смене устойчивости положения равновесия, вблизи возникшего неустойчивого положения равновесия.

Доказательство. Задачу (4)-(5), заменим следующим

$$z_{2j-1} = z^0_{2j-1} exp\frac{1}{2\varepsilon}\Big(F_{1j}(t) - F_{1j}(t_0)\Big) +$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\left[V_0(z_1, z_2, \dots, z_{2n})z_{2j-1} - \varepsilon\right] \times exp\frac{1}{2\varepsilon}\Big(F_{1j}(t) - F_{1j}(\tau)\Big)\,d\tau, \qquad (6)$$
$$z_{2j} = z^0_{2j} exp\frac{1}{2\varepsilon}\Big(F_{2j}(t) - F_{2j}(t_0)\Big) +$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\left[V_0(z_1, z_2, \dots, z_{2n})z_{2j} - \varepsilon\right] \times exp\frac{1}{2\varepsilon}\Big(F_{2j}(t) - F_{2j}(\tau)\Big)\,d\tau,$$

где $F_{1j}(t) = \left(t + i\alpha_j\right)^2, F_{2j}(t) = \left(t - i\,\alpha_j\right)^2, j = 1, \dots, n.$

Далее будем считать

$$\left|z^0_k\right| \le M\varepsilon\,,\ k = 1, \dots, 2n. \qquad (7)$$

$M_1, M_2, \dots$ – означают положительных постоянных, не зависящих от ε.

К (6) применим метод последовательных приближений, которые определим следующим образом:

$$z_{2j-1\,m} = z_{2j-1}^{0} exp\frac{1}{2\varepsilon}\Big(F_{1j}(t) - F_{1j}(t_0)\Big) +$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\left[V_0(z_{1\,m-1}\,,\dots,z_{2n\,m-1})z_{2j-1\,m-1} - \varepsilon\right] \times exp\frac{1}{2\varepsilon}\Big(F_{1j}(t) - F_{1j}(\tau)\Big)\,d\tau, \qquad (8)$$
$$z_{2j\,m} = z_{2j}^{0} exp\frac{1}{2\varepsilon}\Big(F_{2j}(t) - F_{2j}(t_0)\Big) +$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\left[V_0(z_{1\,m-1}\,,\dots,z_{2n\,m-1})z_{2j\,m-1} - \varepsilon\right] \times exp\frac{1}{2\varepsilon}\Big(F_{2j}(t) - F_{2j}(\tau)\Big)\,d\tau,$$
$$z_{2j-1\,0} \equiv 0, z_{2j\,0} \equiv 0, m = 1,2,\dots, t \in \mathcal{D}.$$

2. _Построение области и выбор путей интегрирования._

Используя линии уровня функций

$$ReF_{1j}(t) = t_1^2 - \left(t_2 + \alpha_j\right)^2,$$
$$ReF_{2j}(t) = t_1^2 - \left(t_2 - \alpha_j\right)^2, j = 1,\ \dots, n$$

построим область $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$, определим пути интегрирования для (8). Определим линии уровня

$$\left(p_{1j}\right) = \left\{t \in C, ReF_{1j}(t) = 0\right\},$$

Функции $F_{1j}(t)$ в точках $t = -i\alpha_j$ имеют двухкратные нули, следовательно линии $\left(p_{1j}\right)$ разветвляются в точках $t = -i\alpha_j$ (рис. 1).

