УДК 517.954
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_1(4)_40

О ПОСТРОЕНИИ РЕШЕНИЯ ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Умаров Рахматилла Акрамович, аспирант,
r.umarov1975@mail.ru
Наманганский инженерно-строительный институт,
Наманган, Узбекистан

***Аннотация**: В работе для неоднородного уравнения третьего порядка с младшими членами рассмотрена вторая краевая задача в прямоугольной области. Единственность решение поставленной задачи доказана методом интегралов энергии. Используя метод разделения переменных решение задачи ищется в виде произведения двух функций X(x) и Y(y). Для определения X(x) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка с тремя граничными условиями, а для Y(y) – обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с двумя граничными условиями. Методом функции Грина построены решения указанных задач. Получены оценки резольвенты и функции Грина. При обосновании равномерной сходимости решения используется отличность от нуля «малого знаменателя».*

***Ключевые слова:** уравнения с кратными характеристиками третьего порядка, вторая краевая задача, переменный коэффициент, функция Грина, интегральное уравнения Фредгольма второго рода.*

CONSTRUCTION OF A SOLUTION TO THE SECOND BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A THIRD ORDER EQUATION WITH VARIABLE COEFFICIENTS

Umarov Rakhmatilla Akramovich, graduate student
r.umarov1975@mail.ru
Namangan Engineering-Construction Institute,
Namangan, Uzbekistan

***Abstract:** In this paper, for an inhomogeneous third-order equation with lower terms, the second boundary value problem in a rectangular domain is considered. The uniqueness of the solution of the formulated problem is proved by the method of energy integrals. Using the method of separation of variables, the solution of the problem is sought as a product of two functions X(x) and Y(y). To determine X(x), we obtain a third-order ordinary differential equation with three boundary conditions, and for Y(y), we obtain a second-order ordinary differential equation with two boundary conditions. The Green's function method is used to construct solutions to these problems. Estimates for the resolvent and Green's function are obtained. When justifying the uniform convergence of the solution, the non-zero "small denominator" is used.*

***Keywords:** equations with multiple characteristics of the third order, second boundary value problem, variable coefficient, Green's function, Fredholm integral equation of the second kind.*

1. **Введение.** Дифференциальные уравнения в частных производных третьего порядка рассматриваются при решении задач теории нелинейной акустики и в гидродинамической теории космической плазмы, фильтрации жидкости в пористых средах. Дифференциальные уравнения в частных производных третьего порядка изучаются многими авторами (см., например, [1-11]).

В совокупности, всех уравнений третьего порядка особое место по специфическому характеру занимают, уравнения с кратными характеристиками.

В работе [12], учитывая свойства вязкости и теплопроводности газа, из системы Навье-Стокса было получено уравнение третьего порядка с кратными характеристиками, содержащее вторую производную по времени

$$u_{xxx}+u_{yy}-\frac{\nu}{y}u_y=u_xu_{xx},\quad \nu=const.$$

Это уравнение при $\nu=1$ описывает осесимметричный поток, а при $\nu=0$ описывает плоско - параллельный поток [13].

В работах [14-18], рассмотрены краевые задачи для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками, при помощи построения функции Грина. В работе [19] было найдена решения уравнение третьего порядка с постоянными коэффициентами и с другими краевыми условиями.

2. **Постановка задачи.** В области $D=\{(x,y):\ 0<x<p, 0<y<q\}$ рассмотрим следующее уравнение третьего порядка в вида

$$L(u)=U_{xxx}-U_{yy}+A_1(x)U_{xx}+A_2(x)U_x+A_3(x)U+A_4U_y=g_1(x,y),\qquad (1)$$

где $p,q,A_4\in R,$ $A_i(x), i=\overline{1,3},$ $g_1(x,y)$ заданные достаточно гладкие функции в $\bar{D}$.

Заменой

$$U(x,y)=\exp\left(-\frac{1}{3}\int_0^x A_1(\xi)d\xi+\frac{A_4}{2}y\right)u(x,y),$$

уравнение (1) можно привести к виду

$$u_{xxx}-u_{yy}+a_1(x)u_x+a_2(x)u=g(x,y).\qquad (2)$$

Задача B_2. Найти функцию $u(x,y)$ из класса $C^{3,2}_{x,y}(D)\cap C^{2,1}_{x,y}(\bar{D})$, удовлетворяющую уравнению (2) и следующим краевым условиям:

$$u_y(x,0)=0,\quad u_y(x,q)=0,\quad 0\le x\le p,\qquad (3)$$

$$u(0,y)=\psi_1(y),\quad u_x(\mathrm{p},y)=\psi_2(y),\quad u_{xx}(p,y)=\psi_3(y),\quad 0\le y\le q,\qquad (4)$$

где $\psi_i(y), i=\overline{1,3}$, $g(x,y)$ заданные функции.

