УДК 517.951
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_1(4)_45

ВТОРАЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ И С ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ

Юлбарсов Хожиакбар Акбарович, докторант (PhD)
xojiakbaryulbarsov1@gmail.com
Ферганский государственный университет
Фергана, Узбекистан

Аннотация: *В настоящее время в связи с проблемами передачи тепла в гетерогенной среде, влагопереноса в почвенных грунтах, нестационарного процесса фильтрации в трещиновато-пористой среде и ряда других проблем значительно возрос интерес к изучению начально-краевых и краевых задач для неклассических уравнений с частными производными. К таким неклассическим уравнениям относится уравнения псевдопараболического типа.*

В прямоугольной области исследована вторая начально-краевая задача для однородного псевдопараболического уравнения третьего порядка с дробной по времени производной Капуто и с оператором Бесселя по другой перемененной. Установлены условия однозначной разрешимости рассматриваемой задачи в классе непрерывно дифференцируемых функций. Существование решения второй краевой задачи доказано методом Фурье.

Ключевые слова: *псевдопараболическое уравнение, краевые задачи, дифференциальное уравнение дробного порядка, дробная производная Капуто, дробный интеграл Римана-Лиувилля, метод Фурье, функция Миттаг-Леффлера, оператор Бесселя.*

THE SECOND BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A PSEUDO-PARABOLIC EQUATION OF THE THIRD ORDER WITH A FRACTIONAL DERIVATIVE AND WITH A BESSEL OPERATOR

Yulbarsov Khojiakbar Akbarovich, doctoral student (PhD)
xojiakbaryulbarsov1@gmail.com
Fergana State University
Fergana, Uzbekistan

Abstract: *At present, in connection with the problems of heat transfer in a heterogeneous environment, moisture transfer in soil, nonstationary filtration process in a fractured-porous medium, and a number of other problems, interest in the study of initial-boundary value and boundary value problems for non-classical partial differential equations has increased significantly. Such non-classical equations include equations of pseudoparabolic type.*

In a rectangular domain, the second initial-boundary value problem for a homogeneous third-order pseudoparabolic equation with a time-fractional Caputo derivative and a Bessel operator with respect to another variable is studied. Conditions for the unique solvability of the problem considered in the class of continuously differentiable functions are established. The existence of a solution to the second boundary value problem is proved by the Fourier method.

Keywords: *pseudoparabolic equation, boundary value problems, fractional order differential equation, Caputo fractional derivative, Riemann-Liouville fractional integral, Fourier method, Mittag-Leffler function, Bessel operator.*

Введение. Дифференциальные уравнения с дробными производными естественным образом возникают в ряде областей науки, таких как физика, инженерия, биофизика, явления кровотока, аэродинамика, электронно-аналитическая химия, биология, теория управления и т.д. Более подробную информацию о таких уравнениях можно найти в работах [1–4].

Псевдопараболические уравнения с дробными производными возникают при описании процессов фильтрации жидкости в сильно пористой (фрактальной) среде, фильтрации жидкости в трещиноватой среде с фрактальной геометрией трещин, переноса почвенной влаги в зоне с учетом ее движения против потенциала влажности [4–7]. В связи с этим возникает необходимость исследования краевых задач для дифференциальных уравнений с дробными производными и разработки методов их решений.

Задача Коши, начально-краевые задачи для псевдопараболического уравнения, в том числе для уравнения Аллера с дробными производными Римана-Лиувилля были изучены в работах [8–10]. В статьях [11–13] изучаются начально-краевые задачи для уравнений параболического и псевдопараболического типов с участием оператора Бесселя.

В данной работе изучается первая начально-краевая задача для одномерного псевдопараболического уравнения с дробными производными Капуто.

1. Определение дробных проиводных и интегралов.

Введем некоторые понятия, необходимые для дальнейшего исследования.

