УДК517.95
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_1(4)_37

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА I РОДА ДЛЯ МОДЕЛЬНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С УСЛОВИЯМИ, ЗАДАННЫМИ В ОБЛАСТИ $\mathbf{y \geq x, x \geq 0}$

Таалайбеков Нурсултан Таалайбекович, аспирант
atd5929@mail.ru
Ошский государственный университет
Ош, Кыргызская Республика

Аннотация. *В статье рассматриваются нелокальная задача I рода для гиперболического уравнения четвертого порядка. Нелокальные условия задаются вдоль прямой* $y = x,\ \ 0 \leq x < A, y \geq x$ *Основной целью статьи является доказательство разрешимость нелокальной задачи с интегральными условиями для гиперболического уравнения четвертого порядка в области* $D = \{(x, y) : 0 \leq x < A, y \geq x\}$, *где* $A < \infty$. *Методом функции Римана задача сведена к системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода и доказано существование единственного решения нелокальной задачи с интегральными условиями для гиперболического уравнения четвертого порядка в области* D.

Ключевые слова: *Функция Римана, нелокальная задача, задача Коши, гиперболическое уравнение, интегральное уравнение, интегральные условия*

ТӨРТҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ МОДЕЛДИК ГИПЕРБОЛИКАЛЫК ТЕҢДЕМЕ ҮЧҮН ШАРТТАРЫ $\boldsymbol{y \geq x, x \geq 0}$ АЙМАГЫНДА БЕРИЛГЕН I ТИПТЕГИ ЛОКАЛДЫК ЭМЕС МАСЕЛЕ

Таалайбеков Нурсултан Таалайбекович, аспирант
atd5929@mail.ru
Ош мамлекеттик университети
Ош, Кыргыз Республикасы

Аннотация: *Бул макалада төртүнчү тартиптеги гиперболикалык теңдеме үчүн I типтеги локалдык эмес маселе каралган. Локалдык эмес шарттар* $y = x,$, *мында* $0 \leq x < A, y \geq x$ *түзүн бойлото коюлган. Макаланын негизги максаты болуп* $D = \{(x, y) : 0 \leq x < A, y \geq x\}$, *где* $A < \infty$ *аймагында интегралдык шарттары менен төртүнчү тартиптеги гиперболикалык теңдеме үчүн локалдык эмес маселенин коррективдүүлүгүн далилдөө эсептелет. Ошондуктан* D *аймагында төртүнчү тартиптеги гиперболикалык теңдеме үчүн интегралдык шарттары менен локалдык эмес маселеси Риман функциясы усулунун жардамында Вольтеррдин экинчи типтеги интегралдык теңдемелердин системасына алып келинген жана жалгыз чечимдин жашашы далилденген.*

Ачкыч сөздөр: *Римандын функциясы, локалдык эмес маселе, Кошинин маселеси, гиперболикалык теңдеме, интегралдык теңдеме, интегралдык шарттар.*

A NONLOCAL PROBLEM OF THE FIRST TYPE FOR A MODEL FOURTH-ORDER HYPERBOLIC EQUATION WITH CONDITIONS IN THE DOMAIN $\boldsymbol{y \geq x, x \geq 0}$

TaalaybekovNursultanTaalaybekovich, graduate student
atd5929@mail.ru
Osh State University
Osh, Kyrgyzstan

Abstract. *The article considers a non-local problem of the first kind for a hyperbolic equation of the fourth order. Non-local conditions are set along the line segment* $y = x$, *where* $0 \le x < A, y \ge x$. *The main purpose of the article is to prove the solvability of a nonlocal problem with integral conditions for a fourth-order hyperbolic equation in the domain* $D = \{(x, y) : 0 \le x < A, y \ge x\}$, *where The Riemann function method reduces the problem to a system of Volterra integral equations of the second kind and proves the existence of a unique solution to a non-local problem with integral conditions for a fourth-order hyperbolic equation in the domain D.*
Keywords: *hyperbolic equation, nonlocal problem, integral conditions, function of Ryman, integral equation.*

Введение. Известно, что нелокальные задачи для уравнений в частных производных активно изучены в работах А.И. Кожанова, A. Bouzian, К.Б. Сабитова, Л.С. Пулькиной и их учеников. Однако разрешимости нелокальных задач для гиперболических уравнений четвертого порядка сравнительно мало изучен.

