УДК 517.946
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_1(4)_42

ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Шодиев Дилшод Сирожиддинович, старший преподаватель
dilshod.shodiyev.76@mail.ru
Хайруллаев Мухаммад Сайдулла угли,магистр
xayrullayevmuhammad063@gmail.com
Махмудов Шохмалик Таникул угли, магистр
maxmudovshohmalik4@gmail.com
Самаркандский государственный университет имени Шарофа Рашидова
Самарканд, Узбекистан

Аннотация: *В данной работе изучается задача продолжения решения задача Коши для бигармонического уравнения в области G по ее известным значениям на гладкой части S границы ∂G. Рассматриваемая задача относится к задачам математической физики, в которых отсутствует непрерывная зависимость решений от начальных данных. Предполагается, что решение задачи существует и непрерывно дифференцируемо в замкнутой области с точно заданным данными Коши. Для этого случая при помощи функции Карлемана предлагается явная формула регуляризации. При этом предполагается, что решение ограничено на части T границы. Метод получения результатов основано на конструкции построения фундаментального решения уравнения Лапласа в явном виде, зависящего от положительного параметра, который стремиться к нулю при стремлении параметра к бесконечности на части границы области, в которых не даны условые Коши*

Ключевые слова: Задача Коши, некорректные задачи, бигармонические уравнения, функция Карлемана, регуляризованные решения, регуляризация, формулы продолжения.

CAUCHY PROBLEM FOR THE BIHARMONIC EQUATION

Shodiyev Dilshod Sirojiddinovich, senior lecturer
dilshod.shodiyev.76@mail.ru
Xayrullayev Muhammad Saydulla o'g'li, master student
xayrullayevmuhammad063@gmail.com
Maxmudov Shoxmalik Tanikul o'g'li, master student
maxmudovshohmalik4@gmail.com
Samarkand State University
named after Sharof Rashidov
Samarkand, Uzbekistan

Abstract: *In this paper, we study the problem of continuing the solution of the Cauchy problem for a biharmonic equation in a domain G by its known values on the smooth part S of the boundary ∂G. The problem under consideration belongs to the problems of mathematical physics, in which there is no continuous dependence of solutions on the initial data. It is assumed that a solution to the problem exists and is continuously differentiable in a closed domain with exactly given Cauchy data. For this case, using the Carleman function, an explicit regularization formula is proposed. It is assumed that the solution is bounded on a part T of the boundary. The method for obtaining results is based on the construction of constructing a fundamental solution of the Laplace equation in an explicit form, depending on a positive parameter that tends to zero as the parameter tends to infinity on the part of the boundary of the region in which conditional Cauchies are not given.*

Keywords: *Cauchy problem, ill-posed problems, biharmonic equations Carleman function, regularized solutions, regularization, continuation formulas.*

Введение. Пусть $x=(x_1,x_2,x_3)$ и $y=(y_1,y_2,y_3)$ точки вещественного евклидового пространства R^3, G - ограниченная односвязная область в R^3 с границей ∂G, состоящей из компактной части T плоскости $y_3=0$ и гладкого куска поверхности S -Ляпунова, лежащей в полупространстве $y_3>0$. $\bar{G}=G\cup\partial G$, $\partial G=S\cup T$.

В области G рассмотрим бигармонического уравнения

$$\Delta^2 U(y)=0,\ \ y\in G, \tag{1}$$

где $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y_2^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y_3^2}$ оператор Лапласа.

Постановка задачи. Требуется найти бигармоническую функцию $U(y)=U(y_1,y_2,y_3)\in C^4(G)\cap C^3(\bar{G})$, у которого известны значения на части S границы ∂G, т.е.

$$\begin{gathered} U(y_1,y_2,y_3)\big|_S=f_1(y),\ \ \frac{\partial U(y_1,y_2,y_3)}{\partial n}\bigg|_S=f_2(y), \\ \Delta U(y_1,y_2,y_3)\big|_S=f_3(y),\ \ \ \frac{\partial(\Delta U(y_1,y_2,y_3))}{\partial n}\bigg|_S=f_4(y), \end{gathered} \tag{2}$$

где $f_i(y),\ i=1,2,3,4$ - заданные достаточна гладкие функции, $\dfrac{d}{dn}$ - оператор дифференцирования по внешней нормали к ∂G.

Рассматриваемая задача (1) –(2) является некорректным задачам математической физики [6,7, 16]. Ж. Адамар [1] заметил, что решение задачи (1)-(2) неустойчиво.

В 1943 году А.Н. Тихонов [5] указал на практическую важность некорректных задач и возможность устойчивого их решения.