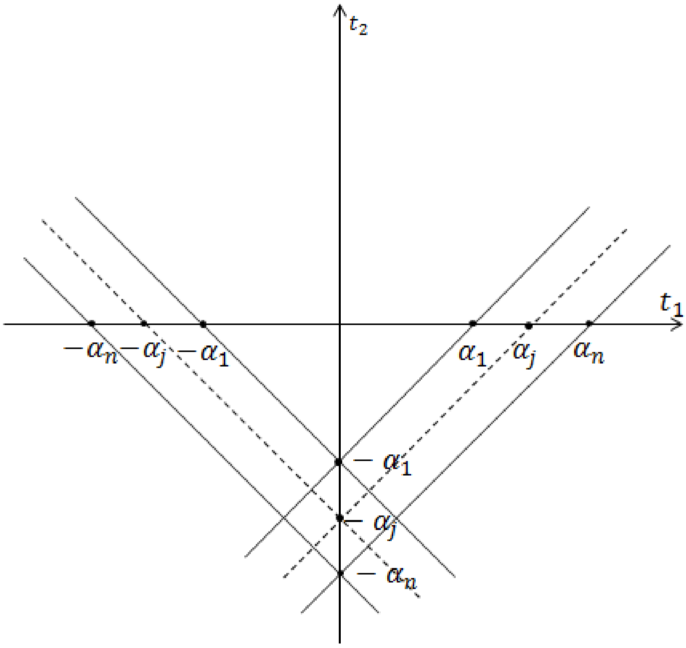

Рис. 1. Разветвляющиеся линии $\left(p_{1j}\right)$ $(j = 1,\dots, n)$.

Аналогично линии уровня

$$\left(p_{2j}\right) = \left\{t \in C, ReF_{2j}(t) = 0\right\}, j = 1,\dots, n$$

разветвляются в точке $t = i\alpha_j$ $(j = 1,\dots, n)$, причем ветви $\left(p_{1j}\right)$ и $\left(p_{2j}\right)$ (при фиксированном j) симметричны.

Здесь и далее симметрию, будем понимать, относительно действительной оси.

Введем в рассмотрение линию уровня

$$(p_{1n}) = \{t \in C, ReF_{1n}(t) = t_0^2 - \alpha_n^2\}.$$

Определим (p_{1n}), так, чтобы она соединяла точки $(t_0;\ 0)$, $(0;\ -\alpha_1)$.

Имеем

$$t_1^2 - (t_2 + \alpha_n)^2 = t_0^2 - \alpha_n^2.$$

Отсюда, пологая, $t_1 = 0, t_2 = -\alpha_1$, получим

$$-(\alpha_n - \alpha_1)^2 = t_0^2 - \alpha_n^2$$

или

$$t_0 = -\sqrt{\alpha_n^2 - (\alpha_n - \alpha_1)^2}.$$

Таким образом, (p_{1n}) имеет уравнение

$$t_1^2 - (t_2 + \alpha_n)^2 = -(\alpha_n - \alpha_1)^2.$$

Часть (p_{1n}) соединяющая точки $(t_0;\ 0)$, $(0;\ -\alpha_1)$ обозначим (K_n). Возьмём ветвь (p_{11}^1), линии уровня (p_{11}), проходящую через точки $(0;\ -\alpha_1)$, $(\alpha_1;\ 0)$ и часть (p_{11}^1), соединяющую эти точки, обозначим (K_1). Определим $(\bar{K}_n)$ и $(\bar{K}_1)$, симметричные к (K_n) и (K_1). Область ограниченный, (K_n), (K_1), $(\bar{K}_n)$, $(\bar{K}_1)$ обозначим $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$ (рис. 2).

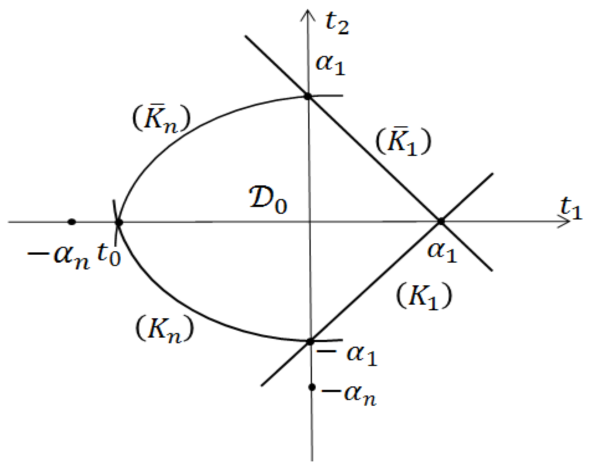

Рис. 2. Область $\mathcal{D}_0$.