В настоящее время задачи с нелокальными условиями для уравнений в частных производных сравнительно активно исследуются. В тех случаях, когда граница области протекания физического процесса недоступна для непосредственных измерений, дополнительной информацией, достаточной для однозначной разрешимости соответствующей математической задачи, могут служить нелокальные условия в интегральной форме[4-7].

Нелокальными задачами называется такие задачи, в которых задана определенная связь значений искомой функции на границе области и внутри нее. Таких соотношений выполняют условия, содержащие интегралы от искомого решения[7]. После полной классификации уравнения в частных производных четвертого порядка А. Сопуевым[1], эта область настоящее время бурно развивается.

В области $D=\{(x,y):0\le x<A, y\ge x\}$, где $A<+\infty$, для модельного гиперболического уравнения

$$u_{xxxy}(x,y)+cu=f(x,y), \tag{1}$$

где $c=const,\ f(x,y)\in C(\overline{D}), M=\{u,u_y,u_{xy},u_{xxy}\in C(\overline{D}),u_{xxxy}\in C(D)\}$, рассмотрим нелокальную задачу с интегральными условиями.

Постановка задачи. В области D рассмотрим нелокальную задачу с интегральными условиями для уравнения (1). В качестве нелокальных условий задаются интегралы вдоль прямой $y=x$, где $0\le x<A, A<+\infty.$ Известно, что характеристики $x=const, y=const$ не пересекают отрезку прямой $y=x$, где $0\le x<+\infty$, не более одного раза. Аналогичные локальные задачи для гиперболического уравнения четвертого порядка были рассмотрены в работах А. Сопуева и его учеников[1,2].

Задача 1. Найти в области D решение уравнения (1) из класса M, удовлетворяющее условиям на прямой $y=x, 0\le x\le A, A<+\infty,$

$$u\big|_{y=x}=\tau(x), \tag{2}$$

и нелокальным условиям I рода:

$$\int_0^A K_i(x)u(x,y)dx=0, i=\overline{1,3}, \tag{3}$$

где $\forall x\in[0,\infty), \exists L>0, (L=const): |K_i(x)|\le L, i=\overline{1,3}$ - заданные монотонные ограниченные функции, удовлетворяют признак Абеля а $\tau(x)$ – заданная гладкая функция.

С начало рассмотрим вспомогательную задачу.

Функция Римана. (Вспомогательная задача) На отрезке прямой $y = x,$ рассмотрим задачу Коши для уравнения (1) с условиями (2) и

$$u_y\big|_{y=x} = \nu(x), u_{xy}\big|_{y=x} = \mu(x), u_{xxy}\big|_{y=x} = \chi(x), \qquad (4)$$

где $\nu(x), \mu(x), \chi(x)$ – пока неизвестные функции, причем на прямой $y = x,$

$$\tau(x) = \tau(y), \nu(x) = \nu(y), \mu(x) = \mu(y), \chi(x) = \chi(y), \qquad (5)$$

и условия согласования

$$\int_0^A K_i(x)\tau(x)dx = 0, \int_0^A K_i(x)\nu(x)dx = 0, \int_0^A K_{ix}(x)\nu(x)dx + \int_0^A K_i(x)\mu(x)dx = 0,$$

$$\int_0^A K_{ixx}(x)\nu(x)dx + 2\int_0^A K_{ix}(x)\mu(x)dx + \int_0^A K_i(x)\chi(x)dx = 0, i = \overline{1,3}. \qquad (6)$$

Аналогично в работе[2,3], для удобства переходим к переменным ξ, η и для построения функции Римана через произвольную точку $(x, y) \in D,$ проведем характеристическую линии $\xi = x, \eta = y$ тогда образуется прямо-угольный треугольник в плоскости ξ, η – $D_1 = \{(\xi, \eta) : x < \xi < y, \xi < \eta < y\}$ с вершинами $A(x, x), D(y, y), C(x, y).$ Далее известно, что рассмотрим формально сопряженный оператор $L^*(v),$ которое запишем в переменных[2] ξ, η:

$$vL(u) - uL^*(v) = \frac{\partial Q}{\partial \xi} - \frac{\partial P}{\partial \eta}, \qquad (7)$$

