УДК 517.946
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_1(4)_39

ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ТРЕХМЕРНОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Турсунов Фарход Рузикулович, д.фил.-по ф.-м.н., доцент
farhod.tursunov.76@mail.ru
Рузикулов Фаридун Фарходович, студент
faridunruzikulov2211@gmail.com
Норимов Азизжон Комилович, магистр
aziznoimov46gmail.com
Самаркандский государственный университет имени Шарофа Рашидова
Самарканд, Узбекистан

Аннотация: *В статье изучается задача продолжения решения линейных систем эллиптического типа первого порядка с постоянными коэффициентами в области G по ее известным значениям на гладкой части S границы ∂G, т. е. изучается задача Коши для решения линейных систем уравнений эллиптического типа первого порядка с постоянными коэффициентами. Рассматриваемая задача относится к некорректным задачам математической физики, т.к. отсутствует непрерывная зависимость решения от начальных данных. Предполагается, что решение задачи существует и непрерывно дифференцируемо в замкнутой области и данные Коши на части границы области заданы точны. Для данной некоректной задачи получена явная формула продолжения. Получена оценка устойчивости решения задачи Коши в классическом смысле.*

Ключевые слова: *Задача Коши, некорректные задачи, функция Карлемана, регуляризованные решения, регуляризация, формулы продолжения.*

CAUCHY PROBLEM FOR FIRST-ORDER LINEAR ELLIPTIC SYSTEMS WITH CONSTANT COEFFICIENTS IN A THREE-DIMENSIONAL BOUNDED DOMAIN

Tursunov Farhod Ruzikulovich, PhD, assistant professor,
farhod.tursunov.76@mail.ru
Ruzikulov Faridun Farhodovich, student,
faridunruzikulov2211@gmail.com
Norimov Azizjon Komilovich, master student
aziznoimov46gmail.com
Samarkand State University named after Sharof Rashidov
Samarkand, Uzbekistan

Abstract: *The paper studies the problem of continuing the solution of linear systems of elliptic type of the first order with constant coefficients in a domain G by its known values on the smooth part S of the boundary ∂G, i.e. the Cauchy problem is studied for solving linear systems of equations of the elliptic type of the first order with constant coefficients. The problem under consideration belongs to the ill-posed problems of mathematical physics, since there is no continuous dependence of the solution on the initial data. It is assumed that a solution to the problem exists and is continuously differentiable in a closed domain, and the Cauchy data on a part of the boundary of the domain are given exact. For this ill-posed problem, an explicit continuation formula is obtained. An estimate of the stability of the solution of the Cauchy problem in the classical sense is obtained.*

Keywords: *Cauchy problem, ill-posed problems, Carleman function, regularized solutions, regularization, continuation formulas.*

Введение. Пусть $x = (x_1, x_2, x_3)$ и $y = (y_1, y_2, y_3)$ точки трёхмерного Евклидового пространства R^3 и $x^T = (x_1, x_2, x_3)^T$ - транспонированный вектор x.

Вводим следующие обозначения:

$$y' = (y_1, y_2), \quad x' = (x_1, x_2),$$
$$r = |y - x|, \quad \alpha = |y' - x'|, \quad \alpha^2 = s, \quad w = i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_3, \quad u \geq 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)^T, \frac{\partial}{\partial y} = \left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial y_3}\right)^T,$$
$$U(x) = (U_1(x), U_2(x), ..., U_n(x))^T, u^0 = (1,1,...,1) \in R^n.$$

Рассмотрим ограниченная односвязная область G в R^3 с границей $\partial G = S \cup Q$, состоящей из компактной связной части Q плоскости $y_3 = 0$ и гладкого куска поверхности Ляпунова S, лежащей в полупространстве $y_3 \geq 0$. Положим $\overline{G} = G \cup \partial G$.

Обозначим через $A_{l \times n}(x)$ класс матриц $D(x^T)$, элементами которых являются линейные формы с комплексными коэффициентами таких, что выполняется равенство $D^*(x^T)D(x^T) = E\left(|x|^2 u^0\right)$; здесь $D^*(x^T)$ - сопряженная к $D(x^T)$ матрица, а $E(x)$ - диагональная матрица размерности $(n \times l)$, $n, l \geq 3$.

