УДК 517.956.6
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_1(4)_43

# О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ С УСЛОВИЯМИ ТРИКОМИ И ФРАНКЛЯ НА ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА

*Эргашева Сарвиноз Бахтияровна, доктарант*
sarvinozergasheva96@mail.ru
*Термезский государственный университет,*
*Термез, Узбекистан*

***Аннотация:*** *Для уравнения* $(signy)|y|^m u_{xx} + u_{yy} - m(2y)^{-1}u_y = 0$, *где* $m > 0$, *рассматриваемого в некоторой смешанной области, доказаны теоремы единственности и существования решения краевой задачи с аналогами условий Трикоми и Франкля на одной граничной характеристике.*
***Ключевые слова:*** *уравнения смешанного типа, сингулярный коэффициент, граничная характеристика, недостающее условие Трикоми, аналог условия Франкля.*

# ON THE UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF THE PROBLEM WITH TRICOMI AND FRANKL CONDITIONS ON ONE BOUNDARY CHARACTERISTIC FOR ONE CLASS OF MIXED TYPE EQUATIONS

*Ergasheva Sarvinoz Bakhtiyarovna, doctoral student*
sarvinozergasheva96@mail.ru
*Termez State University,*
*Termez, Uzbekistan*

***Abstract:*** *For the equation,* $(signy)|y|^m u_{xx} + u_{yy} - m(2y)^{-1}u_y = 0$, *where* $m > 0$, *considered in some mixed domain, we prove uniqueness and existence theorems for a solution to a boundary value problem with analogues Tricomi and Frankl conditions on one boundary characteristic.*
***Keywords:*** *equations of mixed type, singular coefficient, boundary characteristic, missing Tricomi condition, analogue of the Frankl condition.*

1. **Постановка задачи Трикоми-Франкля ($TF$).**

Пусть $D -$ конечная односвязная область комплексной плоскости $C = \{z = x + iy\}$, ограниченная при $y > 0$ нормальной кривой

$$\sigma_0(y = \sigma_0(x)): x^2 + 4(m+2)^{-2}y^{m+2} = 1,$$

с концами в точках $A(-1,0)$, $B(1,0)$, а при $y < 0$ характеристиками $AC$ и $BC$ уравнения

$$(signy)|y|^m u_{xx} + u_{yy} - m(2y)^{-1}u_y = 0, \qquad (1)$$

где $m -$ положительная постоянная.

Обозначим через $D^+$ и $D^-$ части области $D$, лежащие соответственно в полуплоскостях $y > 0$ и $y < 0$, а через $A_1$ и $A_2$ точку пересечения характеристики $AC$ с характеристиками уравнения (1), выходящими из точек $E_1(-c, 0)$ и $E_2(c, 0)$, где $0 < c < 1$. $J = (-1,1) -$ интервал оси $y = 0$.

В задаче Трикоми [1,с.29] во всех точках характеристике $AC$ задается значения искомой функции. В данной работе исследуется корректность задачи, котороя отличается от задачи Трикоми тем, что куски $AA_1$ и $A_2C$, характеристики $AC$ освобождены от локального краевого условия, и это недостающее условие Трикоми заменено аналогами условиями Франкля [2]-[4] на $AA_1 \subset AC$ и $A_2C \subset AC$, и на сегментах $AE_1$ и $E_2B$ отрезка $AA$.

**Задача** ($\boldsymbol{TF}$). Требуется найти в области $D$ функцию $u(x,y) \in C(\overline{D})$ удовлетворяющую следующим условиям:

1) функция $u(x,y)$ принадлежит $C^2(D^+)$ и удовлетаоряет уравнению (1) в области $D^+$;

2) функция $u(x,y)$ является в области $D^-$ обобщенным решением класса $R_1[5, c.104; 6, c.35]$ уравнения (1) ($u(x,y) \in R_1$), если в формуле Даламбера $\tau'(x),\ \nu(x) \in H$ (см.ниже (8));

3) на интервале вырождения $AB$ имеет место условие сопряжения

$$\lim_{y\to-0}(-y)^{-m/2}\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y\to+0} y^{-m/2}\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad x \in J, \tag{2}$$

причем эти приделы при $x = \pm 1$ могут иметь особенности порядка ниже единицы;

4) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,y)|_{\sigma_0} = \varphi(x), \qquad x \in [-1,1], \tag{3}$$

$$u(x,y)|_{A_1A_2} = \psi(x), \qquad x \in [-(1+c)/2, -(1-c)/2], \tag{4}$$

$$u[\theta(x)] - u[\theta(-x)] = \rho(x), \qquad x \in [-1,-c], \tag{5}$$

$$u(x,0) - u(-x,0) = f(x), \qquad x \in [-1,-c], \tag{6}$$

$$\theta(x_0) = \frac{x_0 - 1}{2} - i\left[\frac{(m+2)(1+x_0)}{4}\right]^{2/(m+2)},$$

$\theta(x_0) -$ аффикс точки пересечения характеристики $AC$ с характеристикой исходящей из точки $(x_0, 0)$, $x_0 \in [-1,-c]$ [7,8].