Определение 1. Дробным дифференциальным оператором Капуто D_t^{β} порядка β, $0<\beta\le 1$ для дифференцируемой функции f называется оператор, определенный выражением [3,4]:

$$D_t^{\beta}\left[f(x)\right](t)=I\left[f'(t)\right]=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(1-\beta)}\displaystyle\int_0^t f'(t)(t-\tau)^{-\beta}\,d\tau, & 0<\beta<1,\\ f'(t), & \beta=1,\end{cases} \tag{1}$$

где $\Gamma(z)$ – гамма функция.

Определение 2. Дробным интегральным оператором Римана-Лиувилля $D_{0t}^{-\beta}$ порядка β, $0<\beta\le 1$ для интегрируемой функции f называется оператор, определенный выражением [3,4]:

$$D_{0t}^{\beta}f(t)=I^{\beta}\left[f(t)\right]=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(\beta)}\displaystyle\int_0^t f(t)(t-\tau)^{\beta-1}\,d\tau, & 0<\beta<1,\\ \displaystyle\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau, & \beta=1,\end{cases} \tag{2}$$

Определение 3. Двухпараметрическая функция $E_{\alpha,\beta}(z)$ определяемая формулой [3]:

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\beta)},\quad (\alpha>0,\ \beta>0), \tag{3}$$

называется функцией Миттаг-Леффлера.

Приведем некоторые соотношения, приведенные в [3]:

$$E_{1,1}(z)=e^z,\quad E_{1,1}(z)=\frac{e^z-1}{z}, \tag{4}$$

$$E_{2,1}(z)=ch\sqrt{z},\quad E_{2,1}(z)=\frac{sh\sqrt{z}}{z}, \tag{5}$$

$$E_{1/2,1}(z)=\frac{2}{\sqrt{z}}\mathrm{e}^{-z}\mathrm{erfc}\left(-\sqrt{z}\right). \tag{6}$$

При $\beta=1$ получим однопараметрическую функцию Миттаг-Леффлера:

$$E_{\alpha,1}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+1)}\equiv E_\alpha(z) \tag{7}$$

Обобщение формулы Ньютона-Лейбница, при α , $(0<\alpha\le 1)$

$$D_{0t}^{-\beta}D_t^{\beta}f(t)=z(t)-\frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}z^{(\beta-1)}(0) \tag{8}$$

2. Постановка и основной результат

В области $\Omega_T=\{(x,t):0<x<1,\ 0<t\le T\}$ рассмотрим начально-краевую задачу

$$D_t^{\beta}u-D_t^{\beta}B_p^x u-B_p^x u=0,\ 0<\beta\le 1,\ p=\alpha-1/2,\ 0\le x\le 1,\ 0\le t\le T, \tag{9}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\qquad 0\le x\le 1, \tag{10}$$

$$\lim_{x\to 0}x^{2\beta}u_x(x,t)=u_x(1,t)=0,\qquad 0\le t\le T, \tag{11}$$

где $\varphi(x)$ заданная функция, $B_p^x\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{2p+1}{x}\frac{\partial}{\partial x}$ - оператора Бесселя .

Здесь D_t^{β} – дробная производная Капуто порядка β , $(0<\beta\le 1)$.

Определение 4. Классическим решением задачи $(9)-(11)$ в области Ω_T назовем функцию $u=u(x,t)$ из класса $D_t^{\beta}u(x,t)\in C(\Omega_T)$, $D_t^{\beta}B_p^x u(x,t)\in C(\Omega_T)$, $B_p^x u(x,t)\in C(\Omega_T)$, которая удовлетворяет уравнению (9) при всех $u(x,t)$, начальному условию (10) при всех $x\in[0,1]$, и краевым условиям (11) при всех $t\in[0,T]$.