Рассмотрим задачу Коши

$$D\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)U(x) = 0 \ , \ x \in G \ , \tag{1}$$

$$U(x)\big|_S = f(x), \tag{2}$$

относительно неизвестной функции $U(x) = (U_1(x), U_2(x), ..., U_n(x))^T$; $n \geq 3$, здесь, $f(x)$ - непрерывная функция, заданная на части S границы области G.

Система уравнений (1) представляет собой систему эллиптического типа первого порядка с постоянными коэффициентами. Такие системы охватывают широкий класс эллиптических систем; например, классическое уравнение Лапласа $\Delta w(x) = 0$ в двухмерном случи можно рассматривать как частный случай системы (1).

Задача Коши для системы Коши - Римана (для голоморфных функций в классической версии) является известной проблемой, находящей свое применение в физике, электродинамике, механике жидкости и газа и т. д. (см. [1], [2], [8]). На самом деле она является типичным примером некорректной задачи для более общего класса эллиптических систем (см. [4], [5], [8]) или даже эллиптических дифференциальных комплексов [10,11]. Как отмечалось в [8], метод регуляризации наиболее эффективен для изучения данной задачи. Литературы [2,6,7] дают достаточно полное описание условий разрешимости задачи, а также пути ее регуляризации.

Основные результаты. Если функция $U(x) \in C^1(G) \cap G(\overline{G})$ является решением системы (1), то верно следующее интегральное представление [7]:

$$U(x) = \int_{\partial G} M(x, y)U(y)dS_y, \tag{3}$$

где

$$M(x, y) = \left(E\left(\frac{1}{4\pi r}u^0\right)D^*\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right)D(t^T),$$

$t = (t_1, t_2, t_3)$ - единичная внешняя нормаль, проведенная в точке y границы ∂G.

Метод получения указанных результатов основан на конструкции в явном виде фундаментального решения уравнения Лапласа, зависящего от положительного параметра, исчезающего вместе со своими производными при стремлении параметра к бесконечности на Q, когда полюс фундаментального решения лежит в полуплоскости $y_2 > 0$. Следуя М.М. Лаврентьеву, фундаментальное решение с указанным свойством назовем функцией Карлемана [3].

В работе [14,15] с помощью функции Карлемана получены оценки отклонения производных первого порядка приближённого решения от производных точного решения в зависимости от расстояния до плоской части границы в двумерных и трёхмерных областях для уравнения Лапласа а в работе [16] в двумерных областях специального вида для бигармонического уравнения.

Известно, что если функция Карлемана построена то используя формулу Грина можно написать регуляризованное решение в явном виде. Отсюда вытекает, что эффективность построения функции Карлемана эквивалентно построению регуляризованного решения задача Коши. В работе [9] при помощи функции Карлемана построена регуляризованные решение уравнения Лапласа в неограниченной области на плоскости.

Пусть $\sigma > 0$. Определим при $\alpha > 0$ функцию $\Phi_\sigma(x, y)$ следующим равенством [12].

$$-2\pi^2 \exp(\sigma x_3^2)\Phi_\sigma(x,y) = \int_0^{+\infty} \operatorname{Im}\left[\frac{\exp(\sigma w^2)}{w - x_3}\right]\frac{du}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}\,. \tag{4}$$

Отделяя мнимую часть функции $\Phi_\sigma(x, y)$, имеем

$$\Phi_\sigma(x,y) = \frac{1}{2\pi^2}\exp(-\sigma(\alpha^2 + x_3^2 - y_3^2))\left[\int_0^{\infty}\frac{\exp(-\sigma u^2)\cos 2\sigma y_3\sqrt{u^2+\alpha^2}\,du}{u^2+r^2} - \right.$$
$$\left. - \int_0^{\infty}\frac{\exp(-\sigma u^2)(y_3 - x_3)\sin 2\sigma y_3\sqrt{u^2+\alpha^2}}{u^2+r^2}\frac{du}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}\right]. \tag{5}$$

Формула (3) верна, если вместе $\frac{1}{4\pi r}$ подставим функцию вида [12,13]:

$$\Phi_\sigma(x,y) = \frac{1}{4\pi r} + G_\sigma(x,y) \tag{6}$$

где $G_\sigma(x, y)$ - гармоническая функция по y в R^3 включая $y = x$. Поэтому, для функция $U(x) \in C^1(G) \cap C(\overline{G})$ и любого $x \in G$ справедливо следующее интегральное представление:

$$U(x) = \int_{\partial G} N_\sigma(x,y)U(y)dS_y, \quad x \in G, \tag{7}$$

где

$$N_\sigma(x,y) = \left(E(\Phi_\sigma(x,y)u^0)D^*\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right)D\left(t^T\right). \tag{8}$$

