УДК 519.852.2
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_1(4)_34

МЕТОД ОБРАТНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ ДЛЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ

Сапарова Гульмира Баатыровна, к.ф.-м.н., доцент
gulya141005@mail.ru
Ошский технологический университет им. М.М.Адышева
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *В данной статье рассмотрен алгоритм решения задачи оптимизации с помощью аппарата обратных вычислений. Рассмотрена задача квадратичного программирования с ограничением в виде равенства, то есть, конкретно задача оптимизации закупок фирмы, в котором нужно определить количество заказываемых товаров таким образом, чтобы максимально удовлетворить спрос потребителя при минимальном бюджете. Предложенный алгоритм решения может быть применен в системах поддержки принятия решений для планирования максимальной закупки товаров организации. Данный алгоритм является более простым в компьютерной реализации по сравнению с классическими методами, то есть, чтобы найти решение задачи оптимизации закупок просто нужно решить систему уравнений. В результате получили одинаковые решения для трех методов: метода на основе обратных вычислений, метода штрафов и метода множителей Лагранжа.*

Ключевые слова: *алгоритм, квадраточное программирование, оптимизация, метод штрафов, множитель Лагранжа, обратные вычисления, система уравнений.*

ОПТИМИЗАЦИЯ МАСЕЛЕЛЕРИН ТЕСКЕРИ ЭСЕПТӨӨ ЫКМАЛАР МЕНЕН ЧЫГАРУУ

Сапарова Гульмира Баатыровна, ф.-м.и.к., доцент
gulya141005@mail.ru
М.М.Адышев атындагы Ош технологиялык университети
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *Бул макалада тескери эсептөө аппаратын колдонуу менен оптимизация маселесин чечүү алгоритми каралган. Барабардык түрүндөгү чектөө болгон квадраттык программалоо маселеси, башкача айтканда, фирманын сатып алууларын оптимизациялоо маселеси каралган, мында минималдуу бюджет менен мүмкүн болушунча көп талап кылган керектөөчүнү канаатандыра тургандай заказ кылынган товарлардын санын аныктоо. Сунушталган чечимдин алгоритмини чечимдерди колдоо системаларында колдонсо болот, уюмдун товарларын максималдуу сатып алууну пландаштыруу үчүн. Бул алгоритм классикалык ыкмаларга салыштырмалуу компьютерди ишке ашырууда жөнөкөй, башкача айтканда, сатып алууларды оптимизация маселесинин чечимин табуу үчүн теңдемелер системасын чыгаруу керек. Натыйжада үч ыкма боюнча бирдей чечимдер алынган: тескери эсептөө ыкмасы, айыптык ыкмасы жана Лагранждын көбөйтүүчү ыкмасы менен.*

Ачкыч сөздөр: *алгоритм, квадраттык программалоо, оптимизация, айыптык ыкма, Лагранж көбөйтүүчүсү , тескери эсептөөлөр, теңдемелер системасы.*

BACK CALCULATION METHOD FOR OPTIMIZATION PROBLEMS

Saparova Gulmira Baatyrovna, assistant professor
gulya141005@mail.ru
Osh technological university named after M.M.Adysheva
Osh, Kyrgyzstan

Abstract: *This article considers an algorithm for solving an optimization problem using the back calculation apparatus. The problem of quadratic programming with a constraint in the form of equality is considered, that is,* *specifically the problem of optimizing the purchases of a company, in which it is necessary to determine the number of ordered goods in such a way as to satisfy consumer demand as much as possible with a minimum budget. The proposed decision algorithm can be applied in decision support systems for planning the maximum purchase of the organizations goods. The algorithm is simpler in computer implementation compared to classical methods, that is, to find a solution to the procurement optimization problem, you just need to solve a system of equations. As a result, the same solutions were obtained for three methods: the back calculation method, the penalty method, and the Lagrange multiplier method.*

***Key words**: algorithm, quadratic programming, optimization, penalty method, Lagrange multiplier, back calculation, system of equations.*

Введение. Методы оптимизации широко применяются в задачах экономики. Математическая модель задачи оптимизации состоит из целевой функции, значение которой нужно минимизировать или максимизировать, и ограничений на переменные. В зависимости как задана целевая функция и ограничения, задача будет линейного или нелинейного программирования.

