УДК 517.928.2
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_1(4)_44

ӨЗГӨЧӨЛҮГҮ БОЛГОН II ТАРТИПТЕГИ КАДИМКИ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН САНДЫК ЧЫГАРЫЛЫШЫ

Эсенгул кызы Пейил, кенже илимий кызматкер, PhD
peyil.esengul@manas.edu.kg
Абылаева Элла Дайырбековна, доц.м.а., PhD
ella.abylaeva@manas.edu.kg
Кыргыз-Түрк Манас университети
Бишкек, Кыргызстан

Аннотация. *Макалада берилген маселе Ломов тарабынан иштелип чыккан теориянын негизинде катаал маселени чектелген айырмалар методун колдонуп чыгарууга арналган. Алынган айырма теңдемени чыгарууда кубалоо методунун алгоритми колдонулду.*
Ачкыч сөздөр: *Катаал маселе, чектелген айырмалар методу, өзгөчө чекит, кубалоо методу, кеңейтилген маселе.*

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ II ПОРЯДКА С ОСОБЕННОСТЬЮ

Пейил Эсенгул кызы, млад. науч. сотрд., PhD
peyil.esengul@manas.edu.kg
Абылаева Элла Дайырбековна, и.о.доц., PhD
ella.abylaeva@manas.edu.kg
Кыргызско-Турецкий университет “Манас”
Бишкек, Кыргызстан

Аннотация. *Задача представленная в статье предназначена для решения жесткой задачи методом конечных разностей на основе теории разработанной Ломовым. Для решения полученного разностного уравнения был использован алгоритм метода прогонки.*
Ключевые слова: *Жесткая задача, метод конечных разностей, особенная точка, метод прогонки, расширенная задача.*

NUMERICAL SOLUTION OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS OF ORDER II WITH A SINGULARITY

Peyil Esengul kyzy, Research Assist. Dr., PhD
peyil.esengul@manas.edu.kg
Abylaeva Ella Dairbekovna, Assist. Prof. Dr., PhD
ella.abylaeva@manas.edu.kg
Kyrgyz-Turkish Manas University
Bishkek, Kyrgyzstan

Аннотация. *The problem presented in the article is intended for solving a rigid problem by the finite difference method based on the theory developed by Lomov. The algorithm of the sweep method was used to derive the obtained difference equation.*
Ачкыч сөздөр: *Rigid problems, finite difference method, singular point, sweep method, extended problem.*

1. Киришүү Катаал маселелерди чыгарууда Ломов методун [1] жана чектелген айырмалар методун [3-5] колдондук. Биз төмөнкү өзгөчөлүгү болгон катаал маселени изилдедик

$$\varepsilon u''(x) + xa(x)u'(x) - u(x) = f(x) \tag{3.1}$$

$$u(a) = A, \quad u(b) = B \tag{3.2}$$

Мында төмөнкүдөй шарттар коюлган:

a) $a(x), f(x) \epsilon C^2[0,1]$ – функциялары белгилүү,

b) $a(x) > 0, \ \forall x \epsilon [0,1]$.

x көз каранды эмес өзгөрмөсүнүн катарына төмөнкү формула боюнча көз карандысыз өзгөрмө киргизебиз

$$\tau_i = \frac{\varphi_i(x)}{\varepsilon^\alpha}.$$

Регуляризацияланууочу асимтотиканы $\varphi(x)$ түрүндө тандайбыз

$$\frac{\varepsilon^{\alpha-1} x a(x)}{\varphi'(x)} = \frac{\varphi(x)}{\varepsilon^\alpha} = \tau \quad же \quad \varphi(x)\varphi'(x) = \varepsilon^{2\alpha-1} x a(x).$$

Эгерде $\alpha = 1/2$ болсо, анда

$$\varphi(x)\varphi'(x) = xa(x) \ => \ [\varphi^2(x)]' = 2xa(x) =>$$

$$\varphi(x) = (2\int_0^x sa(s)ds)^{1/2}. \tag{3.3}$$

Ошону менен катар өзгөчөлүгү болгондугуна байланыштуу дагы бир өзгөрмө киргизүүгө туура келет

$$\mu = \frac{1}{\varepsilon}\int_{-1}^{x} sa(s)ds = \frac{\omega(x)}{\varepsilon}.$$

