УДК 517.957
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_1(4)_41

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА С ИСТОЧНИКОМ ИНТЕГРАЛЬНОГО ТИПА В КЛАССЕ БЫССТРОУБЫВАЮЩИХ ФУНКЦИЙ

Хасанов Темур Гафуржонович, аспирант
temur.xasanov.2018@mail.ru
Ургенчский государственный университет
Ургенч, Узбекистан.

Аннотация. *Метод обратной спектральной задачи применяется для интегрирования уравнения Кортевега-де Фриза с нагруженными членами и самосогласованным источником интегрального типа в классе быстроубывающих функций. Выводится эволюция данных рассеяния оператора Штурма-Лиувилля, коэффициент которого является решением уравнения Кортевега-де Фриза с нагруженными членами и самосогласованным источником интегрального типа в классе быстроубывающих функций.*

Ключевые слова. *Нагруженное уравнение Кортевега-де Фриза, оператор Штурма- Лиувилля, решения Йоста, интегральное уравнение Гельфанда- Левитана- Марченко*.

ALGORITHM FOR SOLVING THE CAUCHY PROBLEM FOR THE LOADED KORTEWEG-DE VRIES EQUATION WITH AN INTEGRAL TYPE SOURCE IN THE CLASS OF RAPIDLY DECREASING FUNCTIONS

Khasanov Temur Gafurjonovich, PhD student
temur.xasanov.2018@mail.ru
Urgench State University
Urgench (Uzbekistan).

Abstract. *The method of the inverse spectral problem is used to integrate the Korteweg-de Vries equation with loaded terms and a self-consistent source of integral type in the class of rapidly decreasing functions. The evolution of the scattering data of the Sturm-Liouville operator is derived, whose coefficient is a solution of the Korteweg-de Vries equation with loaded terms and a self-consistent source of integral type in the class of rapidly decreasing functions.*

Keywords*. Loaded Korteweg-de Vries equation, Sturm-Liouville operator, Jost solutions, integral equation Gelfand-Levitan-Marchenko.*

В данной работе рассматривается система нелинейных нагруженных уравнений вида:

$$u_t + \beta(t)u(x_0,t)\left(u_{xxx} - 6uu_x\right) + \gamma(t)u(x_1,t)u_x = 2\frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{\infty}\xi_m\varphi(x,\eta,t)\varphi(x,-\eta,t)d\eta \tag{1}$$

$$L(t)\varphi = \eta^2\varphi \tag{2}$$

где

$$u = u(x,t), \quad L(t) = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x,t)$$

и $\beta(t)$ и $\gamma(t)$- заданные непрерывно дифференцируемые функции, а $x_0, x_1 \in R$, ξ_m, $m = 1,2,...,N$ заданное вещественные число. Система нелинейных уравнений (1)-(2) рассматривается при начальном условии.

$$u(x,0) = u_0(x), \; x \in R \tag{3}$$

где начальная функция $u_0(x)$ обладают следующим свойствами:

1)

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)|u_0(x)|\,dx < \infty; \tag{4}$$

2) оператор $L(0) := -\frac{d^2}{dx^2} + u_0(x), \; x \in R$ имеет ровно N отрицательных собственных значений $\lambda_1(0), \lambda_2(0), ..., \lambda_N(0)$.

В рассматриваемой задаче функция $\varphi(x,\eta,t)$ – решение уравнения (2), определяемое асимптотикой

$$\varphi(x,\eta,t) = h(\eta,t)e^{-i\eta x}, \quad \text{при} \quad x \to \infty, \tag{5}$$

где $h(\eta,t)$ – изначально заданная непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\eta,t)h(-\eta,t)\,d\eta < \infty \tag{6}$$

при всех неотрицательных значения t.