где $L^*(v) = v_{\xi\xi\xi\eta} + cu, Q = vu_{xxx}, P = -v_y u_{xx} + v_{xy} u_x - v_{xxy} u.$

Используя свойств криволинейного интеграла и формулу Грина в (7) по контуру ∂D_1, построена функции Римана оператора $L(v(x, y; \xi, \eta)),$ удовлетворяющую условиям[2]:

1. Функция $v(x, y; \xi, \eta) \in M$ по совокупности переменных $(x, y; \xi, \eta)$ на $\overline{D_1} \times \overline{D_1}$;

2. При каждой $v(x, y) \in \overline{D_1}$ функция $v(x, y; \xi, \eta)$ удовлетворяет сопряженную уравнению:

$$L^*_{(\xi,\eta)}(v) = v_{\xi\xi\xi} + cv = 0, (\xi, \eta) \in D, \qquad (8)$$

и условиям на характеристиках $\xi = x, \eta = y$,

$$v(x, y; \xi, \eta)\big|_{\xi=x} = 0, v_\xi(x, y; \xi, \eta)\big|_{\xi=x} = 0, v_{\xi\xi}(x, y; x, y) = 1, \qquad (9)$$

$$v(x, y; \xi, \eta)\big|_{\eta=y} = \omega(x, y, \xi), \qquad (10)$$

где $\omega(x, y, \xi)$ – решение следующей задачи Коши:

$$v_{\xi\xi\xi}(x, y; \xi, y) = 0, \qquad (11)$$

$$v(x, y; \xi, y)\big|_{\xi=x} = 0, v_\xi(x, y; \xi, y)\big|_{\xi=x} = 0, v_{\xi\xi}(x, y; x, y) = 1. \qquad (12)$$

Интегрируя уравнение (11) трижды по ξ в пределах от x до ξ и используя условия (12), учитывая свойства функции, построена функции Римана в виде:

$$v(x,y;\xi,\eta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n c^n}{n!(3n+2)!}(\xi-x)^{3n+2}(\eta-y)^n. \qquad (13)$$

Вычисляя соответствующие производные функции Римана имеем:

$$v_{\xi}(x,y;\xi,\eta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n c^n}{n!(3n+1)!}(\xi-x)^{3n+1}(\eta-y)^n,$$

$$v_{\xi\xi}(x,y;\xi,\eta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n c^n}{n!(3n)!}(\xi-x)^{3n}(\eta-y)^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n c^n}{n!(3n)!}(\xi-x)^{3n}(\eta-y)^n,$$

$$v(x,y;0,y)=\frac{1}{2}x^2, v_{\xi}(x,y;0,y)=x, v_{\xi\xi}(x,y;0,y)=1, v(x,y;x,x)=0,$$

$$v_x(x,y;x,x)=0, v_{xx}(x,y;x,x)=1, v_{\xi}(x,y;x,x)=0, v_{\xi x}(x,y;x,x)=-1,$$

$$v_{\xi\xi}(x,y;x,x)=1, v_{\xi\xi x}(x,y;x,x)=0, v_{\xi xx}(x,y;x,x)=0, v_{\xi\xi xx}(x,y;x,x)=0,$$

$$v_{\xi\xi\xi xx}(x,y;x,x)=-\frac{c}{6}(x-y), v_{\xi\xi\xi}(x,y;x,x)=0, v_{\xi\xi\xi}(x,y;y,y)=0. \qquad (14)$$

Тогда на прямой $y=x$, задача Коши для уравнения (1) с условиями (4) имеет единственное решение и представимо через функции Римана в виде:

$$u(x,y)=v_{\xi\xi}(x,y;x,x)\tau(x)+\int_x^y\left[v(x,y;\xi,\xi)\chi(\xi)-v_{\xi}(x,y;\xi,\xi)\mu(\xi)+\right.$$
$$\left.+v_{\xi\xi}(x,y;\xi,\xi)\nu(\xi)+v_{\xi\xi\xi}(x,y;\xi,\xi)\tau(\xi)\right]d\xi-\int_x^y d\xi\int_{\xi}^y v(x,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\eta, \qquad (15)$$

