УДК 517.968
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_1(4)_32

НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Рахмонов Фарход Дустмуродович, Доктор Философии
farxod_frd@bk.ru
Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека
Ташкент, Узбекистан

Аннотация. *Рассмотрены вопросы разрешимости нелокальной краевой задачи для одного псевдопараболического дифференциального уравнения. С помощью метода ряда Фурье получена счетная система обыкновенных интегральных уравнений Фредгольма второго рода для определения коэффициентов неизвестной функции. При доказательстве однозначной разрешимости счетной системы применен метод последовательных приближений в сочетании его с методом сжимающих отображений. Показаны абсолютная и равномерная сходимость и возможность почленного дифференцирования полученных рядов Фурье. Результаты работы сформулированы в виде теорем.*

Ключевые слова: *Уравнение псевдопараболического типа, счетная система, интегральное условие, интегральное уравнение Фредгольма, разрешимость.*

NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A HIGH-ORDER PSEUDOPARABOLIC DIFFERENTIAL EQUATION

Rakhmonov Farhod Dustmurodovich, Doctor of Philosophy
farxod_frd@bk.ru
National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek
Tashkent, Uzbekistan

Annotation. *The questions of solvability of a nonlocal boundary value problem for a pseudoparabolic differential equation are considered. Using the Fourier series method, a countable system of Fredholm ordinary integral equations of the second kind is obtained to determine the coefficients of an unknown function. In proving the unique solvability of the countable system, the method of successive approximations was used in combination with the method of contraction mappings. The absolute and uniform convergence and the possibility of term-by-term differentiation of the obtained Fourier series are shown. The results of the work are formulated in the form of theorems.*

Keywords: *Pseudoparabolic type equation, countable system, integral condition, Fredholm integral equation, solvability.*

1. Постановка задачи

Нелокальные задачи для дифференциальных уравнений параболического, псевдопараболического и гиперболического типов являются одним из актуальных разделов современной математики. Поэтому по данному разделу математики до сих пор появляются большое количество научных публикаций (см. например [1-14]).

Исследуется классическая разрешимость нелокальной краевой задачи для дифференциального уравнения псевдопараболического типа в одномерной области $\Omega = \{(t,x) \mid 0<t<T,\ 0<x<l\}$:

$$D_{t,x}^{1+4k}[U(t,x)] = f(t,x), \tag{1}$$

где

$$D_{t,x}^{1+4k}=\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}\left[(-1)^k\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}}+\frac{\partial^{4k}}{\partial x^{4k}}\right]-(-1)^k\omega(t)\frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}},$$

T и l - положительные действительные числа, k заданное положительное целое число, $\omega(t)-$ непрерывная функция на отрезке Ω_T, $f(t,x)\in C_{t,x}^{1+4k}(\Omega_T\times\Omega_l)$, $\Omega_T\equiv[0;T]$, $x\in\Omega_l\equiv[0;l]$.

Постановка задачи. Найдем функцию $U(t,x)$, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению (1), следующему нелокальному условию

$$U(0,x)+\int_0^T U(t,x)\,dt=\varphi(x),\quad 0\le x\le l, \tag{2}$$

условиям типа Дирихле для $0\le t\le T$

$$u(t,0)=u(t,l)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,0)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,l)=$$

$$=...=\frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}}u(t,0)=\frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}}u(t,l)=0 \tag{3}$$

и классу функций

$$U(t,x)\in C(\bar{\Omega})\cap C_{t,x}^{1,4k}(\Omega)\cap C_{t,x}^{1+2k}(\Omega), \tag{4}$$

где $\varphi(x)-$ заданная гладкая функция и имеют место условия

$$\varphi(0)=\varphi(l)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(0)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(l)=$$

$$=...=\frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}}\varphi(0)=\frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}}\varphi(l)=0.$$

Мы также предполагаем, что для заданной функции $f(t,x)$ верны следующие граничные условия

$$f(t,0)=f(t,l)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(t,0)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(t,l)=$$

$$=...=\frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}}f(t,0)=\frac{\partial^{4k-2}}{\partial x^{4k-2}}f(t,l)=0.$$

2. Разложение решения задачи (1)-(4) в ряд Фурье

Нетривиальные решения краевой задачи (1)-(4) ищутся в виде ряда Фурье

$$U(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)\vartheta_n(x), \tag{5}$$

где

$$u_n(t)=\int_0^l U(t,x)\,\vartheta_n(x)\,d\,x, \tag{6}$$

$$\vartheta_n(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\,\sin\frac{\pi n}{l}x, \quad n=1,2,\dots$$

Предполагаем, что следующая функция тоже разлагается в ряд Фурье

$$f(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\,\vartheta_n(x), \tag{7}$$

где

$$f_n(t)=\int_0^l f(t,x)\,\vartheta_n(x)\,d\,x. \tag{8}$$

Подставляя ряды Фурье (5) и (7) в псевдопараболическое уравнение (1), получаем счетную систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно переменной t

$$u'_n(t)-\lambda_n\omega(t)\,u_n(t)=\frac{f_n(t)}{1+\mu_n^{2k}+\mu_n^{4k}}\,, \tag{9}$$

где $\lambda_n=\dfrac{\mu_n^{2k}}{1+\mu_n^{2k}+\mu_n^{4k}}, \quad \mu_n^{4k}=\left(\dfrac{\pi n}{l}\right)^{4k}$.