Пусть функции $u(x,t)$ и $\varphi(x,\eta,t)$ обладает достаточной гладкостью и достаточно быстро стремится к своими пределами при $x \to \pm\infty$, так что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[(1+|x|)|u(x,t)| + \sum_{j=1}^{3} \left| \frac{\partial^j u(x,t)}{\partial x^3} \right| \right] dx < \infty, \quad t > 0, \tag{7}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(|\varphi(x,\eta,t)|^2 + |\varphi(x,-\eta,t)|^2 + \left| \frac{\partial \varphi(x,\eta,t)}{\partial \eta} \right|^2 \right) d\eta < \infty. \tag{8}$$

Основная цель данной работы- получить представления для решения $u(x,t)$, $\varphi(x,\eta,t)$ задачи (1)-(8) в рамках метода обратной задачи рассеяния для оператора $L(t)$.

Лемма 1. Пусть функции $y(x,\lambda)$ и $z(x,\mu)$ соответственно являются решениями

$$Ly(x,\lambda) = \lambda y(x,\lambda), \quad Lz(x,\mu) = \mu z(x,\lambda).$$

Тогда справедливо равенство:

$$\frac{d}{dx} W\{y(x,\lambda), z(x,\mu)\} = (\lambda - \mu) y(x,\lambda) z(x,\mu).$$

Доказательство данной леммы исходит из простых расчетов.

Справедливо следующая теорема.

Теорема 1. Задание данных рассеяния однозначно определяет потенциал $u_0(x)$.

Лемма 2. Справедливы следующие тождества:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g^2(s,k,t)u_s(s,t)ds = 4k^2 a(k,t)b(-k,t) \tag{9}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g^2(x,k,t)\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi(x,\eta)\varphi(x,-\eta)\right)dx = -\frac{2a(k,t)b(-k,t)\left|h(\eta,t)\right|^2 k^2}{k^2-\eta^2} \tag{10}$$

Лемма 3. Если G определяется равенством (20), то справедливы следующие тождества

$$\int_{-\infty}^{\infty} Gg_n^2 dx = 0,\ n = 1,2,...,N. \tag{11}$$

Доказательство. Для доказательства (36), сперва запишем его в следующем виде,

$$\int_{-\infty}^{\infty} Gg_n^2 dx = -\int_{-\infty}^{\infty} Q(u(x_1,t))u_x g_n^2 dx + 2\int_{-\infty}^{\infty} g_n^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,\eta,t)\varphi(x,-\eta,t)d\eta dx. \tag{12}$$

Сперва вычислим первой интеграл провой части этого равенство:

$$-Q(u(x_1,t))\int_{-\infty}^{\infty} u_x g_n^2 dx = -Q(u(x_1,t))ug_n^2\Big|_{-\infty}^{\infty} + Q(u(x_1,t))\int_{-\infty}^{\infty} 2ug_n g_n' dx =$$

$$= 2Q(u(x_1,t))\int_{-\infty}^{\infty} ug_n g_n' dx.$$

Отсюда, используя тождество $L_n(t)g_n \equiv -g_n'' + ug_n = k_n^2 g_n$, имеем

$$2Q(u(x_1,t))\int_{-\infty}^{\infty} (k_n{}^2 g_n + g_n'')g_n' dx = 2Q(u(x_1,t))\int_{-\infty}^{\infty} \left(k_n^2 g_n g_g' + g_n'' g_n'\right)dx.$$

Интегрируя полученное выражение, имеем следующее:

$$2Q(u(x_1,t))\int_{-\infty}^{\infty} \left(k_n^2 g_n g_g' + g_n'' g_n'\right)dx = Q(u(x_1,t))k_n^2 g_n^2\Big|_{-\infty}^{\infty} - Q(u(x_1,t))g_n'^2\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0.$$

Теперь изучим второй интеграл правой части (37):

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_n^2 \frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,\eta,t)\varphi(x,-\eta,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\varphi(x,\eta)g_n W\left\{g_n,\varphi(x,-\eta)\right\} + \right.$$

$$\left. \varphi(x,-\eta)g_n W\left\{g_n,\varphi(x,\eta)\right\}\right]dx =$$

$$= \frac{1}{\lambda_n - \eta^2} W\left\{g_n,\varphi(x,\eta)\right\} W\left\{g_n,\varphi(x,-\eta)\right\}\Bigg|_{-\infty}^{\infty} = 0,$$