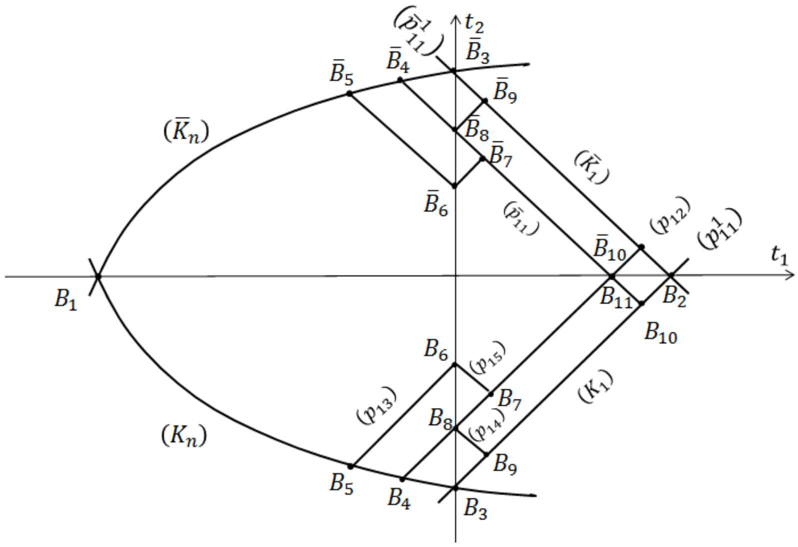

Рис. 3. Точки $B_j (j = 1, \dots, 11)$, $\bar{B}_j (j = 3, \dots, 10)$

Разделим $\mathcal{D}_0$. Для этого определим линии уровня

$$(p_{12}) = \{t \in \mathcal{D}_0,\ t_1 - t_2 - \alpha_1 = -\sqrt{\varepsilon}\},$$

$$(p_{13}) = \{t \in \mathcal{D}_0,\ t_1 - t_2 - \alpha_1 = -q, 0 \ll q \ll \alpha_1,\ (\alpha_1 - q) - \text{не зависит от } \varepsilon\},$$

$$(p_{14}) = \{t \in \mathcal{D}_0,\ t_1 + t_2 + \alpha_1 = \sqrt{\varepsilon}\},$$

$$(p_{15}) = \{t \in \mathcal{D}_0,\ t_1 + t_2 + \alpha_1 = q,\ 0 \ll q \ll \alpha_1\}.$$

Определим точки, $B_1(t_0; 0)$, $B_2(\alpha_1; 0)$, $B_3(0; -\alpha_1)$, $(K_n) \times (p_{12}) = B_4$, $(K_n) \times (p_{13}) = B_5$, $(p_{13}) \times (p_{15}) = B_6$, $(p_{15}) \times (p_{12}) = B_7$, $(p_{12}) \times (p_{14}) = B_8$, $(p_{14}) \times (p_{11}^1) = B_9$,$(p_{14}) \times (p_{11}^1) = B_{10}$, $B_{11}(\alpha_1 - \sqrt{\varepsilon}; 0)$ (рис. 3).

Точки $\bar{B}_j (j = 3, \dots, 10)$ определяются симметричными, к точкам $B_j (j = 3, \dots, 10)$.

Произведено деление области $\mathcal{D}_0$ на несколько частей, которые обозначим так

$(B_1 B_5 B_6 \bar{B}_6 \bar{B}_5) = \mathcal{D}_1$, $(B_6 B_7 B_{11} \bar{B}_7 \bar{B}_6) = \mathcal{D}_2$, $(B_4 B_5 B_6 B_7) = \mathcal{D}_3$, $(B_3 B_4 B_8 B_9) = \mathcal{D}_4$, $(B_8 B_9 B_{10} B_{11}) = \mathcal{D}_5$, $(B_2 B_{10} B_{11} \bar{B}_{10}) = \mathcal{D}_6$.