$u(x,\varepsilon) = \tilde{u}(x,\tau,\mu,\varepsilon)$ деп туундуларын

$$u' = \partial_x \tilde{u} + \frac{\varphi'(x)}{\varepsilon^\alpha}\partial_\tau \tilde{u} + \frac{\omega'(x)}{\varepsilon}\partial_\mu \tilde{u}$$

$$u'' = \partial_x^2 \tilde{u} + \left(\frac{\varphi'(x)}{\varepsilon^\alpha}\right)^2 \partial_\tau^2 \tilde{u} + \left(\frac{\omega'(x)}{\varepsilon}\right)^2 \partial_\mu^2 \tilde{u} + D_x \partial_\tau \tilde{u}\frac{1}{\varepsilon^\alpha} + T_x \partial_\mu \tilde{u}\frac{1}{\varepsilon},$$

$$D_x = 2\varphi'(x)\partial_x + \varphi''(x), \quad T_x = 2\omega'(x)\partial_x + \omega''(x), \tag{3.4}$$

(3.4) формуласынын негизинде төмөнкү кеңейтилген маселеге келебиз

$$\varepsilon \partial_x^2 \tilde{u} + \varepsilon \left(\frac{\varphi'(x)}{\varepsilon^\alpha}\right)^2 \partial_\tau^2 \tilde{u} + \varepsilon (\frac{\omega'(x)}{\varepsilon})^2 \partial_\mu^2 \tilde{u} + \varepsilon^{1-\alpha} D_x \partial_\tau \tilde{u} + T_x \partial_\mu \tilde{u} + xa(x)\partial_x \tilde{u}$$

$$+ xa(x)\frac{\varphi'(x)}{\varepsilon^\alpha}\partial_\tau \tilde{u} + xa(x)\frac{\omega'(x)}{\varepsilon}\partial_\mu \tilde{u} - \tilde{u} = f(x)$$

Эми жогорку маселедеги x'ке карата алынган айрым туундуларды чектелген айырмалар методу менен алмаштырабыз.

$$\tilde{u} = y_i; \qquad \partial_x \tilde{u} = y\,'(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}; \tag{3.5}$$

$$\partial_x^2 \tilde{u} = y''(x_i) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}; \tag{3.6}$$

$$\varepsilon \frac{y_{i+1}(\tau,\mu) - 2y_i(\tau,\mu) + y_{i-1}(\tau,\mu)}{h^2} + \varepsilon \left(\frac{\varphi'(x_i)}{\varepsilon^\alpha}\right)^2 \partial_\tau^2 y_i(\tau,\mu) + \varepsilon\left(\frac{\omega'(x)}{\varepsilon}\right)^2 \partial_\mu^2 y_i(\tau,\mu) +$$
$$\varepsilon^{1-\alpha}\partial_\tau \left[2\varphi'(x_i)\frac{y_{i+1}(\tau,\mu) - y_i(\tau,\mu)}{h} + \varphi''(x_i) y_i(\tau,\mu)\right] + \partial_\mu \tilde{u}\left[2\omega(x_i)\frac{y_{i+1}(\tau,\mu) - y_i(\tau,\mu)}{h} + \right.$$
$$\left.\omega''(x_i) y_i(\tau,\mu)\right] + x_i a(x_i)\frac{y_{i+1}(\tau,\mu) - y_i(\tau,\mu)}{h} + x_i a(x_i)\frac{\varphi'(x_i)}{\varepsilon^\alpha}\partial_\tau y_i(\tau,\mu) +$$
$$x_i a(x_i)\frac{\omega'(x_i)}{\varepsilon^\alpha}\partial_\mu y_i(\tau,\mu) - y_i(\tau,\mu) = f(x_i)$$

Бул маселенин чыгарылышын төмөнкү класста издейбиз:

$$\tilde{u} = c(x_i)\, erf\left(\frac{\tau}{\sqrt{2}}\right) + v(x_i)\, exp(-\mu) + q(x_i) \tag{3.7}$$

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt.$$

Мындан τ'га карата биринчи жана экинчи туундусун алып, (3.1) маселеге коёбуз

$$\partial_\tau \tilde{u} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} c(x_i)\, exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right) \qquad (3.8)$$

$$\partial_\tau^2 \tilde{u} = -\frac{\tau}{\sqrt{2\pi}} c(x)\, exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right)$$