поэтому

$$\frac{d\lambda_n}{dt} = 0.$$

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 2. Если функции $u(x,t),\ \varphi(x,\eta,t),\ m=\overline{1,N},\ x\in R,\ t>0$ является решением задачи (1)-(8), то данные рассеяния $\left\{r^{+}(k,t),\lambda_n(t),B_n(t),\ n=\overline{1,N}\right\}$ оператора $L(t)$ с потенциалом $u(x,t)$, удовлетворить следующим дифференциальным уравнениям

$$\frac{d\lambda_j(t)}{dt}=0$$

$$\frac{dr^{+}(k,t)}{dt}=\left(8ik^3\beta(t)u(x_0,t)-2ik\gamma(t)u(x_1,t)-2i\xi_n V.p.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|h(\eta)|^2}{\eta-k}d\eta-2\pi|h(k)|^2\right)r^{+}(k,t)$$

$$\frac{dB_n(t)}{dt}=\left(8\chi_n^3\beta(t)u(x_0,t)+2\chi_n\gamma(t)u(x_1,t)-\frac{\chi_n\xi_n}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|h(\eta)|^2}{\eta^2+\chi_n^2}d\eta\right)B_n(t),\ \ n=1,2,3,...,N$$

Замечание. Полученные соотношения полностью определяют эволюцию данных рассеяния для оператора $L(t)$ и тем самым дают возможность применить метод обратной задачи рассеяния для решения задачи (1)-(8).

Пусть задана функция $u_0(x)\left(1+|x|\right)\in L^1(R)$. Тогда решение задачи (1)-(8) находится с помощью следующего алгоритма.

- Решаем прямую задачу рассеяния с начальной функцией $u_0(x)$ получаем данные рассеяния $\left\{r^{+}(k),\chi_n,B_n,n=\overline{1,N}\right\}$ для оператора $L(0)$.
- Используя теорему 2, находим данные рассеяния для $t>0$
$$\left\{r^{+}(k,t),\chi_n(t),B_n(t),n=\overline{1,N}\right\}.$$
- Используя метод, опирающийся на интегрального уравнения Гельфанда-Левитана-Марченко, решаем обратную задачу рассеяния, т.е. находим $u(x,t)$ из данных рассеяния для $t>0$, полученных на предыдущем шаге. После этого легко найти решение $\varphi(x,\eta,t)$ уравнения

$$L(t)\varphi_m(x,\eta,t):=-\varphi_m''(x,\eta,t)+u(x,t)\varphi_m(x,\eta,t)=\lambda_m\varphi_m(x,\eta,t),\ m=1,2,...,N\ .$$

Литература

1. Хасанов А.Б., Хасанов Т.Г. Задача Коши для уравнения Кортевега-де Фриза в классе периодических бесконечнозонных функций. Записки научных семинаров ПОМИ. т. 506, стр. 258-278 (2021).
2. Hasanov A.B., Hoitmetov U.A. On integration of the loaded Korteweg-de Vries equation in the class of rapidly decreasing functions. Proceeding of the Institute of Math. And Mechan. National academy of sciences of Azerbaijan. Vol., 47, №2, 2021, p. 250-261.
3. Хоитметов У.А. Интегрирование нагруженного уравнения КдФ с самосогласованным источником интегрального типа в классе быстроубывающих комплекснозначных функций. Математические труды. .т. 24, №2, стр. 181-198 (2021).
4. Хасанов А.Б., Хасанов Т.Г. Интегрирование нелинейного уравнения Кортевега-де Фриза с нагруженным членом и источником. *Сиб. журн. индустр. матем.*, 2022**, 25**:2, 127–142
5. M.S.Osman, K.U.Tariq, A.Bekir, A.Elmoasry, N.S.Elazab, M.Younis, M.Abdel-Aty. Investigtion of soliton solutions with different wave structures to the (2+1)-dimensional Heisenberg ferromagnetic spin chain equation. Commun. in Theory. Phys., 72:3, (2020), 035002.
6. D.Lu, K.U.Tariq, M.S.Osman, D.Baleanu, M.Younis, M.M.A.Khater. New analytical wave structures for the (3+1)-dimensional Kadomtsev-Petviashvili and the generalized Boussinesq models and their applications. Results Phys., 14, (2019), 102491.