Данная статья посвящена решению задачи оптимизации закупок фирмы, в которой нужно выбрать вид и количество заказываемого товара у поставщиков при ограниченном бюджете. Такую, но с другими параметрами примерно задачу рассмотрел в своих работах российский ученый экономист Р.Ф.Фарманов [1]. Организация формирует прогнозное значение ежедневного спроса на основе имеющихся статистических данных за предыдущие периоды. Необходимо осуществить закупку товаров таким образом, чтобы максимально удовлетворить спрос при ограниченном количестве денежных средств. Исходными данными модели являются:

$a_i -$ прогнозное значение среднего спроса на товар i ($i = 1,2, \dots, N, N -$количество наименований товаров); $b_i -$ цена закупки $i -$ го товара; B – величина бюджета закупок.

Полученная задача представляет собой задачу квадратичного программирования с линейным ограничением в виде равенства:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N} (x_i - a_i)^2 \rightarrow min, \tag{1}$$
$$g(x) = \sum_{i=1}^{N} b_i x_i = B, \ x_i \geq 0.$$

Задачи такого вида часто встречаются при распределении инвестиций (формировании портфеля), нахождение оценок параметров функции регрессии с ограничениями.

Целью нашей задачи является разработка алгоритма решения задачи с помощью обратных вычислений.

Постановка задачи: Рассмотрим задачу оптимизации закупок продукции кондитерской фабрики “Барбол”. Исходные данные в таблице 1.

Таблица 1.

Показатель	**Номер продукции, i**		
	1	**2**	**3**
Прогнозный спрос, кг	11	16	8
Цена закупки, сом / кг	125	105	170

Бюджет закупок равна 2000 сомов.

Построим математическую модель, задача будет квадратичного программирования и будет иметь вид:

$$f(x) = (x_1 - 11)^2 + (x_2 - 16)^2 + (x_3 - 8)^2 \to min,$$
$$g(x) = 125x_1 + 105x_2 + 170x_3 = 2500,$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Решим задачу классическими методами, таких как: метод штрафов, метод множителей Лагранжа, а также с помощью обратных вычислений.

Методы решения: Очень часто для задач нелинейного программирования при оптимизации ресурсов предприятия применяются два классических метода: метод штрафов и метод множителей Лагранжа [2], [3]. Идеями этих методов является сведение задачи условной оптимизации к задаче безусловной оптимизации. Например, в методе штрафов вводится понятие штрафной функции, которая формируется из данной целевой функции и штраф – функции от ограничения и штрафного параметра. На каждом шаге итерации происходит решение задачи безусловной оптимизации штрафной функции при заданном значении штрафного параметра, величина которого постепенно увеличивается. Алгоритм итерации решения заканчивается, когда элементы итерационных последовательностей изменяются от шага к шагу незначительно. Если последовательность аргументов функции является допустимой, то в этом случае штрафной метод называется внутренним, иначе – внешним. В данном случае будет применен квадратичный штраф, применяемый при наличии ограничения – равенства. Решение задачи минимизации будет сводиться к нахождению минимума штрафной функции при различных значениях штрафного параметра R:

$$P(x, R) = f(x) + Rg^2(x), \tag{2}$$

где $P(x, R) -$ штрафная функция; $f(x) -$ целевая функция; $g^2(x) -$ функция – ограничение.

В методе множителей Лагранжа, также сводится задача условной оптимизации к задаче безусловной оптимизации, в которой появляются параметры – множители Лагранжа. При решении задачи нужно сформулировать функцию Лагранжа, которую нужно минимизировать:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda g(x), \tag{3}$$

где $L(x, \lambda) -$функция Лагранжа; $\lambda -$множитель Лагранжа, на знак которого никаких требований не накладывается.

Вычисляются частные производные функции Лагранжа, осуществляется подстановка полученного выражения для аргументов в ограничение. Путем решения системы уравнения находится множитель Лагранжа и сами аргументы.