Интегрируем счетную систему дифференциальных уравнений первого порядка (9) и получаем

$$u_n(t)=A_n+\lambda_n\int_0^t\left[\omega(s)\,u_n(s)+\frac{f_n(s)}{1+\mu_n^{2k}+\mu_n^{4k}}\right]d\,s, \tag{10}$$

где A_n − произвольные постоянные.

С помощью коэффициентов Фурье (6) интегральное условие (2) записывается в следующем виде

$$u_n(0)+\int_0^T u_n(t)\,d\,t=\int_0^l\left(U(0,x)+\int_0^T U(t,x)\,d\,t\right)\vartheta_n(x)\,d\,x=$$

$$=\int_0^l \varphi(x)\,\vartheta_n(x)\,d\,x=\varphi_n. \tag{11}$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов A_n в (10), воспользуемся условием (11). Поэтому из (10) получим

$$u_n(0)=A_n,\; A_nT+\lambda_n\int_0^T(T-s)\left[\omega(s)\,u_n(s)+\frac{f_n(s)}{1+\mu_n^{2k}+\mu_n^{4k}}\right]ds.$$

Подставляя эти величины в условие (11), получим

$$A_n(1+T)=\varphi_n-\lambda_n\int_0^T(T-s)\left[\omega(s)u_n(s)+\frac{f_n(s)}{1+\mu_n^{2k}+\mu_n^{4k}}\right]ds.$$

Отсюда находим неизвестный коэффициент интегрирования:

$$A_n=\frac{\varphi_n}{1+T}-\frac{\lambda_n}{1+T}\int_0^T(T-s)\left[\omega(s)u_n(s)+\frac{f_n(s)}{1+\mu_n^{2k}+\mu_n^{4k}}\right]ds. \qquad (12)$$

Подставляя (12) в уравнение (10), получаем счетную систему интегральных уравнений Фредгольма второго рода

$$u_n(t)=\Im(t;u_n(t))\equiv\frac{\varphi_n}{1+T}+\int_0^T H_n(s)\left[\omega(s)u_n(s)+\frac{f_n(s)}{1+\mu_n^{2k}+\mu_n^{4k}}\right]d\,s, \qquad (13)$$

где

$$H_n(s)=\begin{cases}-\dfrac{\lambda_n}{1+T}(T-s),\ t<s\le T,\\ \lambda_n-\dfrac{\lambda_n}{1+T}(T-s),\ 0\le s<t.\end{cases} \qquad (14)$$

Подставляя представление коэффициентов Фурье (13) неизвестной функции в ряд Фурье (5), получаем формальное решение краевой задачи (1)-(4)

$$U(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\vartheta_n(x)\left\{\frac{\varphi_n}{1+T}+\int_0^T H_n(s)\left[\omega(s)u_n(s)+\frac{f_n(s)}{1+\mu_n^{2k}+\mu_n^{4k}}\right]d\,s\right\}. \qquad (15)$$

3. Однозначная разрешимость системы из счетных систем интегральных уравнений Фредгольма (13)

Условия гладкости. Пусть для функций

$$\varphi(x)\in C^{4k}\left(\Omega_l\right),\quad f(t,x)\in C^{1,4k}\left(\Omega\right)$$

в области существуют кусочно-непрерывные производные по переменной x порядка $4k+1$. Тогда, интегрируя по частям функций (8) и (11) $4k+1$ раз по переменной x, получаем следующие соотношения

$$|\varphi_n|=\left(\frac{l}{\pi}\right)^{4k+1}\frac{\left|\varphi_n^{(4k+1)}\right|}{n^{4k+1}}, \qquad (16)$$

$$|f_n(t)|=\left(\frac{l}{\pi}\right)^{4k+1}\frac{\left|f_n^{(4k+1)}(t)\right|}{n^{4k+1}}, \qquad (17)$$

где

$$\varphi_n^{(4k+1)}=\int_0^l\frac{\partial^{4k+1}\varphi(x)}{\partial x^{4k+1}}\vartheta_n(x)\,d\,x,\ i=1,2,$$

$$f_n^{(4k+1)}(t)=\int_0^l\frac{\partial^{4k+1}f(t,x)}{\partial x^{4k+1}}\vartheta_n(x)\,d\,x.$$