Части, симметричные к $\mathcal{D}_3$, $\mathcal{D}_4$, $\mathcal{D}_5$ обозначим $\overline{\mathcal{D}}_3$, $\overline{\mathcal{D}}_4$, $\overline{\mathcal{D}}_5$ (рис. 4).

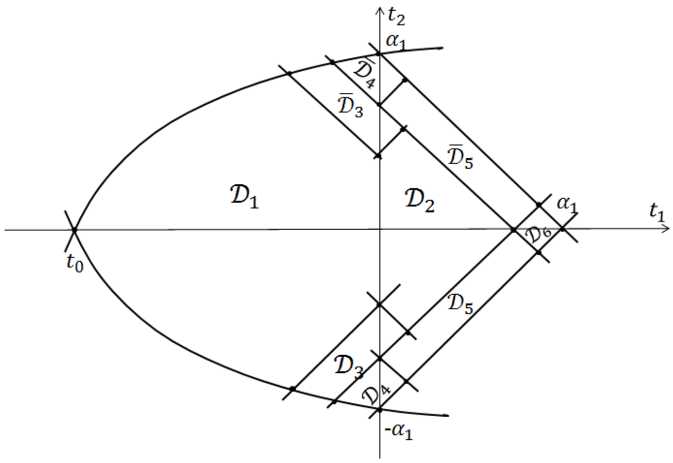

Рис. 4. Деление области $\mathcal{D}_0$.

Определим пути интегрирования для (8). Основное требование при выборе путей интегрирования заключается в следующем: По выбранным путям интегрирование функции $ReF_{kj}(t)$ $(j = 1, \dots, n; k = 1, 2)$ не должны возрастать (Т).

Далее запись (K) $[t_0, t]$ означает часть кривой (K), соединяющую точки t_0 и t.

Если $t \in \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_3 \cup \mathcal{D}_4 \cup \overline{\mathcal{D}}_3 \cup \overline{\mathcal{D}}_4$, то путь интегрирование для z_{2j-1} состоит из части: (K_n) $[t_0, \tilde{t}]$, прямой

$$(\mathcal{P}_1) = \{t \in C, t_1 - t_2 - \alpha_1 = -\tilde{q},\ 0 \le \tilde{q} \le \alpha_1 - t_0\}\ [\tilde{t}, t];$$

если $t \in \mathcal{D}_5 \cup \mathcal{D}_6 \cup \mathcal{D}_2 \cup \overline{\mathcal{D}}_5$, то из части $(K_n) \cup (K_1)$ $[t_0, \tilde{t}]$ $\tilde{t} \in (K_1)$, прямой

$$(\mathcal{P}_2) = \left\{t \in C, t_1 + t_2 + \alpha_1 = \tilde{q}_1, \sqrt{\varepsilon} \le \tilde{q}_1 \le 2\alpha_1\right\}\ [\tilde{t}, t].$$

Для компоненты z_{2j} путь выбирается, симметричным, к путям z_{2j-1}.

Проверим, действительно ли, по выбранным путям $ReF_{kj}(t)$ – не возрастают. Поскольку функции $ReF_{1j}(t)$ и $ReF_{2j}(t)$ в симметричных точках принимают равные значения, то проверку проведем только для $ReF_{1j}(t)$.

Рассмотрим функции $ReF_{1j}(t)$. Сначала рассмотрим случай $t \in \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_3 \cup \mathcal{D}_4 \cup \overline{\mathcal{D}}_3 \cup \overline{\mathcal{D}}_4$.

Возьмём (K_n) $[t_0, \tilde{t}]$. Из уравнения (K_n)

$$t_1^2-(t_2+\alpha_n)^2=-(\alpha_n-\alpha_1)^2$$

находим

$$t_2=-\alpha_n+\sqrt{t_1^2+(\alpha_n-\alpha_1)^2}.$$

На (K_n): $ReF_{1n}(t)=0$, т.е. $ReF_{1n}(t)$ – не возрастает;

$$ReF_{1j}(t)=t_1^2-\left(t_2+\alpha_j\right)^2=t_1^2-\left(\alpha_n-\alpha_j-\sqrt{t_1^2+(\alpha_n-\alpha_1)^2}\right)^2=$$