Аппарат обратных вычислений разработанный ученым Б.Е.Одинцовым [4],[5], предназначен для определения приростов Δx аргументов функции с применением их начального значения, заданной новой величины функции, коэффициентов относительной важности переменных и направлении их изменения (уменьшения или увеличения). В таком случае решаем систему с тремя переменными.

$$y \mp \Delta y = f\big(x_1 \mp \Delta x_1(\alpha), x_2 \mp \Delta x_2(\beta), x_3 \mp \Delta x_3(\gamma)\big);$$

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{\Delta x_1}{\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3}; \\ \beta = \dfrac{\Delta x_2}{\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3}; \\ \gamma = \dfrac{\Delta x_3}{\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3}; \\ \quad \alpha + \beta + \gamma = 1. \end{cases}$$

где $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3 -$ приращение аргументов; $\alpha, \beta, \gamma -$ коэффициенты относительной важности перменных x_1, x_2, x_3; $y, \Delta y -$ данные значения и приращение функции [6].

Таким образом, данные значения переменных определяются как сумма или разность начальных приростов и величин:

$$x_1^* = x_1 + \Delta x_1(\alpha); x_2^* = x_2 + \Delta x_2(\beta); x_3^* = x_3 + \Delta x_3(\gamma).$$

Данный метод хорошо применяется в области экономики, образования в задачах управления.

Решение задачи нелинейного программирования методами обратных вычислений состоит из следующих шагов:

1. Определение точки минимума целевой функции $f(x)$. Для данной задачи минимум функции всегда будет равен значениям спроса a_i.
2. Полученная точка минимума функции корректируется с учетом ограничения. Таким образом, осуществляется переход к обратной задаче, которая может быть решена с помощью обратных вычислений. Для расчета коэффициентов применяются значения частных производных функции – ограничения, которые будут равны закупочной стоимости изделий b_i. Данные величины нормируются относительно общей суммы:

$$\alpha = \frac{b_1}{(b_1 + b_2 + b_3)};$$

$$\beta = \frac{b_2}{(b_1 + b_2 + b_3)};$$

$$\gamma = \frac{b_3}{(b_1 + b_2 + b_3)}.$$

Сумма полученных значений будет равна единице.

1. Метод множителей Лагранжа. Приведем данную задачу к задаче

безусловной оптимизации, сформировав функцию Лагранжа. Для этого добавляем к целевой функции ограничение, умноженное на множитель Лагранжа:

$$L(x, \lambda) = (x_1 - 11)^2 + (x_2 - 16)^2 + (x_3 - 8)^2 + \lambda(125x_1 + 105x_2 + 170x_3 - 2000).$$

Чтобы найти минимум функции, находим частные производные, приравниваем к нулю и вычислим неизвестные переменные функции.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - 22 + 125\lambda; \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - 32 + 105\lambda; \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_3} = 2x_3 - 16 + 170\lambda. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - 22 + 125\lambda = 0; \\ 2x_2 - 32 + 105\lambda = 0; \\ 2x_3 - 16 + 170\lambda = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{22 - 125\lambda}{2}; \\ x_2 = \frac{32 - 105\lambda}{2}; \\ x_3 = \frac{16 - 170\lambda}{2}. \end{cases}$$

Чтобы вычислить λ нужно решить уравнение:

$$125x_1 + 105x_2 + 170x_3 - 2000 =$$

$$= 125 \cdot \left(\frac{22 - 125\lambda}{2}\right) + 105 \cdot \left(\frac{32 - 105\lambda}{2}\right) + 170 \cdot \left(\frac{16 - 170\lambda}{2}\right) == 2000$$

$$62{,}5 \cdot (22 - 125\lambda) + 52{,}5 \cdot (32 - 105\lambda) + 85 \cdot (16 - 170\lambda) = 2000 \Rightarrow$$

$$1375 - 7812{,}5\lambda + 1680 - 5512{,}5\lambda + 1360 - 14450\lambda = 2000 \Rightarrow$$

$$-27775\lambda = -2415 \Rightarrow \lambda \approx 0{,}087.$$

Подставляя полученное $\lambda \approx 0{,}087$ в систему, находим:

$$x_1 \approx 5{,}566;\ x_2 \approx 11{,}435;\ x_3 \approx 0{,}609.$$

Таким образом, нужно купить 5,566 кг продукта первого вида, 11,435 кг – второго вида и 0,609 кг – третьего вида.