Сведение задачи 1 к системе интегральных уравнений. Умножив обе части на $K_i(x)$ и интегрируя уравнение (15) по x в пределах от 0 до A и воспользовавшись (6), (14), условиям (2),(3), обозначив все известные функции через $g_1(y)$, имеем[2,3]:

$$\int_x^y\left[H_{1i}(y,\xi)\chi(\xi)-H_{2i}(y,\xi)\mu(\xi)+H_{3i}(y,\xi)\nu(\xi)\right]d\xi=g_i(x,y), i=\overline{1,3}, \qquad (16)$$

где

$$H_{1i}(y,\xi)=\int_0^A K_i(x)v(x,y;\xi,\xi)dx,\ H_{2i}(y,\xi)=\int_0^A K_i(x)v_{\xi}(x,y;\xi,\xi)dx,$$

$$H_{3i}(y,\xi)=\int_0^A K_i(x)v_{\xi\xi}(x,y;\xi,\xi)dx,\ i=\overline{1,3},$$

$$g_i(x,y)=-\int_x^y\left(\int_0^A K_i(x)v_{\xi\xi\xi}(x,y;\xi,\xi)dx\right)\tau(\xi)d\xi+\int_0^A\left(\int_x^y d\xi\int_{\xi}^y v(x,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\eta,\right)dx,$$

$i=\overline{1,3}$.

Известно, что (16) является системой интегральных уравнений типа Вольтерра первого рода относительно функций $\nu(x),\mu(x),\chi(x)$.

Разрешимость задачи 1 Из теории интегральных уравнений[8], известно, что «диагональ» ядра не обращается в нуль и если производные ядра по x, по y существуют и непрерывны, то можно привести интегральное уравнение Вольтерра первого рода к интегральному уравнению Вольтерра второго рода двумя способами.

В нашем случае, в основного интервала каждое ядро в системе интегральных уравнений по свойству функции Римана не обращается в нуль и производные ядра по ξ, по y существуют и непрерывны. А $K_i(x), i=\overline{1,3}$ заданные достаточно гладкие функции, не обращается в нуль, по этому $H_{ki}(y,\xi)\neq 0, k,i=1,2,3.$ Тогда с первым более простым способом, т.е. дифференцированием обеих частей системы интегральных уравнений можно привести к системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода.

Дифференцируя обеих частей (16) по переменному y и учитывая (5) имеем:

$$\begin{gathered}H_{1i}(y,y)\chi(x)-H_{2i}(y,y)\mu(x)+H_{3i}(y,y)\nu(x)-\int_x^y\big[H_{1iy}(y,\xi)\chi(\xi)-\\ -H_{2iy}(y,\xi)\mu(\xi)+H_{3iy}(y,\xi)\nu(\xi)d\xi=\frac{\partial}{\partial y}g_i(x,y), i=\overline{1,3},\end{gathered} \tag{17}$$

Системы интегральных уравнений запишем в векторной форме.

Введем следующие обозначение:

$$H(y)=\begin{pmatrix}H_{1i}(y,y) & -H_{2i}(y,y) & H_{3i}(y,y)\end{pmatrix}, i=\overline{1,3},$$

$$K(y,\xi)=\begin{pmatrix}H_{1iy}(y,\xi) & -H_{2iy}(y,\xi) & H_{3iy}(y,\xi)\end{pmatrix}, i=\overline{1,3},$$

$$\Phi(x)=\begin{pmatrix}\chi(x)\\ \mu(x)\\ \nu(x)\end{pmatrix}, G(x,y)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial y}g_1(x,y)\\ \dfrac{\partial}{\partial y}g_2(x,y)\\ \dfrac{\partial}{\partial y}g_3(x,y)\end{pmatrix},$$

$$H(y)\Phi(x)-\int_y^x K(y,\xi)\Phi(\xi)d\xi=G(x,y). \tag{18}$$

Очевидно, что матрица $\boldsymbol{H}(y)$ невырожденная матрица, так, как

$$|H(y)|\neq 0. \tag{19}$$

Тогда (18) является системой интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода. Так, как решение системы уравнений (18) существует и единственно. Найдя решение $\chi(x)$, $\mu(x)$, $\nu(x)$ системы интегральных уравнений (18), методом последовательных приближений, учитывая (5) и подставляя в (15), получим решение задачи 1.