3. **Единственности решения.**

Теорема 1. Если задача B_2 имеет решение, то при выполнении условий $a_1(x)\ge 0,$ $a_2(x)-\frac{1}{2}a_1'(x)\ge 0$, оно единственно.

Доказательство. Предположим, обратное. Пусть задача B_2 имеет два решения $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$. Тогда функция $u(x,y)=u_1(x,y)-u_2(x,y)$ удовлетворяет однородному уравнению (2) с однородными краевыми условиями. Докажем, что $u(x,y)\equiv 0$ в $\bar{D}$.

В области D справедливо тождество

$$uL[u]=uu_{xxx}-uu_{yy}+a_1(x)uu_x+a_2(x)u^2=0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(uu_{xx}-\frac{1}{2}u_x^2+\frac{1}{2}a_1(x)u^2\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(uu_y\right)+u_y^2+\left(a_2(x)-\frac{1}{2}a_1'(x)\right)u^2=0.$$

Интегрируя это тождество по области D и учитывая однородные краевые условия, получим

$$\frac{1}{2}\int_0^q a_1(x)u^2(p,y)dy+\frac{1}{2}\int_0^q u_x^2(0,y)dy+\iint_D u_y^2dxdy+\iint_D\left(a_2(x)-\frac{1}{2}a_1'(x)\right)u^2dxdy=0.$$

Из третьего слагаемого $u_y(x,y)=0$. Отсюда $u(x,y)=f(x)$. Поставляя в уравнения (2), имеем $f'''(x)=0$. Тогда $f(x)=C_1\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3$. Учитывая краевые условие (4) получим $f(x)=0$, тогда $u(x,y)\equiv 0$. Теорема доказана.

4. **Существование решения.**

Теорема 2. Если выполняются следующие условия:

1) $\psi_i(y)\in C^3[0,q],\ i=\overline{1,3}$;

2) $\frac{\partial^3 g(x,y)}{\partial x\partial y^2}\in C\left[\bar{D}\right],\ 0\le x\le p;\quad g(x,0)=g(x,q)=0$

3) $C<\min\left\{\frac{2}{3p^3+2p^2},\frac{\lambda_1^2}{Kp(1+\lambda_1)}\right\}$,

4) $a_1(p)=0$,

то решение задачи B_2 существует. Здесь $\lambda_1=\sqrt[3]{\left(\frac{\pi}{q}\right)^2}$,

$C=\max\left\{\left|a_1(x)\right|,\left|a_1'(x)-a_2(x)\right|,x\in[0,p]\right\}$, $K=\frac{4}{3}\left(1-\exp\left(-\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}\right)\right)^{-1}$.

Доказательство. Рассмотрим следующую задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases}Y''(y)+\lambda^3Y(y)=0,\\ Y'(0)=Y'(q)=0.\end{cases}\tag{5}$$

Известно, что нетривиальное решение задачи (6), существует только при

$$\lambda_0^{\ 3}=0 \text{ и } \lambda_n^{\ 3}=\left(\frac{\pi n}{q}\right)^2,\ n=1,2,3,...$$

Эти числа являются собственные значения задачи (5), а соответствующие ими собственные функции имеют вид:

$$Y_n(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{q}}, & n=0,\\ \sqrt{\frac{2}{q}}\cos\left(\frac{\pi n}{q}y\right), & n\in N.\end{cases}$$

Разложим $g(x,y)$ в ряд Фурье по $\{Y_n(y)\}$:

$$g(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}g_n(x)Y_n(y),$$

где $g_n(x)=\sqrt{\frac{2}{q}}\int\limits_0^q g(x,\eta)\cos\left(\frac{\pi n}{q}\eta\right)d\eta$.

Решение задачи B_2 ищем в виде

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)\cos\left(\frac{\pi n}{q}y\right). \tag{7}$$

(7) поставляя в уравнение (2) получим следующую задачу:

$$\begin{cases} X_n'''+a_1(x)X_n'+a_2(x)X_n+\lambda_n^3X_n=g_n(x), \\ X_n(0)=\psi_{1n},\ X_n'(p)=\psi_{2n},\ X_n''(p)=\psi_{3n}, \end{cases} \tag{8}$$

где $\psi_{in}=\sqrt{\frac{2}{q}}\int\limits_0^q \psi_i(\eta)\cos\left(\frac{\pi n}{q}\eta\right)d\eta,\ i=\overline{1,3}$.