$$\partial_\mu \tilde{u} = -v(x_i) \exp(-\mu)$$

$$\partial_\mu^2 \tilde{u} = v(x_i) \exp(-\mu)$$

$$\varepsilon\left(\frac{c_{i+1} - 2c_i + c_{i-1}}{h^2} erf\left(\frac{\tau}{\sqrt{2}}\right) + \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{h^2} exp(-\mu) + \frac{q_{i+1} - 2q_i + q_{i-1}}{h^2}\right)$$
$$+ (\varphi'(x_i))^2 \left[-\frac{\tau}{\sqrt{2\pi}} c_i\, exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right) + \frac{\tau}{\sqrt{2\pi}} c_i\, exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right)\right]$$
$$+ \frac{\left(\omega'(x)\right)^2}{\varepsilon}\left[v_i \exp(-\mu) + \frac{\mu}{\varepsilon} v_i \exp(-\mu)\right]$$
$$+ \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right)\left[2\varphi'(x_i)\frac{c_{i+1} - c_i}{h} + \varphi''(x_i) c_i\right]$$
$$- \exp(-\mu)\left[2\omega'(x_i)\frac{v_{i+1} - v_i}{h} + v_i \omega''(x_i)\right]$$
$$+ x_i a(x_i)\left(\frac{c_{i+1} - c_i}{h} erf\left(\frac{\tau}{\sqrt{2}}\right) + \frac{v_{i+1} - v_i}{h} exp(-\mu) + \frac{q_{i+1} - q_i}{h}\right)$$
$$- \left(c_i\, erf\left(\frac{\tau}{\sqrt{2}}\right) + v_i\, exp(-\mu) + q_i\right) = f_i$$

$$erf\left(\frac{\tau}{\sqrt{2}}\right)\left[\varepsilon\frac{c_{i+1} - 2c_i + c_{i-1}}{h^2} + x_i a(x_i)\frac{c_{i+1} - c_i}{h} - c_i\right] = 0$$

$$exp\left(-\frac{\tau^2}{2}\right)\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2\pi}}\left[2\varphi'(x_i)\frac{c_{i+1} - c_i}{h} + \varphi''(x_i) c_i\right] = 0$$

$$\exp(-\mu)\left[\varepsilon\frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{h^2} + \frac{\left(\omega'(x)\right)^2}{\varepsilon} v_i + \left(\omega'(x)\right)^2 \mu v_i - 2\omega'(x_i)\frac{v_{i+1} - v_i}{h}\right.$$
$$\left. - v_i \omega''(x_i) + x_i a(x_i)\frac{v_{i+1} - v_i}{h} - v_i\right] = 0$$

$$\varepsilon\frac{q_{i+1} - 2q_i + q_{i-1}}{h^2} + x_i a(x_i)\frac{q_{i+1} - q_i}{h} - q_i = f_i$$

$$2\varphi'(x_i)\frac{c_{i+1} - c_i}{h} + \varphi''(x_i) c_i = 0 \;\; => \quad c_i = \frac{\frac{2\varphi'(x_i)}{h} c_{i+1}}{\frac{2\varphi'(x_i)}{h} - \varphi''(x_i)}$$

Бул теңдемеден $c_i\ (i = 0,1,\dots)$ лерди табабыз. Бирок бул жердеги c_n ди табыш үчүн биринчи орунда төмөнкү теңдемени чыгарып алышыбыз зарыл. Мында $\varepsilon = 0$ болгон учурда

$$xa(x_i)\frac{q_{i+1} - q_i}{h} - q_i = f_i,$$

белгилүү болгон чектердин негизинде

$$c_0 + v_0 + q_0 = A,$$
$$c_n + q_n = B,$$

Мында $v_n = 0$ деп тандап алабыз.

$erf(x)$ функциясынын мааниси $0 < \tau < \frac{\varphi(x)}{\sqrt{\varepsilon}}$ аралыгында

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{\varphi(x)}{\sqrt{\varepsilon}}} exp(-\frac{s^2}{2})ds \approx 1$$

барабар болгондуктан c_0 менен c_n нөлгө барабарлай албайбыз.

Теорема: Эгерде a,b) шарттары аткарылса жана берилген функциялар жылмакай болушса, анда тургузулган сандык чыгарылыштын каталыгы *O(h)* тактыгында орун алат.