Теорема. Пусть $\varphi(x)\in C^2[0,1],\ \varphi'''(x)\in L_1(0,1),$ и $\varphi(0)=\varphi(1)=0,$ $\varphi''(0)=\varphi''(1)=0.$ Тогда задача (9) -(11) имеет единственное решение. Это решение представимо в виде

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n E_\alpha\left(\frac{\sigma_n^2}{1+\sigma_n^2}t^\alpha\right)x^{1/2-\alpha}J_{\alpha-1/2}(\sigma_n x), \tag{12}$$

где $\varphi_n=\frac{2}{J_{3/2-\alpha}^2(\sigma_n)}\int_0^1\varphi(x)x^{1/2+\alpha}J_{\alpha-1/2}(\sigma_n x)dx.$

Доказательство. Согласно методу Фурье, нетривиальные решения уравнения (9), удовлетворяющее граничным условиям (11) ищем в виде

$$u(x,t)=X(x)T(t). \tag{13}$$

Подставляя значения $u(x,t)$ из (12) в (13) и разделяя переменные, получим

$$\frac{D_{0t}^{\beta}T(t)}{D_{0t}^{\beta}T(t)+T(t)}=\frac{B_p^x X(x)}{X(x)}=-\lambda$$

Отсюда, предполагая, что $D_{0t}^{\alpha}T(t)+T(t)\neq 0$, и учитывая условие (11), получим следующие уравнения относительно функций $X(x)T(t)$:

$$X''(x)+\frac{2\alpha}{x}X'(x)+\lambda X(x)=0, \tag{14}$$

$$X'(0)=0,\ X'(1)=0; \tag{15}$$

$$D_{0t}^{\beta}T(t)+\frac{\lambda}{1+\lambda}T(t)=0, \tag{16}$$

$$T'(0)=0, T'(1)=0 \tag{17}$$

Из уравнения (14), произведя замену

$$X(x)=\left(t/\sqrt{\lambda}\right)^{1/2-\alpha}\ p(t),$$

где $t=\sqrt{\lambda}x$ получим уравнение Бесселя [14, § 3.1]:

$$t^2p''(t)+tp'(t)+\left(t^2+(1/2-\alpha)^2\right)p(t)=0. \tag{18}$$

Принимая во внимание вид общего решения [14, § 3.1] уравнения (18) и введенные обозначения, получим общее решение уравнения (14) в виде

$$X(x)=c_1x^{1/2-\alpha}J_{1/2-\alpha}\left(\sqrt{\lambda}x\right)+c_2x^{1/2-\alpha}J_{\alpha-1/2}\left(\sqrt{\lambda}x\right) \tag{19}$$

Здесь c_1 и c_2 - произвольные постоянные, J_l и J_{-l} - функция Бесселя порядка l первого рода [14, §§ 3.1, 3.5] соответственно. Из (19) следует, что решение уравнения (14), удовлетворяющее первому из условий (15), существует при $\alpha<1/2$ и оно определяется равенством

$$X(x)=c_1x^{1/2-\alpha}J_{\alpha-1/2}\left(\sqrt{\lambda}x\right) \tag{20}$$

Подставляя (20) во второе из условий (15), получим условия существования нетривиального решения задачи (14), (15):

$$J_{\alpha+1/2}\left(\sqrt{\lambda}\right)=0\,. \tag{21}$$

Известно, что при $l>-1$ функция Бесселя J_l имеет счетное число нулей, причем все они вещественны и с попарно противоположными знаками [14, § 15. 23]. Так как $1/2-\alpha>0$ уравнение (21) имеет счетное число вещественных корней. Обозначая через σ_n-n-ный положительный корень уравнения (21), получим значения параметра λ при которых существуют нетривиальные решения задачи (14), (15), т. е. ее собственные значения:

$$\lambda_n=\sigma_n^2,\ \ n\in N.$$

Полагая в (20) $\lambda=\lambda_n$, $n\in N$ и $c_1=1$, получим нетривиальные решения (собственные функции) задачи (14), (15):

$$X_n(x)=c_1x^{1/2-\alpha}J_{\alpha-1/2}(\sigma_nx),\ \ n\in N. \tag{22}$$

Теперь перейдем к исследованию задачи (16), (17).