Здесь также имеют место неравенства Бесселя

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\varphi_n^{(4k+1)}\right]^2 \le \left(\frac{2}{l}\right)^{4k+1}\int_0^l\left[\frac{\partial^{4k+1}\varphi(x)}{\partial x^{4k+1}}\right]^2 dx, \tag{18}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[f_n^{(4k+1)}(t)\right]^2 \le \left(\frac{2}{l}\right)^{4k+1}\int_0^l\left[\frac{\partial^{4k+1} f(t,x)}{\partial x^{4k+1}}\right]^2 dx. \tag{19}$$

Теорема 1. Пусть выполняются условия гладкости (16) и (17) и условия: $\rho = T\left(\frac{l}{\pi}\right)^{4k}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4k}}} < 1$. Тогда счетная система (13) однозначно разрешима в пространстве $B_2(T)$. При этом искомое решение может быть найдено из следующего итерационного процесса:

$$\begin{cases} u_n^0(t) = \dfrac{\varphi_n}{1+T}, \\ u_n^{m+1}(t) = \Im(t; u_n^m(t)),\ m = 0,1,2,... \end{cases} \tag{20}$$

Доказательство. Мы используем метод сжимающих отображений в пространстве $B_2(T)$. С учетом формул (16) применяем неравенство Коши-Буняковского и затем применяем неравенства Бесселя (18). Тогда получаем из приближения (20), что справедлива следующая оценка:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\max_{t\in\Omega_T}\left|u_n^0(t)\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\varphi_n}{1+T}\right| \le \left(\frac{l}{\pi}\right)^{4k+1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\varphi_{1,n}^{(4k+1)}\right|}{n^{4k+1}} \le$$

$$\le \left(\frac{l}{\pi}\right)^{4k+1}\left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right)^{4k+1}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{8k+2}}}\left\|\frac{\partial^{4k+1}\varphi(x)}{\partial x^{4k+1}}\right\|_{L_2(\Omega_l)} < \infty. \tag{21}$$

Теперь для разности произвольных приближений (20) получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\max_{t\in\Omega_T}\left|u_n^{m+1}(t) - u_n^m(t)\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^T\max_{s\in\Omega_T}\left|H_n(s)\right|\cdot\left|u_n^m(s) - u_n^{m-1}(s)\right| ds \le$$

$$\le \int_0^T\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\max_{s\in\Omega_T}\left|H_n(s)\right|^2}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\max_{s\in\Omega_T}\left|u_n^m(s) - u_n^{m-1}(s)\right|^2} ds. \tag{22}$$

Из (14) видно, что справедлива оценка

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\max_{s\in\Omega_T}\left|H_n(s)\right|^2} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\max_{s\in\Omega_T}\left|\lambda_n\frac{1+s}{1+T}\right|^2} \le \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left|\lambda_n\right|^2} =$$

$$= \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\mu_n^{2k}}{1+\mu_n^{2k}+\mu_n^{4k}}\right|^2} \le \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_n^{4k}}} = \left(\frac{l}{\pi}\right)^{4k}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4k}}}.$$

С учетом этой оценки, из (22) получим

$$\left\|u^{m+1}(t) - u^m(t)\right\|_{B_2(T)} \le \rho\cdot\left\|u^m(t) - u^{m-1}(t)\right\|_{B_2(T)}, \tag{23}$$

$$\rho = T\left(\frac{l}{\pi}\right)^{4k}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4k}}}\,.$$

Согласно условию теоремы, $\rho < 1$. Следовательно, из оценки (23) следует, что оператор $\Im$ в правой части (13) сжимающий. Из оценок (21) и (23) следует, что существует единственная неподвижная точка, которая является решением счетной системы (13) в пространстве $B_2(T)$. Теорема доказана.

4. Неизвестная функция

Теорема 2. Неизвестная функция $U(t,x)$ определяется с помощью ряда Фурье (15). При этом функция (15) непрерывно дифференцируема по переменным, входящим в уравнение (1).