Понятие регуляризирующего алгоритма и связанного с ним понятие регуляризованного семейства приближенных решений и введения положительного параметра σ в зависимости от погрешности исходных данных впервые замечено М.М. Лаврентьевым [8], [9].

Формулы, позволяющие находить решение эллиптического уравнения в случае, когда данные Коши известны лишь на части границы области, получили название формул типа Карлемана. В [2] Карлеман установил формулу, дающую решение уравнений Коши – Римана в области специального вида. Развивая идею Карлемана, Г.М. Голузин и В.И.Крылов [3] вывели формулу для определения значений аналитических функций по данным, известным лишь на участке границы, уже для произвольных областей. Одномерным и многомерным обобщениям формулы Карлемана посвящена монография Л.А.Айзенберга [1].

Матрицу Карлемана для уравнения Коши–Римана в случае, когда S — произвольное множество положительной меры, построено в работе [3].

Функция Карлемана задачи Коши для уравнения Лапласа и близких к ней в случаях, когда $\partial\Omega \setminus S$ — часть поверхности конуса, построена в работе Ш.Я. Ярмухамедова [9,10].

В работе [12,13] с помощью функции Карлемана восстановлено по данными Коши на части границы области не только сама гармоническая функция, но и его производные для уравнения Лапласа в двумерных и трехмерных ограниченных областях, а в работе [14] для бигармонического уравнения.

В данной работе при помощи функции Карлемана предлагается явная формула регуляризации. При этом предполагается, что решение ограничено на части T границы.

Конструкция функции Карлемана. Определим функцию $\Phi_\sigma(x,y)$ [см. 11] следующим равенствам

$$-2\pi^2 e^{\sigma x_3^2}\Phi_\sigma(x,y)=\int_0^\infty \mathrm{Im}\left[\frac{e^{\sigma w^2}}{w-x_3}\right]\frac{udu}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}. \tag{3}$$

Отделяя мнимую часть функции $\Phi_\sigma(x,y)$, имеем

$$\Phi_\sigma(x,y)=\frac{1}{2\pi^2}e^{-\sigma(\alpha^2+x_3^2-y_3^2)}\left[\int_0^\infty \frac{e^{-\sigma u^2}\cos 2\sigma y_3\sqrt{u^2+\alpha^2}udu}{u^2+r^2}-\right.$$
$$\left.-\int_0^\infty \frac{e^{-\sigma u^2}(y_3-x_3)\sin 2\sigma y_3\sqrt{u^2+\alpha^2}}{u^2+r^2}\frac{udu}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}\right], \tag{4}$$

где $\sigma>0,\ \ u\ge 0\ y'=(y_1,y_2),\ x'=(x_1,x_2),\ \ r=|y-x|,\ \alpha=|y'-x'|,$ $w=i\sqrt{u^2+\alpha^2}+y_3$.

В работе [11] доказано, что функция $\Phi_\sigma(x,y)$, определенная равенствами (3) при $\sigma>0$, представима в виде

$$\Phi_\sigma(x,y)=F(r)+G_\sigma(x,y) \tag{5}$$

где $F(r)=\dfrac{1}{4\pi r}$, $G_\sigma(x,y)$-функция гармоническая по y в R^3 включая $y=x$. Отсюда следует, что функция $\Phi_\sigma(x,y)$ для любого $\sigma>0$ по y является фундаментальным решением уравнения Лапласа. Фундаментальное решение $\Phi_\sigma(x,y)$ с указанным свойством называется функцией Карлемана для полупространства [8].

Известно, что если функция Карлемана построена то используя формулу Грина можно написать регуляризованное решение в явном виде. Отсюда вытекает, что эффективность построения функции Карлемана эквивалентно построению регуляризованного решения задача Коши.

Для функции $U(y)=U(y_1,y_2,y_3)\in C^4(G)\cap C^3(\bar{G})$ и любого $x\in G$ справедлива следующая интегральная формула Грина [15].

$$U(x)=\int_{\partial G}\left[U(y)\frac{\partial(\Delta L(x,y))}{\partial n}-\Delta L(x,y)\frac{\partial U(y)}{\partial n}\right]dS_y+$$
$$+\int_{\partial G}\left[\Delta U(y)\frac{\partial L(x,y)}{\partial n}-L(x,y)\frac{\partial(\Delta U(y))}{\partial n}\right]dS_y,\ x\in G \tag{6}$$

где $L(x,y)=r^2\left(\frac{1}{4\pi r}\right)=\frac{r}{4\pi}$ является фундаментальным решением уравнение (1).