Решение дробного дифференциального уравнения вида (16), удовлетворяющего граничному условию (17), имеет следующий вид

$$T_n(t) = C_n E_\alpha\left(-\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} t^\alpha\right), \tag{23}$$

где $E_{\alpha,1}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+1)}$ функция Миттаг-Леффлера, C_n, $n = 1, 2, ...$ -пока произвольные постоянные.

Объединив $X(x), T(t)$ получим:

$$u_n(x,t) = C_n E_\alpha\left(-\frac{\sigma_n^2}{1+\sigma_n^2} t^\alpha\right) x^{1/2-\alpha} J_{\alpha-1/2}(\sigma_n x)$$

решение удовлетворяющей уравнению (9) с граничными условиями (11).

Воспользовавшись обобщенным принципом суперпозиции, запишем решение задачи (9), (11) в виде

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n E_\alpha\left(-\frac{\sigma_n^2}{1+\sigma_n^2} t^\alpha\right) x^{1/2-\alpha} J_{\alpha-1/2}(\sigma_n x). \tag{24}$$

Для нахождения неизвестных постоянных C_n, воспользуемся начальным условием (10). Тогда из (24) имеем

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\, x^{1/2-\alpha} J_{\alpha-1/2}(\sigma_n x). \tag{25}$$

Согласно [14, § 15.25], система функций $\left\{J_{1/2-\alpha}(\sigma_n x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ ортогональнос весом x на отрезке $[0,1]$. Поэтому в силу равенства

$$\int_0^1 x^{1/2-\alpha} J_{1/2-\alpha}(\sigma_m x)\, x^{1/2-\alpha} J_{1/2-\alpha}(\sigma_n x)\, x^{2\alpha} dx = \int_0^1 x J_{1/2-\alpha}(\sigma_m x)\, J_{1/2-\alpha}(\sigma_n x)\, dx = 0$$

система собственных функций (22) ортогональна с весом $x^{2\alpha}$ на $[0,1]$.

Согласно [14, § 18.1], система функций $\left\{J_{1/2-\alpha}(\sigma_n x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ полна с весом x в пространстве $L_2[0,1]$ и имеет место соотношение

$$\int_0^1 x J_{1/2-\alpha}^2(\sigma_n x)\, dx = \frac{1}{2} J_{3/2-\alpha}^2(\sigma_n).$$

Отсюда следует, что система собственных функций (22) полна в пространстве $L_2[0,1]$ с весом $x^{2\alpha}$ и для функций этой системы имеет место соотношение

$$\int_0^1 x^{1-2\alpha} J_{1/2-\alpha}^2(\sigma_n x)\, x^{2\alpha} dx = \int_0^1 x J_{1/2-\alpha}^2(\sigma_n x)\, dx = \frac{1}{2} J_{3/2-\alpha}^2(\sigma_n).$$

Рассматривая (25) как разложение $\varphi(x)$ в ряд Фурье, найдем коэффициенты Фурье

$$\varphi_n = C_n = \frac{2}{J_{3/2-\alpha}^2(\sigma_n)} \int_0^1 \varphi(x)\, x^{1/2+\alpha} J_{\alpha-1/2}(\sigma_n x)\, dx. \tag{26}$$

Подставив найденные C_n в (24), получим формальное решение задачи (9)-(10):

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n E_\alpha\left(-\frac{\sigma_n^2}{1+\sigma_n^2}t^\alpha\right)x^{1/2-\alpha}J_{\alpha-1/2}(\sigma_n x). \tag{27}$$

Теперь покажем, что найденная функция $u(x,t)$ является классическим решением задачи (9)-(11). Сначала покажем непрерывность функции $u(x,t)$ в области Ω_T.

Далее покажем, что формально построенное решение (27) является классическим, т. е. регулярным при $0<x<1,\ 0<t<T,$ непрерывным по x при $0\le x\le 1$ и удовлетворяет дополнительным условиям (9), (11).