Положим

$$U_\sigma(x) = \int_S N_\sigma(x,y)U(y)dS_y, \quad x \in G\,. \tag{9}$$

Теорема 1. Пусть $U(x)$ вектор- функция из класса $C^1(G)\cap C(\overline{G})$, является решением системы (1) на S удовлетворяющим начальному условию (2) и на части Q границы ∂G выполнено неравенство

$$|U(y)|\le M,\quad M>0,\quad y\in Q. \tag{10}$$

Тогда для любого $x\in G$ и $\sigma>0$ справедливо неравенство

$$|U(x)-U_\sigma(x)|\le \psi_3(\sigma,x_3)M\exp(-\sigma x_3^2), \tag{11}$$

где

$$\psi_3(\sigma,x_3)=\left(\frac{5}{2\pi}+\frac{3}{\sqrt{\pi\sigma}}+\frac{1}{4\sqrt{\pi\sigma}x_3}\right). \tag{12}$$

Следствие 1. При каждом $x\in G$ справедливо равенство

$$\lim_{\sigma\to\infty}U_\sigma(x)=U(x).$$

Обозначим через $\overline{G}_\varepsilon$ множество

$$\overline{G}_\varepsilon=\left\{(x_1,x_2,x_3)\in G,\quad a>x_3\ge\varepsilon,\quad a=\max_Q h(x_1,x_2), 0<\varepsilon<a,\right\}.$$

Легко заметить, что множество $\overline{G}_\varepsilon\subset G$ является компактным.

Следствие 2. Если $x\in\overline{G}_\varepsilon$, то семейство функций $\{U_\sigma(x)\}$

$$U_\sigma(x)\ \rightrightarrows\ U(x)$$

сходится равномерно при $\sigma\to\infty$.

Отметить, что множества $\Pi_\varepsilon=G\setminus\overline{G}_\varepsilon$ служить пограничным слоем данной задачи, как в теории сингулярных возмущений, где нет равномерная сходимость.

Предположим теперь, что поверхность S задана уравнением $y_3=h(y_1,y_2),(y_1,y_2)\in Q$, где h однозначная функция такая, что поверхность S является поверхностью Ляпунова. Положим

$$a=\max_Q h(y_1,y_2)\ \text{ и }\ b=\max_Q\sqrt{1+\left(\frac{dh}{dy_1}\right)^2+\left(\frac{dh}{dy_2}\right)^2}.$$

Приведём оценку устойчивости решения задачи Коши для линейных эллиптических систем первого порядка.

Теорема 2. Пусть на части Q границы ∂G выполнено неравенство

$$|U(y)|\le M,\quad y\in Q, M>0$$

а на S неравенство

$$|U(y)|\le\delta,\quad y\in S,\quad 0<\delta\le Me^{-\sigma a^2}. \tag{13}$$

Тогда для любого $x\in G$ и $\sigma>0$ справедливо неравенство

$$|U(x)|\le 2\varphi(\sigma,x_3)M^{1-x_3^2/a^2}\delta^{x_3^2/a^2},$$

где

$$\varphi(\sigma,x_3)=\max_S(\psi_3(\sigma,x_3),q(\sigma,x_3)), c=const,$$

$$q(\sigma,x_3)=c\left(\frac{4ab\sqrt{\sigma}+4a^2b\sqrt{\pi\sigma}+b\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\pi}}+\frac{b\pi+b}{4\sqrt{\pi\sigma}(a-x_3)}+\frac{13ab\pi\sigma+24ab\sigma}{4\sqrt{\pi\sigma}}+\frac{4a^2b\sigma+b}{2\pi}\right).$$

Обозначим

$$U_{\sigma\delta}(x)=\int_S N_\sigma(x,y)U(y)dS_y, \quad x\in G \ . \qquad (14)$$

Теорема 3. Пусть вектор - функция $U(x)$ являющееся решением системы (1) из класса $C^1(G)\cap C(\overline{G})$, на части S границы ∂G удовлетворяет условие (2) и выполняется неравенство (13). Также заданы приближения $f_\delta(x)$ класса $C(S)$ с заданным уклонением $\delta>0$ функции $f(x)$ т.е.

$$\max_S |f(x)-f_\delta(x)|<\delta, \quad 0<\delta\le Me^{-\sigma a^2} \ .$$

Тогда для любого $x\in G$ справедливо неравенство

$$|U(x)-U_{\sigma\delta}(x)|\le\psi_3(\sigma,x_3)M^{1-x_3^2/a^2}\delta^{x_3^2/a^2}\ , \qquad (15)$$

где $\sigma=\dfrac{1}{a^2}\ln\dfrac{M}{\delta}, \quad \delta<M$.