Мисал:

Биз кичине параметрлүү дифференциалдык теңдеме үчүн чектик маселени чыгарууда чектелген айырмалар методун колдонобуз. Биз төмөнкүдөй маселени тандап алдык. Албетте так чыгарылышы бизге белгилүү.

$$\varepsilon u''(x) + xu'(x) - u(x) = -(1+\varepsilon\pi^2)\cos(\pi x) - \pi x sin(\pi x) \qquad (1)$$

$$u(-1) = -1, \quad u(1) = 1, \qquad (2)$$

$$\varepsilon = 10^{-3}, \qquad h = \frac{1}{15}$$

$$u(x) = \cos(\pi x) + x + \frac{x erf\left(\frac{x}{\sqrt{2\varepsilon}}\right) + \sqrt{2\varepsilon/\pi}\exp(-\frac{x^2}{2\varepsilon})}{\mathrm{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\right) + \sqrt{2\varepsilon/\pi}\exp(-\frac{1}{2\varepsilon})} \qquad (3)$$

(3) – маселенин так чыгарылышы.

Мында $a(x_i) = 1$, $f_i = -(1+\varepsilon\pi^2)\cos(\pi x) - \pi x sin(\pi x)$, $x_0 = -1$, $b = 1$

$$\varphi(x) = (2\int_0^x sa(s)ds)^{1/2} = \sqrt{2\int_0^x sds} = \sqrt{2(\frac{x^2}{2})} = x$$

$$\tau = \frac{\varphi(x)}{\varepsilon^\alpha} \;\; => \;\; \alpha = \frac{1}{2},\; \tau = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}} \;\; => \;\; \varphi' = 1;$$

$$\varphi'' = 0;$$

$$\mu = \frac{1}{\varepsilon}\int_{x_0}^x sa(s)ds = \frac{\omega(x)}{\varepsilon} \;\; => \;\; \omega(x) = \int_{x_0}^x sds = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \;\; => \;\; \mu = \frac{x^2-1}{2\varepsilon}$$

$$\omega' = x; \;\; \omega'' = 1;$$

Бизге белгилүү функцияларды таап алгандан кийин ордуна коюп эсептөөлөрдү жүргүзөбүз.

$$erf\left(\frac{x_i}{\sqrt{2\varepsilon}}\right)\left[\varepsilon\frac{c_{i+1}-2c_i+c_{i-1}}{h^2} + x_i\frac{c_{i+1}-c_i}{h} - c_i\right] = 0$$

$$exp\left(-\frac{x_i^2-1}{2\varepsilon}\right)\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2\pi}}\left[2\frac{c_{i+1}-c_i}{h}\right] = 0$$

$$\exp\left(-\frac{x_i^2-1}{2\varepsilon}\right)\left[\varepsilon\frac{v_{i+1}-2v_i+v_{i-1}}{h^2} + \frac{x_i^2}{\varepsilon}v_i + x_i^2\frac{x_i^2-1}{2\varepsilon}v_i - 2x_i\frac{v_{i+1}-v_i}{h} - v_i + x_i\frac{v_{i+1}-v_i}{h} - v_i\right] = 0$$

$$\varepsilon\frac{q_{i+1}-2q_i+q_{i-1}}{h^2} + x_i\frac{q_{i+1}-q_i}{h} - q_i = f_i$$

$\varepsilon = 0$ болгон учурдагы маселенин маанисин q_i деп тандап алабыз.

$$x_i\frac{q_{i+1}-q_i}{h} - q_i = f_i$$

Мындан q_i нин маанилерин таап, $\begin{cases} \mathrm{c}_0 + v_0 + q_0 = -1 \\ c_n + q_n = 1 \end{cases}$ системин эске алуу менен төмөнкүгө ээ болобуз.

$$c_i = c_{i+1}$$

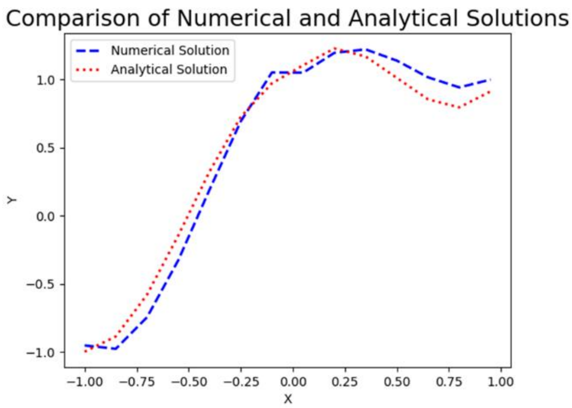
$$(\frac{\varepsilon}{h^2}-\frac{x_i}{h})v_{i+1}+(-\frac{2\varepsilon}{h^2}+\frac{x_i^2}{\varepsilon}+x_i^2\frac{x_i^2-1}{2\varepsilon}+\frac{x_i}{h}-2)v_i+(\frac{\varepsilon}{h^2})v_{i-1}=0\,,$$