Используя неравенство и то, что

$$E_\alpha(-z)\le\frac{M}{1+z}\le M,\ z\ge 0,\ 0<\alpha<1,$$

из формулы (27), имеем

$$|u(x,t)|\le\sum_{n=0}^{\infty}|\varphi_n|\left|E_\alpha\left(-\frac{\sigma_n^2}{1+\sigma_n^2}t^\alpha\right)\right|\left|x^{1/2-\alpha}J_{\alpha-1/2}(\sigma_n x)\right|\le\sum_{n=0}^{\infty}\frac{M|\varphi_n|\sigma_n^{\alpha-1/2}}{2^{\alpha-1/2}\Gamma(\alpha+1/2)}. \tag{28}$$

Из (26) можно получить, проинтегрировав уравнение по частям один раз

$$\varphi_n=-\frac{2}{\sigma_n J_{3/2-\alpha}^2(\sigma_n)}\int_0^1\varphi'(x)x^{\alpha+1/2}J_{\alpha+1/2}(\sigma_n x)dx. \tag{29}$$

Обозначив интеграл в выражении (29) через $\tilde{\varphi}_n$, его можно выразить следующим образом.

$$\varphi_n=-\frac{2}{\sigma_n J_{3/2-\alpha}^2(\sigma_n)}\tilde{\varphi}_n \tag{30}$$

Подставляя выражение (30) в (28), получим

$$\begin{aligned}|u(x,t)|&=\sum_{n=0}^{\infty}|\varphi_n|\left|E_\alpha\left(-\frac{\sigma_n^2}{1+\sigma_n^2}t^\alpha\right)\right|\left|x^{1/2-\alpha}J_{\alpha-1/2}(\sigma_n x)\right|\le\\&\le\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{3/2-\alpha}M\tilde{\varphi}_n}{\sigma_n^{3/2-\alpha}J_{3/2-\alpha}^2(\sigma_n)\Gamma(\alpha+1/2)}\end{aligned} \tag{31}$$

Данный ряд (31) является сходящимся рядом.

Поэтому функция $u(x,t)$, определяемая рядом (27), непрерывна в области Ω_T и удовлетворяет начальному условию (9) и граничным условиям (11).

Остается показать, что функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (9) в области Ω_T. Для этого достаточно показать равномерную сходимость рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}D_t^\beta u(x,t),\ \sum_{n=1}^{\infty}D_t^\beta B_p^x u(x,t),\ \sum_{n=1}^{\infty}B_p^x u(x,t).$$

Формально дифференцируя ряд (27), находим

$$\begin{aligned}D_t^\beta u(x,t)&=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n D_t^\beta E_\alpha\left(-\frac{\sigma_n^2}{1+\sigma_n^2}t^\alpha\right)x^{1/2-\alpha}J_{\alpha-1/2}(\sigma_n x)=\\&=-\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\frac{\sigma_n^2}{1+\sigma_n^2}E_\alpha\left(-\frac{\sigma_n^2}{1+\sigma_n^2}t^\alpha\right)x^{1/2-\alpha}J_{\alpha-1/2}(\sigma_n x),\end{aligned}$$

$$B_p^x u(x,t) = -\lambda X(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^2 x^{1/2-\alpha} J_{\alpha-1/2}(\sigma_n x),$$

$$D_t^\beta B_p^x u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n D_t^\beta E_\alpha \left(-\frac{\sigma_n^2}{1+\sigma_n^2} t^\alpha \right) B_p^x x^{1/2-\alpha} J_{\alpha-1/2}(\sigma_n x) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \frac{\sigma_n^4}{1+\sigma_n^2} E_\alpha \left(-\frac{\sigma_n^2}{1+\sigma_n^2} t^\alpha \right) x^{1/2-\alpha} J_{\alpha-1/2}(\sigma_n x),$$