С помощью

$$V_n(x)=X_n(x)-\rho_n(x) \tag{9}$$

функции изменим граничные условия в однородные, где

$$\rho_n(x)=\psi_{1n}+\psi_{2n}x+\left(\frac{1}{2}x^2-px\right)\psi_{3n}. \tag{10}$$

Подставляя (10), (9) в (8) получим задачу

$$\begin{cases} V'''+\lambda_n^3V=\lambda_n^3f_n(x)-a_1V'-a_2V, \\ V(0)=V'(p)=V''(p)=0, \end{cases} \tag{11}$$

здесь

$$f_n(x)=-\left(\frac{a_2(x)}{\lambda_n^3}+1\right)\psi_{1n}-\left(\frac{xa_2(x)+a_1(x)}{\lambda_n^3}+x\right)\psi_{2n}-$$
$$-\left(\frac{xa_1(x)-pa_1(x)-xa_2(x)p}{\lambda_n^3}+\frac{a_2(x)}{\lambda_n^3}x^2+\frac{1}{2}x^2-px\right)\psi_{3n}+\frac{g_n(x)}{\lambda_n^3}$$

Задача (11) для $\lambda_0=0$ имеет вид:

$$\begin{cases} V_0'''=f_0(x)-a_1(x)V_0'-a_2(x)V_0, \\ V_0(0)=V_0'(p)=V_0''(p)=0, \end{cases} \tag{12}$$

здесь

$$f_0(x)=g_0(x)-\psi_{10}a_2(x)+\left(-a_1(x)-xa_2(x)\right)\psi_{20}+$$
$$+\left(-xa_1(x)+pa_1(x)-\frac{1}{2}x^2a_2(x)+pxa_2(x)\right)\psi_{20}.$$

Решения задачи (12) имеет вид

$$V_0(x)=\int\limits_0^p G_n(x,\xi)f_n(\xi)d\xi-\int\limits_0^p a_1(\xi)G_0(x,\xi)V_0'(\xi)d\xi-$$
$$-\int\limits_0^p a_2(\xi)G_0(x,\xi)V_0(\xi)d\xi, \tag{13}$$

здесь $G_0\left(x,\xi\right)$ функция Грина для задачи (12), которая обладает следующими свойствами:

$$\frac{\partial^3 G_0\left(x,\xi\right)}{\partial x^3}=0,$$

$$G_{10}\left(0,\xi\right)=G_{20x}\left(p,\xi\right)=G_{20xx}\left(p,\xi\right)=0,$$

$$G_{20}\left(\xi,\xi\right)-G_{10}\left(\xi,\xi\right)=0;$$

$$G_{20x}\left(\xi,\xi\right)-G_{10x}\left(\xi,\xi\right)=0;$$

$$G_{20xx}\left(\xi,\xi\right)-G_{10xx}\left(\xi,\xi\right)=1;$$

и имеет вид

$$G_0\left(x,\xi\right)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}x^2+\xi x,\ \text{при}\ 0\le x\le\xi,\\ \dfrac{1}{2}\xi^2,\ \text{при}\ \xi\le x\le p.\end{cases}$$

Интегрируя по частям второй интеграл в (13), имеем,

$$V_0\left(x\right)=\int_0^p G_n\left(x,\xi\right)f_n\left(\xi\right)d\xi+ \tag{14}$$
$$+\int_0^p\left(\left(a_1'\left(\xi\right)-a_2\left(\xi\right)\right)G_0\left(x,\xi\right)+a_1\left(\xi\right)G_{0\xi}\left(x,\xi\right)\right)V_0\left(\xi\right)d\xi.$$

Если вводём обозначения

$$\alpha_0\left(x\right)=\int_0^p G_0\left(x,\xi\right)\,f_0\left(\xi\right)d\xi,$$

$$\bar{G}_0\left(x,\xi\right)=\left(a_1'\left(\xi\right)-a_2\left(\xi\right)\right)G_0\left(x,\xi\right)+a_1\left(\xi\right)G_{0\xi}\left(x,\xi\right)$$

тогда (14) имеет вид,

$$V_0\left(x\right)=\alpha_0\left(x\right)+\int_0^p\bar{G}_0\left(x,\xi\right)V_0\left(\xi\right)d\xi\,, \tag{15}$$

(15) является интегральным уравнением Фредгольма второго рода. Решаем (15) методом итерации и получим решения в виде

$$V_0\left(x\right)=\alpha_0\left(x\right)+\int_0^p R_0\left(x,\xi\right)\alpha_0\left(\xi\right)d\xi.$$