Заданные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\rho(x)$, $f(x)$ —непрерывно дифференцируемы в замыкании множества их определения, причем $\varphi(x) = (1-x^2)\varphi_0(x)$, $\varphi_0(x) \in C^1[-1,1]$.

Заметим, что условия (5) и (6) являются аналогами условия Франкля [2] соответственно на участках $AA_1$ и $A_2C$ характеристики $AC$ и на частях $AE_1$ и $E_2B$ отрезка вырождения $AB$. Обозначим $u(x,0) = \tau(x)$, тогда условие (6) примет вид

$$\tau(x) - \tau(-x) = f(x), \qquad x \in [-1,-c]. \tag{6*}$$

Задача $TF$ при значение параметра $c = 1$ переходит в задачу Трикоми, а при $c = 0$ в задачу с аналогами условия Франкля на характеристике $AC$ и на отрезке $AB$.

**2. Единственность решения задачи $\boldsymbol{TF}$.**

**Теорема 1.** Решение задачи TF при однородных краевых условиях: $\psi(x) \equiv 0$, $\rho(x) \equiv 0$, $f(x) \equiv 0$, своего наибольшего положительного значения (НПЗ) и наименьшего отрицательного значения (НОЗ) в области $\overline{\mathrm{D}}^+$ принимает только в точках кривой $\sigma_\mathrm{R}$ или в точках $\mathrm{E}_1(-\mathrm{c}, 0)$ и $\mathrm{E}_2(\mathrm{c}, 0)$.

**Доказательство.** Решение видоизмененной задачи Коши с начальными данными

$$u(x,0) = \tau(x),\ x \in \bar{J};\ \lim_{y\to-0}(-y)^{-\frac{m}{2}}\frac{\partial u}{\partial y} = \nu(x),\ x \in J, \tag{7}$$

дается формулой Даламбера [9]

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\left[\tau\left(x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\right) + \tau\left(x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\right)\right] -$$

$$-\frac{(-y)^{\frac{m+2}{2}}}{m+2}\int\limits_{-1}^{1}\nu\left(x+\frac{2t}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\right)dt. \tag{8}$$

В силу (8) из краевого условия (5) нетрудно получить соотношение

$$\tau'(x)+\tau'(-x)-\nu(x)-\nu(-x)=2\rho'(x), \qquad x\in(-1,-c). \tag{9}$$

С учетом ($6^*$) соотношение (9) преобразуем к виду

$$\nu(x)+\nu(-x)=f'(x)-2\rho'(x), \qquad x\in(-1,-c). \tag{10}$$

Теперь в силу краевого условия (4), с учетом (8) нетрудно получить следуюшее соотношение

$$\tau'(x)-\nu(x)=\psi'((x-1)/2),\ \ x\in(-c,c), \tag{11}$$

Заметим, что соотношения (10) и (11) являются основными функциональными соотношениями между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$ привнесенными из области $D^-$ соответственно на промежутки $(-1,-c)$ и $(-c,c)$ оси $y=0$.

Пусть искомая функция $u(x,y)$ своего НПЗ в области $\overline{D}^+$ достигает в точке $(x_0,y_0)$, в силу принципа Хопфа [10,с.25] эта точка не находиться внутри области $D^+$, т.е. $(x_0,y_0)\notin D^+$. Теперь допустим, что искомая функция $u(x,y)$ своего НПЗ достигает в точке $M(x_0,0)$ интервала $AB$ т.е. $x_0\in(-1,1)$. Здесь рассмотрим три случая возможного расположения точки $x_0$ на интервале $(-1,1)$.