$$-\left(\alpha_n-\alpha_j\right)^2+2\left(\alpha_n-\alpha_j\right)\sqrt{t_1^2+(\alpha_n-\alpha_1)^2}-(\alpha_n-\alpha_1)^2=$$

$$=2\left(\alpha_n-\alpha_j\right)\sqrt{t_1^2+(\alpha_n-\alpha_1)^2}-\left(\left(\alpha_n-\alpha_j\right)^2+(\alpha_n-\alpha_1)^2\right),$$

$$(j=1,\dots,n-1).$$

Отсюда имеем

$$\left(ReF_{1j}(t)\right)'=2\left(\alpha_n-\alpha_j\right)\frac{t_1}{\sqrt{t_1^2+(\alpha_n-\alpha_1)^2}}.$$

По условию $\alpha_n>\alpha_j$ $(j=1,\dots,n-1)$, тогда $ReF_{1j}(t)$ убывает по (K_n) при $t_0\le t_1<0$ и принимает наименьшее значение при $t_1=0$. Возьмём вторую часть пути, т.е. $(\mathcal{P}_1)$ $[\tilde{t},t]$.

Имеем $t_1-t_2-\alpha_1=-\tilde{q},\ t_2=t_1-\alpha_1+\tilde{q}$.

Тогда

$$ReF_{1j}(t)=t_1^2-\left(t_2+\alpha_j\right)^2(j=1,\dots,n)=\left(t_1-t_2-\alpha_j\right)\left(t_1+t_2+\alpha_j\right)=$$

$$=\left(\alpha_1-\alpha_j-\tilde{q}\right)\left(2t_1+\alpha_j-\alpha_1+\tilde{q}\right)=-\left(\alpha_j+\tilde{q}-\alpha_1\right)\left(2t_1+\alpha_j-\alpha_1+\tilde{q}\right).$$

Таким образом

$$\left(ReF_{1j}(t)\right)'=-2\left(\alpha_j+\tilde{q}-\alpha_1\right).$$

Если $j=1$, то

$$\left(ReF_{11}(t)\right)'=-2\tilde{q},\ 0\le\tilde{q}\le\alpha_1-t_0.$$

Равенство $\tilde{q}=0$ имеет место только на границе $\mathcal{D}_4$. Для оставшихся частей $0<\tilde{q}\le\alpha_1-t_0$ и $\left(ReF_{11}(t)\right)'<0$. Требование выполняется для $ReF_{11}(t)$.

Если $j=2,\dots,n$, то $\left(ReF_{11}(t)\right)'<0$, т.е. требование выполняется для $ReF_{1j}(t)$ $(j=2,\dots,n)$.

Пусть $t\in\mathcal{D}_5\cup\mathcal{D}_6\cup\mathcal{D}_2\cup\overline{\mathcal{D}}_5$. Функции $ReF_{1j}(t)$ $(j=1,\dots,n)$ рассмотрим для $t\in(K_1)$ $[t_0,\tilde{t}]$.

$$\forall t\in(K_1)(ReF_{11}(t)=0).$$

Из уравнения (K_1)

$$t_1 - t_2 - \alpha_1 = 0$$

определим

$$t_2 = t_1 - \alpha_1.$$

Тогда

$$ReF_{1j}(t) = t_1^2 - (t_2 + \alpha_j)^2 = t_1^2 - (t_1 + \alpha_j - \alpha_1)^2 = -(\alpha_j - \alpha_1)(2t_1 + \alpha_j - \alpha_1).$$

$$\left(ReF_{1j}(t)\right)' = -(\alpha_j - \alpha_1) < 0.$$

Функции $ReF_{1j}(t)$ $(j = 2, \dots, n)$ убывают.