Итак, справедлива

Теорема 1. Если выполняются условий (2), (3), (6) и (19) то в области D решение задачи 1 существует и единственно в классе M.

Из формулы Римана вытекают некоторые следствия, представляющие общий интерес.

Легко видеть, что значение этого решения в некоторой точке $C(x,y)$ вовсе не зависит от данных Коши вне треугольника АВС, образованного двумя характеристиками, проведенными через эту точку, и прямой, несущей начальные данные. Если мы будем менять данные вне этого треугольника, то решение будет меняться лишь вне этого треугольника. Таким образом, каждая характеристика будет отделять область, где решение осталось неизменным, от той области, где оно изменилось. Мы приходим к следующему выводу: к данному решению задачи, зафиксированному внутри треугольника ABC, можно присоединять вдоль характеристики, вообще говоря, различные решения, являющиеся его продолжением.

Таким образом, характеристики - это суть линии, вдоль которых можно разрезать область существования решения, если мы хотим в некоторых частях этой области заменить одно решение другим так, чтобы при этом снова получать решения уравнения во всей области. Это важное свойство характеристик тесно связано с тем, что при произвольных начальных данных, заданных на характеристиках, задача Коши, вообще говоря, неразрешима. Для всякой другой линии, зная решения по одну сторону линии, мы могли бы найти значения решения и его производных на этой линии и решить задачу Коши по другую сторону линии. Таким образом, за всякую не характеристическую линию решение уравнения продолжается однозначно.

Итак, в той стороны прямой $y = x$ или в области $D = \{(x, y) : 0 \le x < A, y \le x\}$, где $A < +\infty$, нелокальная задача для уравнения (1) однозначна, разрешима и аналогично доказывается.

Задача 2. Найти в области *D* решение уравнения (1) из класса *M,* удовлетворяющее условиям (2) и нелокальным условиям I рода:

$$\int_0^A K_1(x)u(x, y)dx = 0, \int_0^A K_2(x)u_x(x, y)dx = 0, \int_0^A K_3(x)u_{xx}(x, y)dx = 0, \tag{19}$$

где $K_i(x), i = \overline{1,3}, \tau(x)$ – заданные гладкие функции.

Разрешимость задачи 2 доказывается аналогично методом функции Римана.

Литература

1. Сопуев А. Краевые задачи для уравнений четвертого порядка и уравнений смешанного типа: Дис. …докт. физ. –мат. наук: 01.01.02. – Бишкек, 1996. – 249 с.
2. Асылбеков Т.Д. Начально-краевые задачи для гиперболических уравнений четвертого порядка: Дис. … канд. физ. –мат. наук: 01.01.02. – Бишкек, 2003. – 130 с.
3. Асылбеков Т.Д., Нуранов Б.Ш., Таалайбеков Н.Т. Нелокальные краевые задачи типа Бицадзе-Самарского для гиперболического уравнения четвертого порядка с разрывными коэффициентами // Республиканский научно-теоретический журнал “Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана”, № 3 – Бишкек, 2019. №3. – С. 11-17.
4. Нахушева З.А. Об одной нелокальной задаче для уравнений в частных производных // Дифференциальные уравнения. 1986. № 1. – С. 171-174.
5. Пулькина Л.С. О разрешимости в L2 нелокальной задачи с интегральными условиями для гиперболического уравнения // Дифференциальные уравнения. 2000. № 2. – С. 279-280.
6. Пулькина Л.С., Кечина О.М. Нелокальная задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения в характеристическом прямоугольнике // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2009. – № 2(68). – С. 80–88.
7. Пулькина Л. С. “Краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными условиями I и II рода” // Изв. вузов. Матем., 2022. № 4. С. 74–83.
8. Трикоми Ф. Интегральные уравнения. – Москва: ИЛ, 1960. -229 с.