Так как $\Phi_\sigma(x,y)$ представлена в виде (5), тогда в интегральное представление (6), $L(x,y)$ заменяя на функции $L_\sigma(x,y)=r^2\Phi_\sigma(x,y)$, имеем

$$\begin{aligned}U(x)=\int_{\partial G}\left[U(y)\frac{\partial\left(\Delta L_\sigma(x,y)\right)}{\partial n}-\Delta L_\sigma(x,y)\frac{\partial U(y)}{\partial n}\right]dS_y+\\+\int_{\partial G}\left[\Delta U(y)\frac{\partial L_\sigma(x,y)}{\partial n}-L_\sigma(x,y)\frac{\partial\left(\Delta U(y)\right)}{\partial n}\right]dS_y,\quad x\in G.\end{aligned}\tag{7}$$

Где

$$L_\sigma(x,y)=r^2\Phi_\sigma(x,y)=r^2\left\{\frac{1}{2\pi^2}e^{-\sigma(\alpha^2+x_3^2-y_3^2)}\left[\int_0^\infty\frac{e^{-\sigma u^2}\cos 2\sigma y_3\sqrt{u^2+\alpha^2}udu}{u^2+r^2}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\int_0^\infty\frac{e^{-\sigma u^2}(y_3-x_3)\sin 2\sigma y_3\sqrt{u^2+\alpha^2}}{u^2+r^2}\frac{udu}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}\right]\right\},$$

$$\frac{\partial L_\sigma(x,y)}{\partial n}=\frac{\partial L_\sigma(x,y)}{\partial y_1}\cos\alpha+\frac{\partial L_\sigma(x,y)}{\partial y_2}\cos\alpha+\frac{\partial L_\sigma(x,y)}{\partial y_3}\cos\gamma$$

и $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$ являются координатами единичной внешней нормали n в точке y границы ∂G. Далее, имеем:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L_\sigma(x,y)}{\partial n}=\left[2(y_1-x_1)\Phi_\sigma(x,y)+r^2\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_1}\right]\cos\alpha+\\+\left[2(y_2-x_3)\Phi_\sigma(x,y)+r^2\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_2}\right]\cos\beta+\\+\left[2(y_3-x_3)\Phi_\sigma(x,y)+r^2\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_3}\right]\cos\gamma;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta L_\sigma(x,y)=\Delta\left(r^2\Phi_\sigma(x,y)\right)=\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\left[r^2\Phi_\sigma(x,y)\right]+\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\left[r^2\Phi_\sigma(x,y)\right]+\\+\frac{\partial^2}{\partial y_3^2}\left[r^2\Phi_\sigma(x,y)\right]=6\Phi_\sigma(x,y)+4(y_1-x_1)\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_1}+\\+4(y_2-x_2)\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_2}+4(y_3-x_3)\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_3};\end{aligned}$$

$$\frac{\partial\left(\Delta L_\sigma(x,y)\right)}{\partial n}=\frac{\partial\left(\Delta L_\sigma(x,y)\right)}{\partial y_1}\cos\alpha+\frac{\partial\left(\Delta L_\sigma(x,y)\right)}{\partial y_2}\cos\beta+\frac{\partial\left(\Delta L_\sigma(x,y)\right)}{\partial y_3}\cos\gamma=$$

$$
=\left[10\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_1}+4(y_1-x_1)\frac{\partial^2\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_1^2}+4(y_2-x_2)\frac{\partial^2\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_1\partial y_2}+\right.
$$

$$
\left.+4(y_3-x_3)\frac{\partial^2\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_1\partial y_3}\right]\cos\alpha+\left[10\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_2}+4(y_1-x_1)\frac{\partial^2\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_1\partial y_2}+\right.
$$

$$
\left.+4(y_2-x_2)\frac{\partial^2\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_2^2}+4(y_3-x_3)\frac{\partial^2\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_2\partial y_3}\right]\cos\beta+
$$

$$
+\left[10\frac{\partial\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_3}+4(y_1-x_1)\frac{\partial^2\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_1\partial y_3}+4(y_3-x_3)\frac{\partial^2\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_3^2}+\right.
$$

$$
\left.+4(y_2-x_2)\frac{\partial^2\Phi_\sigma(x,y)}{\partial y_2\partial y_3}\right]\cos\gamma.
$$

Формула продолжения и регуляризация по М. М. Лаврентьеву. Обозначим

$$
U_\sigma(x)=\int_S\left[f_1(y)\frac{\partial\left(\Delta L_\sigma(x,y)\right)}{\partial n}-f_2(y)\Delta L_\sigma(x,y)\right]dS_y+
$$

$$
+\int_S\left[f_3(y)\frac{\partial L_\sigma(x,y)}{\partial n}-f_4(y)L_\sigma(x,y)\right]dS_y,\ x\in G \tag{8}
$$