$\forall t \in (K_1)$, требование, выполняется для $ReF_{1j}(t)$ $(j = 1, \dots, n)$. Теперь рассмотрим $t \in (\mathcal{P}_2)$. Из уравнения $(\mathcal{P}_2)$ определим

$$t_1 = -t_2 - \alpha_1 + \tilde{q}_1.$$

Для функций $ReF_{1j}(t)$ имеем

$$ReF_{1j}(t) = (t_2 + \alpha_1 - \tilde{q}_1)^2 - (t_2 + \alpha_j)^2 = -(\alpha_j - \alpha_1 + \tilde{q}_1)(2t_2 + \alpha_j - \alpha_1 - \tilde{q}_1).$$

Отсюда получим

$$\left(ReF_{1j}(t)\right)' = -2(\alpha_j - \alpha_1 + \tilde{q}_1) < 0, j = 1, \dots, n.$$

(при $j = 1$ имеем $\left(ReF_{1j}(t)\right)' = -2\tilde{q}_1 < -2\sqrt{\varepsilon} < 0$).

По симметричным путям $ReF_{2j}(t)$ также не возрастают. Подведя итог можем утверждать, (Т) выполняется для всех $ReF_{kj}(t)$ по выбранным путям интегрирования.

(Т) важно при оценке последовательных приближений.

3. ***Оценка и доказательство равномерной сходимости последовательных приближений.***

Переходим к оценке последовательных приближений (8) и доказательству, их равномерной сходимости в $\mathcal{D}_0$. Как показывают исследования приведенные в [6], на оценку последовательных приближений в основном влияют оценки первых приближений. Оценка последовательных приближений проводится методом индукции, согласно выбранных путей интегрирования.

Оценим первые приближения.

Для $z_{11}(t, \varepsilon)$ получим оценку

$$|z_{11}| \le M \begin{cases} \varepsilon, t \in \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup \overline{\mathcal{D}}_3 \cup \overline{\mathcal{D}}_4 \cup \overline{\mathcal{D}}_5, \\ \sqrt{\varepsilon}, \quad t \in \mathcal{D}_3 \cup \mathcal{D}_4 \cup \mathcal{D}_5 \cup \mathcal{D}_6. \end{cases}$$

При оценке $z_{11}(t, \varepsilon)$ на (K_n) применяется метод Лапласа, а на (K_1) метод стационарной фазы.

Для $z_{2j-1\,1}(t,\varepsilon)$ $(j=2,\dots,n)$ имеем оценки

$$\left|z_{2j-1\,1}\right| \le M\varepsilon, t\in\mathcal{D}_0.$$

В рассматриваемом случае $\forall t\in\mathcal{D}_0\ \left(F'_{2j-1}(t)\neq 0\right)$, тогда интегралы

$$\int_{t_0}^{t} exp\frac{1}{2\varepsilon}\Big(F_{1j}(t)-F_{1j}(\tau)\Big)\,d\tau$$

имеют порядок ε. Для этого к этим интегралам, достаточно применить интегрирование по частям и учесть (T).

$z_{21}(t,\varepsilon)$, $z_{2j\,1}(t,\varepsilon)$ имеют оценки

$$|z_{21}|\le M\begin{cases}\varepsilon, & t\in\mathcal{D}_1\cup\mathcal{D}_2\cup\mathcal{D}_3\cup\mathcal{D}_4\cup\mathcal{D}_5,\\ \sqrt{\varepsilon}, & t\in\overline{\mathcal{D}}_3\cup\overline{\mathcal{D}}_4\cup\overline{\mathcal{D}}_5\cup\mathcal{D}_6.\end{cases}$$

Итого

$$\|z_1(t,\varepsilon)\|\le M\begin{cases}\varepsilon, & t\in\mathcal{D}_1\cup\mathcal{D}_2,\\ \sqrt{\varepsilon}, & t\in\left(\bigcup_{k=3}^{5}(\mathcal{D}_k\cup\overline{\mathcal{D}}_k)\right)\cup\mathcal{D}_6.\end{cases}$$

Для последующих приближений получается аналогичная оценка

$$\|z_m(t,\varepsilon)\|\le M\begin{cases}\varepsilon, & t\in\mathcal{D}_1\cup\mathcal{D}_2,\\ \sqrt{\varepsilon}, & t\in\left(\bigcup_{k=3}^{5}(\mathcal{D}_k\cup\overline{\mathcal{D}}_k)\right)\cup\mathcal{D}_6.\end{cases}\qquad(8)$$