2. Метод штрафов. С помощью штрафной функции переходим от задачи с ограничениями к задаче без ограничений. Процесс нахождения решения является итерационным, изменение штрафного параметра осуществляется последовательно, начиная с малого значения.[6] Штрафная функция составляется прибавлением к целевой функции ограничения умноженного на штрафной параметр:

$$P(x, R) = (x_1 - 11)^2 + (x_2 - 16)^2 + (x_3 - 8)^2 + R(125x_1 + 105x_2 + 170x_3 - -2000)^2,$$

где R – штрафной параметр.

Итерационный процесс начинается с малого значения R, далее штрафной параметр увеличивается. В каждой итерации выполняем решение задачи квадратичного программирования. Решение занесено в таблицу 2.

Таблица 2.

R	x_1	x_2	x_3	$P(x, R)$	$f(x)$
0	11	16	8	0	0
0,05	5,568	11,437	0,612	104,953	104,915
0,1	5,567	11,436	0,611	104,972	104,953
0,2	5,566	11,436	0,61	104,981	104,972
1	5,566	11,435	0,609	104,989	104,987

3. Методы обратных вычислений. Целевая функция имеет вид:

$$f(x) = (x_1 - 11)^2 + (x_2 - 16)^2 + (x_3 - 8)^2 \to min.$$

Минимумом данной функции будут значения спроса на продукцию a_i: $x_1 = 11$, $x_2 = 16, x_3 = 8$.

Вычислим значения коэффициентов относительной важности с применением данных о закупочной стоимости b_i:

$$\alpha = \frac{125}{(125 + 105 + 170)} = 0{,}313;$$

$$\beta = \frac{105}{(125 + 105 + 170)} = 0{,}263;$$
$$\gamma = \frac{170}{(125 + 105 + 170)} = 0{,}425.$$

Далее с помощью обратных вычислений находим изменения значений объема заказа решения системы уравнений:

$$\begin{cases} 125(11 + \Delta x_1) + 105(16 + \Delta x_2) + 170(8 + \Delta x_3) = 2000; \\ \dfrac{\Delta x_1}{\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3} = 0{,}313; \\ \dfrac{\Delta x_2}{\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3} = 0{,}263; \\ \dfrac{\Delta x_3}{\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3} = 0{,}425. \end{cases}$$

Решая систему получили значения приростов: $\Delta x_1 = -5{,}4343$; $\Delta x_2 = -4{,}5648$; $\Delta x_3 = -7{,}3906$.

Следовательно, окончательно получаем решение задачи:

$$x_1^* = 11 - 5{,}4343 = 5{,}566;$$
$$x_2^* = 16 - 4{,}5648 = 11{,}435;$$
$$x_3^* = 8 - 7{,}3906 = 0{,}609.$$

Таким образом, вычисленные значения равны результатам, которые получили методом штрафа и методом множителей Лагранжа.

Литература

1. Фарманов Р.Ф. Оптимизация закупок материальных ресурсов в системе ресурсосбережения предприятий АПК // Вопросы структуризации экономики. 2008. №3. С.32 – 37.
2. Новиков А.И., Солодкая Т.И. Задача оптимизации и построения эффективной границы инвестиционного портфеля финансовых активов // Фундаментальные и прикладные исследования кооперативного сектора экономики. 2009. №1. С.41 – 46.
3. Криничианский К.В., Безруков А.В. Некоторые практические задачи модели оптимизации портфеля // Журнал экономической теории.2012. №3. С.142 – 147.
4. Одинцов Б.Е. Обратные вычисления в формировании экономических решений. // М.: Финансы и статистика, 2004. С.256
5. Одинцов Б.Е., Романов А.Н. Итерационный метод оптимизации управления предприятиями средствами обратных вычислений // Вестник Финансового университета. 2014. №2. С. 60 – 73
6. Грибанова Е.Б. Решение задачи оптимизации закупок с помощью обратных вычислений // Экономический анализ: теория и практика. – 2018. – Т.17, №3. – С. 586 – 596.
7. Сапарова Г.Б., Маматова Р., Математическая модель прогнозирования финансового состояния предприятия // Вестник Жалал – абадского государственного университета. 2016. С. 6 – 11.
8. Сапарова Г.Б., Асанова С. Экономико – математическое моделирование влияния информационных технологий на доходность банковских операций // Известия Ошский технологический университет им. М.М. Адышева. 2016. С.47 – 52.