Решение задачи (11) ищем следующим образом:

$$V_n\left(x\right)=\lambda_n^3\int_0^p G_n\left(x,\xi\right)f_n\left(\xi\right)d\xi-\int_0^p G_n\left(x,\xi\right)a_1\left(\xi\right)V_n'\left(\xi\right)d\xi- \tag{16}$$
$$-\int_0^p G_n\left(x,\xi\right)a_2\left(\xi\right)V_n\left(\xi\right)d\xi,$$

где $G_n\left(x,\xi\right)$ функция Грина задачи (11), которая обладает следующими свойствами:

$$\frac{\partial^3 G_n\left(x,\xi\right)}{\partial x^3}+\lambda_n^3 G_n\left(x,\xi\right)=0$$

$$G_{1n}\left(0,\xi\right)=G_{2nx}\left(p,\xi\right)=G_{2nxx}\left(p,\xi\right)=0$$

$$G_{2n}(\xi,\xi)-G_{1n}(\xi,\xi)=0;$$
$$G_{2nx}(\xi,\xi)-G_{1nx}(\xi,\xi)=0;$$
$$G_{2nxx}(\xi,\xi)-G_{1nxx}(\xi,\xi)=1,$$

и имеет вид:

$$G_n(x,\xi)=\begin{cases}G_{1n}(x,\xi),0\le x<\xi,\\ G_{2n}(x,\xi),\xi<x\le p.\end{cases}$$

здесь

$$G_{1n}(x,\xi)=\frac{1}{\sqrt{3}\lambda_n^2\Delta}\left(-e^{\lambda_n\left(p-x-\frac{\xi}{2}\right)}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n\xi+\frac{\pi}{6}\right)-e^{\lambda_n\left(\xi-x-\frac{p}{2}\right)}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n p\right)+\right.$$
$$+e^{\lambda_n\left(\xi+\frac{x}{2}-\frac{p}{2}\right)}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n(x-p)\right)+e^{\lambda_n\left(p+\frac{x}{2}-\frac{\xi}{2}\right)}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n(\xi-x)+\frac{\pi}{6}\right)-$$
$$\left.2e^{-\lambda_n\left(\frac{\xi}{2}+\frac{p}{2}-\frac{x}{2}\right)}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n x\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n(\xi-p)+\frac{\pi}{6}\right)\right),$$

$$G_{2n}(x,\xi)=\frac{1}{\sqrt{3}\lambda_n^2\Delta}\left(1-2e^{-\frac{3\lambda_n}{2}\xi}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n\xi+\frac{\pi}{6}\right)\right)\cdot$$
$$\left(\frac{1}{2}e^{\lambda_n(\xi+p-x)}+e^{\lambda_n\left(\xi-\frac{p}{2}+\frac{x}{2}\right)}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n(x-p)\right)\right),$$

$$\Delta=\frac{\sqrt{3}}{2}e^{\lambda_n p}\left(1+2e^{-\frac{3\lambda_n}{2}p}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_n p\right)\right).$$

Интегрируем по частям второй интеграл в (16), и учитывая условия теоремы имеем

$$V_n(x)=\lambda_n^3\int_0^p G_n(x,\xi)f_n(\xi)d\xi+$$
$$+\int_0^p\left(G_{n\xi}(x,\xi)a_1(\xi)+G_n(x,\xi)\left(a_1'(\xi)-a_2(\xi)\right)\right)V_n(\xi)d\xi. \quad (17)$$

Для удобства введём обозначения

$$V_{0n}(x)=\lambda_n^3\int_0^p G_n(x,\xi)f_n(\xi)d\xi,$$

$$\bar{G}_n(x,\xi)=G_{n\xi}(x,\xi)a_1(\xi)+G_n(x,\xi)\left(a_1'(\xi)-a_2(\xi)\right),$$

тогда (17) примет вид

$$V_n(x)=V_{0n}(x)+\int_0^p\bar{G}_n(x,\xi)V_n(\xi)d\xi. \quad (18)$$

Уравнение (18) является интегральным уравнением Фредгольма второго рода. Запишем решение (18) с помощью резольвенты в виде

$$V_n(x)=V_{0n}(x)+\int_0^p R_n(x,\xi)V_{0n}(\xi)d\xi$$

где

$$R_n(x,\xi)=\bar{G}_n(x,\xi)+\sum_{m=1}^{\infty}\bar{G}_{mn}(x,\xi),$$

$$\bar{G}_{mn}(x,\xi)=\int_0^p \bar{G}_n(x,s)\bar{G}_{(m-1)n}(s,\xi)ds,\ m=1,2,\dots,\quad \bar{G}_{0n}(x,\xi)=\bar{G}_n(x,s).$$