Следствие 3. При каждом $x\in G$ справедливо равенство

$$\lim_{\delta\to 0}U_{\sigma\delta}(x)=U(x)\ .$$

Следствие 4. Если $x\in\overline{G}_\varepsilon$, то семейство функций $\{U_{\sigma\delta}(x)\}$

$$U_{\sigma\delta}(x)\rightrightarrows U(x)$$

сходиться равномерно при $\delta\to 0$.

Литература

1. Айзенберг Л.А. Формулы Карлемана в комплексном анализе. Первые приложения / Л. А. Айзенберг, – Новосибирск: Наука, 1990. - 246 с.
2. Carleman T. Les Functions quasi analytiques / T. Carleman. – Paris: Gauthier - Villar, 1926. - 116 p.
3. Лаврентьев М.М. О Задача Коши для уравнения Лапласа / М.М. Лаврентьев. //Изв. АН СССР. Сер. матем. 1956. -Том 20. № 6. – С. 819-842.
4. Лаврентьев М. М. О задаче Коши для линейных эллиптических уравнений второго порядка / М. М. Лаврентьев. // Докл. АН СССР. 1957. Т. 112. № 2. – С. 195–197.
5. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики / М. М. Лаврентьев. – Новосибирск: Изд. СО АН СССР, 1962. - 92 с.
6. Polkovnikov A. N. Construction of Carleman formulasby using mixed problems with parameter-dependent boundary conditions / A. N. Polkovnikov, A. A. Shlapunov. // Siberian Mathematical Journal. 2017. Volume 58. № 4. P. 870-844. (in Russian).
7. Тарханов Н.Н. Об интегральном представлении решений систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных и некоторых его приложениях. Некоторые вопросы многомерного комплексного анализа / Н.Н.Тарханов.- Красноярск: –1980. С. 147- 160.
8. Tarkhanov, N. N. The Cauchy problem for solutions of elliptic equations. 1.ed / Nikolay N .Tarkhanov.– Berlin: Akademie Verlag, 1995. - 479 p.
9. Турсунов Ф.Р. Регуляризация решение задача Коши для уравнения Лапласа в неограниченной области / Ф.Р. Турсунов, Д.С. Шодиев, Х.Х. Тухтаева . // Научный вестник СамГУ, 2021. №1. С. 34-39.
10. Fedchenko D. P. On the Cauchy problem for the Dolbeault complex in spaces of distributions / D. P. Fedchenko , A. A. Shlapunov. // Complex Variables, Elliptic Equ. 2013. Vol. 58. № 11. P. 1591–1614.
11. Fedchenko D. P. On the Cauchy problem for the elliptic complexes in spaces of distributions / / D. P. Fedchenko , A. A. Shlapunov. // Complex Variables, Elliptic Equ. 2014. Vol. 59. № 5. P. 651–679.
12. Ярмухамедов Ш. Представление гармонической функции в виде потенциалов и задача Коши / Ш. Ярмухамедов. // Математические заметки, 2008. -Том 83, выпуск 5. С. 763-778.
13. Ярмухамедов Ш. О гармоническом продолжении дифференцируемых функций, заданных на куске границы / Ш. Ярмухамедов. // Сибирский математический журнал, 2002. Том 43. № 1. С. 228-239.
14. Хасанов А.Б. О задаче Коши для уравнения Лапласа / А.Б. Хасанов, Ф.Р. Турсунов // Уфимский математический журнал. 2019. -Том 11. №4. С. 92-106.
15. Хасанов А.Б. Задача Коши для трехмерного уравнения Лапласа / А.Б. Хасанов, Ф.Р. Турсунов // Известия высших учебных заведений. Математика, 2021. №2. С. 56-73.
16. Shodiyev D. On the Cauchy Problem for the Biharmonic Equation / D. Shodiyev // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics, 2022. 15(2) С.199–213.