Доказательство. С учетом того, что $u(t)\in B_2(T)$ и формул (16)-(19), получаем оценку

$$\left|U(t,x)\right| \le \sum_{n=1}^{\infty}\left|\vartheta_n(x)\right|\cdot\left|\frac{\varphi_n}{1+T}+\int_0^T H_n(s)\left[\omega(s)u_n(s)+\frac{f_n(s)}{1+\mu_n^{2k}+\mu_n^{4k}}\right]ds\right| \le$$

$$\le\left(\frac{2}{l}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{l}{\pi}\right)^{4k+1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left|\varphi_n^{(4k+1)}\right|}{n^{4k+1}}+\left(\frac{2}{l}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^T\left|\omega(s)\right|\sum_{n=1}^{\infty}\left|H_n(s)\right|\cdot\left|u_n(s)\right|+$$

$$+\left(\frac{2}{l}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^T\sum_{n=1}^{\infty}\left|H_n(s)\right|\cdot\left|\frac{f_n(s)}{1+\mu_n^{2k}+\mu_n^{4k}}\right|ds \le$$

$$\le\left(\frac{2}{l}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\frac{2}{l}}\right)^{4k+1}\left(\frac{l}{\pi}\right)^{4k+1}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4k+1}}}\left\|\frac{\partial^{4k+1}\varphi(x)}{\partial x^{4k+1}}\right\|_{L_2(\Omega_l)}+$$

$$+\left(\frac{2}{l}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^T\left|\omega(s)\right|ds\left(\frac{l}{\pi}\right)^{4k}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4k}}}\,\|u(t)\|_{B_2(T)}+$$

$$+\left(\frac{2}{l}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{l}{\pi}\right)^{4k}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4k}}}\int_0^T\|f(s)\|_{B_2(T)}\,ds<\infty, \tag{24}$$

так как согласно формулам (17) и (19) справедлива оценка

$$\|f(t)\|_{B_2(T)} \le \sum_{n=1}^{\infty}\max_{t\in\Omega_T}\left|f_n(t)\right| \le \left(\frac{l}{\pi}\right)^{4k+1}\sum_{n=1}^{\infty}\max_{t\in\Omega_T}\frac{\left|f_n^{(4k+1)}(t)\right|}{n^{4k+1}} \le$$

$$\le\left(\frac{l}{\pi}\right)^{4k+1}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{8k+2}}}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\max_{t\in\Omega_T}\left|f_n^{(4k+1)}(t)\right|^2} \le$$

$$\le\left(\frac{2}{l}\right)^{\frac{4k+1}{2}}\left(\frac{l}{\pi}\right)^{4k+1}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{8k+2}}}\sqrt{\max_{t\in\Omega_T}\int_0^l\left[\frac{\partial^{4k+1}f(t,x)}{\partial x^{4k+1}}\right]^2dx}<\infty.$$

Из (24) следует абсолютная и равномерная сходимость ряда Фурье (15). Непрерывная дифференцируемость функции (15) по переменным, входящим в уравнение (1), доказывается аналогично.

Теорема 2 доказана.

Литература

1. Asanova A. T. On solvability of nonlinear boundary value problems with integral condition for the system of hyperbolic equations // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. 2015. Vol. 63. P. 1–13.
2. Asanova A. T. One approach to the solution of a nonlocal problem for systems of hyperbolic equations with integral conditions // Journal of Mathematical Sciences. 2019.Vol. 238. № 3. P. 189–206.
3. Yuldashev T. K., Rakhmonov F. D. Nonlocal problem for a nonlinear fractional mixed type integro-differential equation with spectral parameters // AIP Conference Proceedings. 2021. Vol. 2365. № 060003. 20 p.
4. Yuldashev T. K., Rakhmonov F. D. Nonlocal inverse problem for a pseudoheperbolic-pseudoelliptic type differential equation //AIP Conference Proceedings. 2021. Vol. 2365. № 060004. 21p.
5. Александров В. М., Коваленко Е. В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. Москва: Наука, 1986. 336 с.
6. Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: СО «Наука», 1983. 319 с.
7. Бердышев А. С. Нелокальные краевые задачи для уравнения смешанного типа в области с отходом от характеристики // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29. № 12. С. 2117–2124.
8. Гордезиани Д. Г., Авалишвили Г. А. Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды // Математическое моделирование. 2000. Т. 12. № 1. С. 94–103.
9. Дмитриев В. Б. Нелокальная задача с интегральными условиями для волнового уравнения // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2006. № 2 (42). С. 15–27.
10. Иванчов Н. И. Краевые задачи для параболического уравнения с интегральным условием // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40. №4. С. 547–564.
11. Ионкин Н. И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13. №2. С. 294–304.
12. Нахушев А. М. Нелокальная задача и задача Гурса для нагруженного уравнения гиперболического типа и их приложения к прогнозу почвенной влаги // Доклады АН СССР. 1978. Т. 242. №5. С. 1008–1011.
13. Прилепко А. И., Ткаченко Д. С. Свойства решений параболического уравнения и единственность решения обратной задачи об источнике с интегральным переопределением // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2003. Т. 43. №4. С. 562–570.
14. Тахиров Ж. О., Тураев Р. Н. Об одной нелокальной задаче для нелинейного параболического уравнения // Владикавказский математический журнал. 2014. Т. 16. № 1. С. 42–49.