Для доказательства равномерной сходимости $\{z_m(t,\varepsilon)\}$ применяется признак Вейерштрасса, т.е. проводится оценка

$$\|z_m-z_{m-1}\|\le\left(M_1\sqrt{\varepsilon}\right)^m, m=1,2,\dots$$

Из доказанной оценки вытекает равномерная сходимость $\{z_m(t,\varepsilon)\}$ к некоторой функции $z(t,\varepsilon)$, которая является решением (6).

Для этого решения справедлива оценка, согласно (8)

$$\|z(t,\varepsilon)\|\le M\begin{cases}\varepsilon, & t\in\mathcal{D}_1\cup\mathcal{D}_2,\\ \sqrt{\varepsilon}, & t\in\left(\bigcup_{k=3}^{5}(\mathcal{D}_k\cup\overline{\mathcal{D}}_k)\right).\end{cases}\qquad(9)$$

Рассматривая (9) на действительной оси получим оценку0

$$\|z(t,\varepsilon)\|\le\begin{cases}\varepsilon, & t_0\le t_1<\alpha_1-\sqrt{\varepsilon}\\ \sqrt{\varepsilon}, & \alpha_1-\sqrt{\varepsilon}\le t_1\le\alpha_1.\end{cases}\qquad(10)$$

Из (10) вытекает справедливость теоремы.

Вз доказанной теоремы вытекает, на ЗР, основное влияние оказывают точки поворота $(\pm i\alpha_1)$.

Заключение

Таким образом, из доказанной теоремы вытекает, для решения рассматриваемой системы сингулярно возмущенных уравнений происходит задержка решения вблизи возникшего неустойчивого положения равновесия в течении конечного времени.

При исследовании поставленной задачи применены линии уровня и свойства гармонических функций. Основным является построение области в комплексной плоскости. Такой подход позволил эффективно решить поставленную задачу.

Литература

1. Шишкова, М.А. (1973) Рассмотрение одной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных. Докл.АН СССР, Т.209. №3, сс. 576-579.
2. Нейштадт, А.И. (1988) О затягивании потери устойчивости при динамических бифуркациях. II. Дифференциальные уравнения, Т. 24. №2, сс. 226–233.
3. Алыбаев, К.С. (2001) Метод линий уровня исследования сингулярно возмущенных уравнений при нарушении условия устойчивости. Вестник КГНУ. Серия 3, Выпуск 6, сс.190-200.
4. Турсунов, Д. А. (2018) Асимптотика решения задачи Коши при нарушении устойчивости точки покоя в плоскости «быстрых движений» Вестник Томск.гос.универ. Матем. и механика. №54, сс. 46–57.
5. Алыбаев, К.С., Мусакулова Н.К. (2022) Метод линий уровня в теории сингулярно возмущенных уравнений. Вестник ОшГУ, № 4. сс. 206-217. https://doi.org/10.52754/16947452_2022_4_206
6. Алыбаев, К.С., Нурматова, М.Н. (2023) Явление затягивания потери устойчивости в теории сингулярных возмущений. Бюллетень науки и практики. Т. 9. №12. сс.12-19. https://doi.org/10.33619/2414-2948/97/01
7. Alybaev, K.S., Dzhuraev, A.M.,Nurmatova, M.N. (2024) Delay in solving autonomous singularly perturbed equations near an unstable equilibrium position. Lobachevskii Journal of Mathematics, Vol. 45, No. 3, pp. 1178–1187. https://doi.org/10.1134/S1995080224600791.
8. Алыбаев, К.С., Нурматова, М.Н., Мусакулова Н.К. (2024) Методы исследования асимптотики решений сингулярно возмущенных уравнений в комплексных областях. Бюллетень науки и практики. Т. 10. №3, сс. 14-27. https://doi.org/10.33619/2414-2948/100/01.