В силу (7) и (9) решение задачи B_2 имеет вид

$$u(x,y)=\left(\int_0^p G_0(x,\xi)\,f_0(\xi)d\xi+\int_0^p R_0(x,\xi)\int_0^p G_0(x,\xi)\,f_0(\xi)d\xi d\xi+\rho_0(x)\right)Y_0(y)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda_n^3\int_0^p G_n(x,\xi)f_n(\xi)d\xi+\lambda_n^3\int_0^p R_n(x,\xi)\int_0^p G_n(x,\xi)f_n(\xi)d\xi d\xi+\rho_n(x)\right)Y_n(y).$$

Доказана, что решение $u(x,y)$ и его частные производные u_{xxx}, u_{yy} сходятся абсолютно и равномерно. Таким образом, доказана теорема 2.

Литература

1. Abdullaev O.K. and Matchanova A.A., On a problem for the third order equation with parabolic-hyperbolic operator including a fractional derivative, // Lobachevskii J. Math. 43, 275–283 (2022).

2. Андреев А.А., Яковлева Ю.О. Характеристическая задача для системы гиперболических дифференциальных уравнений третьего порядка общего вида с некратными характеристиками // Вестн. Самар. тех. ун-та, сер.: Физ.-мат. науки 30, 31–36 (2013).

3. Зикиров О.С. О задаче Дирихле для гиперболических уравнений третьего порядка // Рус. мат. Т. 58 (7). С. 53–60 (2014).

4. Репин О.А., Кумыкова С. К. Задача со сдвигом для уравнения третьего порядка с разрывными коэффициентами // Вестн. Самар. тех. ун-та, сер.: Физ.-мат. науки 29 (4), 17–25 (2012).

5. Сабитов К.Б. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа третьего порядка в прямоугольной области // Дифферен. урав. 47, 706–714 (2011).

6. Сопуев А., Аркабаев Н.К. Задачи сопряжения для линейных псевдопараболических уравнений третьего порядка // Вестн. Томск. ун-та, мат. мех. 21 (1), 16–23 (2013).

7. Шхануков М.Х. О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах // Дифференц. уравн. 18, 689–699 (1982).

8. Юлдашев Т.К. Обратная задача для одного интегро - дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных третьего порядка // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, - Самара, 2014. - № 1(34). - С.56-65.

9. Юлдашев Т.К. Об интегро-дифференциальном уравнении Фредгольма в частных производных третьего порядка // Рус. мат. 59 (9), 62–66 (2015).

10. Yuldashev T.K., Apakov Yu.P., and Zhuraev A.Kh., Boundary value problem for third order partial integrodifferential equation with a degenerate kernel //Lobachevskii J. Math. 42, 1317–1327 (2021).

11. Yuldashev T.K., Islomov B.I., and Alikulov E.K., Boundary-value problems for loaded third-order parabolichyperbolic equations in infinite three-dimensional domains //Lobachevskii J. Math. 41, 926–944 (2020).

12. Рыжов О.С. Асимптотическая картина обтекания тел вращения со звуковым потоком вязкого и теплопроводящего газа // Прикл. Матем. и механ., - Москва, 1965. - Т. 29. Вып. 6. - С. 1004-1014.

13. Диесперов В.Н. О функции Грина линеаризованного вязкого трансзвукового уравнения // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. - Москва, 1972. - Т. 12. - № 5. - С. 1265-1279.

14. Apakov Y.P., Rutkauskas S. On a boundary problem to third order PDE with multiple characteristics // Nonlinear Analysis: Modeling and Control. -Vilnius, 2011. - Vol. 16. -№ 3. - pp. 255-269.

15. Апаков Ю.П. О решении краевой задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Украинский математический журнал. -Киев. 2012. Т.64. № 1. С. 1-11.

16. Апаков Ю.П., Жураев А.Х. О решении краевой задачи для уравнения третьего порядка с помощью функции Грина // Узбекский математический журнал. 2011, №3, - С.36-42.

17. Yuldashev T.K., Apakov Y.P., Zhuraev A.Kh. Boundary value problem for third order partial integro-differential equation with a degenerate kernel //Lobachevski Journal of Mathematics.2021 Vol, 42, № 6, -pp. 1316-1326.

18. Иргашев Б. Ю. Краевая задача для одного вырождающего уравнения высокого порядка с младшими членами //Bulletin of the Institute of Mathematics. – 2019. – №. 6. – С. 23-29.

19. Apakov Y. P., Umarov R. A. Solution of the Boundary Value Problem for a Third Order Equation with Little Terms. Construction of the Green's Function //Lobachevskii Journal of Mathematics, 43:3 (2022), 738–748.