Теорема 1. Пусть функция $U(y)=U(y_1,y_2,y_3)\in C^4(G)\cap C^3(\bar G)$ на части S границы удовлетворяет условие (2), и на части T границы ∂G выполнено неравенство

$$
\left|U(y)\right|+\left|\frac{\partial U(y)}{\partial n}\right|+\left|\Delta U(y)\right|+\left|\frac{\partial\Delta Uu(y)}{\partial n}\right|\le M,\ y\in T, M>0\,. \tag{9}
$$

Тогда для любого $x\in G$ и $\sigma>0$ справедливо оценки

$$
\left|U(x)-U_\sigma(x)\right|\le\varphi(\sigma,x_3)Me^{-\sigma x_3^2} \tag{10}
$$

где

$$
\varphi(\sigma,x_3)=\frac{9}{\sigma}+8\sigma+8\sqrt{\pi\sigma}+2\sqrt{\pi}\sigma x_3+8\sigma x_3^2+\frac{5}{2\sigma x_3}+
$$

$$
+12\sqrt{\sigma\pi}x_3+2\sqrt{\sigma\pi}x_3^2+\frac{11\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\sigma}}+46. \tag{11}
$$

Следствие 1. При каждом $x\in G$ справедлива равенство

$$
\lim_{\sigma\to\infty}U_\sigma(x)=U(x)\,.
$$

Обозначим через $\bar G_\varepsilon$ множество

$$
\bar G_\varepsilon=\left\{(x_1,x_2,x_3)\in G,\ a>x_3\ge\varepsilon,\ a=\max_T h(x_1,x_2),\ 0<\varepsilon<a\right\}.
$$

Множество $\bar G_\varepsilon\subset G$ является компактным.

Следствие 2. Если $x\in\bar G_\varepsilon$, то семейство функций $\{U_\sigma(x)\}$ сходится равномерно при $\sigma\to\infty$ т.е.

$$U_\sigma(x) \Rightarrow U(x).$$

Здесь множества $\Pi_\varepsilon = G \setminus \bar{G}_\varepsilon$ служит пограничным слоем данной задачи, как в теории сингулярных возмущений, где нет равномерной сходимости.

Литература

1. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа / Ж. Адамар. -Москва: Наука, 1978. — 352 с.
2. Айзенберг Л.А. Формулы Карлемана в комплексном анализе / Л.А. Айзенберг. –Новосибирск: Наука, 1990. -247 с.
3. Айзенберг Л.А. Абстрактная формула Карлемана / Л.А. Айзенберг, Н.Н.Тарханов. // *ДАН СССР. – 1988*. – Т.*298*. –. №*6*. – С. *1292–1296*.
4. Carleman T. Les Functions quasi analytiques / T. Carleman. –Paris: Gauthier- Villar, 1926. -116 p.
5. Тихонов А.Н. Об устойчивости обратных задач / А.Н. Тихонов. //ДАН СССР. 1943. -Том 39. №5. С. 147-160.
6. ТихоновА.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин.- Москва: Наука, 1995. -288 с.
7. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. - Москва: Наука, 1974. -735 с.
8. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики / М.М. Лаврентьев. – Новосибирск: Изд. СО АН СССР, 1962. - 92 с.
9. Лаврентьев М.М. О Задача Коши для уравнения Лапласа / М.М. Лаврентьев. //Изв. АН СССР. Сер. матем. 1956. -Том 20. № 6. С. 819-842.
10. Ярмухамедов Ш. О гармоническом продолжении дифференцируемых функций, заданных на куске границы / Ш. Ярмухамедов. // Сибирский математический журнал, 2002. -Том 43. № 1. С. 228-239.
11. Ярмухамедов Ш. Представление гармонической функции в виде потенциалов и задача Коши / Ш. Ярмухамедов. // Математические заметки, 2008. -Том 83, выпуск 5. С. 763-778.
12. Хасанов А.Б. О задаче Коши для уравнения Лапласа / А.Б. Хасанов, Ф.Р. Турсунов // Уфимский математический журнал. 2019. Том 11. №4. С. 92-106.
13. Хасанов А.Б. Задача Коши для трехмерного уравнения Лапласа / А.Б. Хасанов, Ф.Р. Турсунов // Известия высших учебных заведений. Математика, 2021. №2. С. 56-73.
14. **Shodiyev** D**. On the Cauchy Problem for the Biharmonic Equation / D. Shodiyev //** Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics, 2022. 15(2) С.199–213.
15. Векуа И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений / И.Н Векуа. – Ленинград, ОГИЗ Государственное издательство техники – теоретической литературы, 1948. -296.
16. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи / С.И. Кабанихин. - Новосибирск: Сибирские научное издательство, 2009. - 457с.