1. Пусть $x_0\in(-1,-c)$, тогда в силу соответствуюшего однородного условия ($6^*$) (с $f(x)\equiv 0$), искомое решение своего НПЗ достигает и в точке $M(-x_0,0)$ т.е. $-x_0\in(c,1)$, тогда в силу принципа Заремба-Жиро [10,с.26] в этих точках $\nu(x_0)<0$, $\nu(-x_0)<0$, следовательно

$$\nu(x_0)+\nu(-x_0)<0. \tag{12}$$

Неравенство (12) в силу (2) противоречит соответствующему однородному равенству (10) (с $f'(x)\equiv 0,\ \rho'(x)\equiv 0$), в силу которого должно быть $\nu(x_0)+\nu(-x_0)=0$, полученное противоречие доказывает, что $x_0\notin(-1,-c)$, следовательно, в силу ($6^*$) (с $f(x)\equiv 0$) эта точка не находиться и на интервале $(c,1)$.

2. Пусть $x_0\in(-c,c)$, тогда в этой точке в силу соответствуюшего однородного соотношения (11) (с $\psi'((x-1)/2)=0$) следует, что $\nu(x_0)=0$, а это согласно (2) противоречит известному принципу Заремба-Жиро в силу которого $\nu(x_0)<0$ [10,с.26], следовательно $x_0\notin(-c,c)$.

Таким образом, функция $u(x,y)$, удовлетворяющая условиям теоремы 1 своего НПЗ в области $\overline{D}^+$ достигает в точках нормальной кривой $\sigma_0$ или в точках $E_1(-c,0)$, $E_2(c,0)$.

Анологичным методом как и выше можно показать, что решение $u(x,y)$ задачи $TF$ удовлетворяюшее условиям теоремы 1 своего НОЗ так же достигает в точках нормальной кривой $\sigma_0$. Теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 вытекает

**Следствие 1.** Задача TF имеет не более одного решения.

**Доказательство.** В самом деле, в силу теоремы 1 решение однородной задачи $TF$ своего НПЗ и НОЗ в области $\overline{D}^+$ достигает в точках кривой $\sigma_0$ или в точках $E_1(-c,0)$, $E_2(c,0)$ отрезка $AB$. В силу соответствуюшего однородного (с $\varphi(x)\equiv 0$) условия (3) $u(x,y)|_{\sigma_0}=0$, тогда эти значения достигаются в точках $E_1(-c,0)$ и $E_2(c,0)$ и в этих точках в силу соответствуюшего однородного (с $f(x)\equiv 0$) условия (6) они равны, тогда $u(x,y)=C$, $\forall(x,y)\in\overline{D}^+$. Так как $u(x,y)|_{\sigma_0}=0$, тогда $C=0$. Отсюда следует, что

$u(x,y) \equiv 0$ всюду в замкнутой области $\overline{D}^{+}$. Тогда $\lim\limits_{y\to+0} u(x,y) = 0$, $\lim\limits_{y\to-0} y^{-\frac{m}{2y}} \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0$ и в силу непрерывности решения в смешанной области и условия сопряжения (2) следует, что $\lim\limits_{y\to-0} u(x,y)$, $\lim\limits_{y\to-0} (-y)^{-\frac{m}{2y}} \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0$. Отсюда в силу соответствующих однородных начальных данных (7) (с $\tau(x) \equiv 0$, $\nu(x) \equiv 0$) из (8) следует, что $u(x,y) \equiv 0$. Следовательно, и во всей смешанной области $D$. Следствие 1 доказана.

## Литература


1. Трикоми Ф. О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа. М.—Л., 1947, 192 с.

2. Франкль Ф.И. Обтекание профилей газом с местной сверхзвуковой зоной, оканчиваюшейся прямым скатком уплотнения. // Прикладная математика и механика. 1956, том 20 №2, С.196-202.

3. Девингталь Ю.В. О существовании и единственности решения одной задачи Ф.И.Франкля. // Известия вузов.Математика. 1958, том 2 №3, С.39-51.

4. Линь Цзянь-бин. О некоторых задачах Франкля. // Вестник ЛГУ. Математика механика астрономия. 1961, том 3 №13, С.28-39.

5. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа . М., 1985,-304с.

6. Салахитдинов М.С., Мирсабуров М. Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами. Ташкент 2005 "Университет" -224 с.

7. Жегалов.В.И. Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничными условиями на обеих характеристиках и с разрывами на переходной линии.// Ученные записки.Казанский университет. Россия. 1962, том 22, КНЗ. С.3-16.

8. Нахушев А.М. К теории краевых задач для вырождаюшихся гиперболических уравнений. // Сообщения АН.ГССР.,1975,том 77 №3, С.545-548.

9. Мирсабурова У.М. Задача со смещением на внутренних характеристиках в неограниченной области для уравнения Геллерстедта с сингулярными коэффициентами. // Известия вузов.Математика. 2022, № 9, с. 70-82.

10. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М., 1981,-448с.