$$\left| D_t^\beta u(x,t) \right| = \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n| \left| \frac{\sigma_n^2}{1+\sigma_n^2} \right| \left| E_\alpha \left(-\frac{\sigma_n^2}{1+\sigma_n^2} t^\alpha \right) \right| \left| x^{1/2-\alpha} J_{\alpha-1/2}(\sigma_n x) \right| \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\varphi_n| \left| \frac{\sigma_n^2}{1+\sigma_n^2} \right| M}{2^{\alpha-1/2} \Gamma(\alpha+1/2) \sigma_n^{1/2-\alpha}} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3/2-\alpha} |\tilde{\varphi}_n| \left| \frac{\sigma_n^2}{1+\sigma_n^2} \right| M}{\sigma_n^{3/2-\alpha} J_{3/2-\alpha}(\sigma_n)} < +\infty$$

$$\left| B_p^x u(x,t) \right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sigma_n^2 \right| \left| x^{1/2-\alpha} J_{\alpha-1/2}(\sigma_n x) \right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^{\alpha+3/2}}{2^{\alpha-1/2} \Gamma(\alpha+1/2)} < +\infty$$

$$\left| D_t^\beta B_p^x u(x,t) \right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n| \left| \frac{\sigma_n^4}{1+\sigma_n^2} \right| \left| E_\alpha \left(-\frac{\sigma_n^2}{1+\sigma_n^2} t^\alpha \right) \right| \left| x^{1/2-\alpha} J_{\alpha-1/2}(\sigma_n x) \right| \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3/2-\alpha} |\tilde{\varphi}_n| \left| \frac{\sigma_n^4}{1+\sigma_n^2} \right| M}{\sigma_n^{3/2-\alpha} J_{3/2-\alpha}(\sigma_n)} < +\infty. \quad (32)$$

Из оценок (32) заключаем, что ряды $\sum_{n=1}^{\infty} D_t^\beta u(x,t), \sum_{n=1}^{\infty} D_t^\beta B_p^x u(x,t), \sum_{n=1}^{\infty} B_p^x u(x,t)$ сходятся равномерно к $D_t^\beta u(x,t)$, $D_t^\beta B_p^x u(x,t)$, $B_p^x u(x,t)$ соответственно. Теорема доказана.

Литература

1. Kilbas A.A., Srivastava H.M. and Trujillo J.J. “Teory and Applications of Fractional Differential Equations,” North-Holland Mathematics Studies, Vol. 204, 2006.
2. Miller K.S. and. Ross B. “An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations,” John Wiley, New York, 1993.
3. Podlubny I. “Fractional Differential Equations,” Academic Press, San Diego, New York, London, 1999.
4. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.- Минск: Наука и техника, 1987.— 688 с.
5. Джарбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М., 1966.-672с.
6. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
7. Учайкин В.В. Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок, 2008. 512 с.
8. Псху А.В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука. 2005. 199 с.
9. Аблабеков, Б.С. Обратные задачи для псевдопараболических уравнений.-Бишкек: Илим, 2001.-183 с.
10. Аблабеков, Б.С. Метод полуобращения и существование решений начальной, начально-краевой задачи // Наука и новые технологии.-1999.- № 4.- С. 12–19.
11. Karimov Sh.T. Method of Solving the Cauchy Problem for One-Dimensional Polywave Equation With Singular Bessel Operator. Russian Mathematics, 2017, Vol. 61, No. 8, pp. 22–35. DOI: 10.3103/S1066369X17080035.
12. Karimov Sh.T. On Some Generalizations of Properties of the Lowndes Operator and their Applications to Partial Differential Equations of High Order Filomat 2018 Volume 32, Issue 3, Pages: 873-883 https://doi.org/10.2298/FIL1803873K.
13. Каримов Ш.Т, Юлбарсов Х.А. Аналог задачи Гурса для одного псевдопараболического уравнения третьего порядка. «Стохастик таҳлилнинг долзарб муаммолари» конференция. Тошкент. 2021 г. 309-311 с.

14. Watson G
15. .N. A Treatise on the Theory of Bessel Functions. Cambridge, Cambridge University Press, 1922.