$$v_0=A-c_0-q_0,\qquad v_n=0$$

Алынган итерациянын программасы Python тилинин math библиотекасы колдонулуп жазылды.

```
import numpy as np
import math
def Numerical(x0, xn, A, B, h, eps):
    m = (xn - x0) / h
    n = math.ceil(m)
    pi = math.pi
    x = np.zeros(n)
    f = np.zeros(n)
    for i in range(n):
        x[i] = x0 + i * h
        f[i] = -(1 + eps * pi ** 2) * math.cos(pi * x[i]) - pi * x[i] * math.sin(pi * x[i])
    q = np.zeros(n)
    q[0] = A
    for i in range(n - 1):
        q[i + 1] = (1 + h / x[i]) * q[i] + (f[i] * h) / x[i]
    c = np.zeros(n)
    c[n - 1] = B - q[n - 1]
    for i in range(n - 2, -1, -1):
        c[i] = c[i + 1]
    v = np.zeros(n)
    v[0] = A - c[0] - q[0]
    v[n - 1] = 0
    e = np.zeros(n)
    d = np.zeros(n)
    s = np.zeros(n)
    for i in range(n):
        e[i] = eps / h ** 2 - x[i] / h
        d[i] = -2 * eps / h ** 2 + x[i] ** 2 / eps + (x[i] ** 4 - x[i] ** 2) / (2 * eps) + x[i] / h - 2
        s[i] = eps / h ** 2
        f[i] = 0
    L = np.zeros(n)
    K = np.zeros(n)
    t = np.zeros(n)
    myu = np.zeros(n)
    u = np.zeros(n)
    y = np.zeros(n)
    L[0] = 0
    K[0] = v[0]
    K[n - 1] = 0
    L[n - 1] = 0
    v[0] = A - c[0] - q[0]
```

```
    s[n - 1] = 0
    for i in range(1, n - 1):
        L[i] = -e[i] / (d[i] + c[i] * L[i-1])
        K[i] = (h ** 2 * f[i-1] - c[i] * K[i-1]) / (d[i] + c[i] * L[i-1])
    for i in range(n):
        t[i] = x[i] / math.sqrt(eps)
        myu[i] = (x[i] ** 2 - 1) / (2 * eps)
        u[i] = c[i] * math.erf(t[i] / math.sqrt(2)) + v[i] * math.exp(-myu[i]) + q[i]
        y[i] = math.cos(pi * x[i]) + x[i] + (x[i] * math.erf(x[i] / math.sqrt(2 * eps)) + math.sqr
t(2 * eps / pi) * math.exp(-
x[i] ** 2 / 2 * eps)) / (math.erf(1/math.sqrt(2*eps)) + math.sqrt(2*eps/pi)*math.exp(-1/2*eps))
    return x, u, y
import matplotlib.pyplot as plt
plt.plot(x, u, label='Numerical Solution', color='blue', linestyle='--', linewidth=2)
plt.plot(x, y, label='Analytical Solution', color='red', linestyle=':', linewidth=2)
plt.legend()
plt.title('Comparison of Numerical and Analytical Solutions', fontsize=18)
plt.xlabel('X')
plt.ylabel('Y')
plt.show()
```



1-сүрөт. Так жана сандык чыгарылыштардын графиги

Мында эске ала кетчү нерсе кадам. Кадамдын турактуу $h = \frac{1}{15}$ (const) болушу керек.

Жогорку сүрөттө көрүнүп тургандай жыйынтык так чыгарылыш менен сандык чыгарылыш жакын экендиги көрсөтүлдү.

Адабияттар

1. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений / С.А. Ломов. – Москва: Наука, 1981.
2. Омуралиев А.С. Регуляризация сингулярно возмущенных параболических задач / А.С. Омуралиев. – Бишкек:КТМУ, 2005.
3. Дулан Э. “Равномерные численные методы решение задач с пограничным слоем “, перевод с английского Г.В.Демидова, под редакцией Н.Н. Яненко / Э. Дулан, Дж. Миллер, У. Шилдерс. – Москва: “Мир”, 1983.
4. Ракитский Ю.В. “Численные методы решения жестких систем”/ Ю.В. Ракитский, С.М. Устинов, И.Г. Черноруцкий. – Москва: “Наука”, 1979.
5. Дубинский Ю. А. “Исследование по дифференциальным уравнениям и их приложениям” : выпуск 201 / Ю. А. Дубинский, С.А. Ломов, С.И. Похожаев. – Москва, 1974.