УДК 517.95
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_1(4)_31

АНАЛОГ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ

Окбоев Акмалжон Бахромжонович, PhD
akmaljon12012@gmail.com
Институт математики имени В.И.Романовского АН РУз
Ташкент, Узбекистан

Аннотация. *В работе исследована задача Трикоми для уравнения параболо-гиперболического типа в смешанной области. Параболическая часть рассматриваемого уравнения состоит из дробной производной по Риману-Лиувиллю, а гиперболическая часть состоит из вырождающегося гиперболического уравнения второго рода. Решение поставленной задачи в гиперболической подобласти найдено как решение задачи Коши, а в параболической подобласти - как решение первой краевой задачи. Для доказательства существования решения задачи используется теория интегральных уравнений Вольтерра второго рода.*

Ключевые слова: *Уравнение параболо-гиперболического типа, смешанная область, задача Трикоми, задача Коши, первая краевая задача.*

AN ANALOG OF THE TRICOMI PROBLEM FOR A MIXED TYPE EQUATION WITH RIEMANN-LIOUVILLE FRACTIONAL DERIVATIVE

Akmaljon Okboev Bakhromjonovich, PhD
akmaljon12012@gmail.com
V.I. Romanovskii Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences
Tashkent, Uzbekistan

Abstract. *In this article, the Tricomi problem for a parabolic-hyperbolic type equation in a mixed domain is investigated. Riemann-Liouville fractional derivative participates in the parabolic part of the considerated equation, and the hyperbolic part consists of a degenerate hyperbolic equation of the second kind. The solution of the problem in the hyperbolic sub-domain is found as a solution to the Cauchy problem, and in a parabolic sub-domain as a solution to the first boundary value problem. For proving the existence of the solution of the problem, the theory of second kind Volterra integral equations is used.*

Key words: *parabolic-hyperbolic type equation, mixed domain, Tricomi problem, Cauchy problem, first boundary value problem.*

Введение. В этой работе в области $\Omega = \Omega_1 \bigcup \Omega_2 \bigcup AB$ для уравнения

$$0 = \begin{cases} L_1(u) \equiv \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - D_{0y}^{\delta} u - \lambda^2 u, & (x,y) \in \Omega_1, \\ L_{\alpha,\lambda}(u) \equiv \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha\dfrac{\partial u}{\partial y} - \lambda^2 u, & (x,y) \in \Omega_2 \end{cases} \tag{1}$$

сформулируем и исследуем задачи Трикоми, где Ω_1-область, ограниченная при $y > 0$ отрезками AB, BB_0, A_0B_0, AA_0 прямых $y = 0, x = 1, y = 1, x = 0$ соответственно, Ω_2 - область, ограниченная при $y < 0$ дугами AC, BC, AB характеристик $x - 2\sqrt{-y} = 0$, $x + 2\sqrt{-y} = 1$,

$y=0$ уравнения (1), $\delta \in (0,1)$ $\alpha \in (-1/2,0)$, а λ - действительное или чисто мнимое число, $D_{0x}^{\alpha}\varphi(x)$ - интегро-дифференциальный оператор порядка α в смысле Римана-Лиувилля

$$D_{0x}^{\alpha}\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(-\alpha)}\displaystyle\int_0^x \dfrac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha+1}}, \ \alpha<0,\\ \varphi(x), \quad \alpha=0,\\ \dfrac{d^n}{dx^n}D_{0x}^{\alpha-n}\varphi(x), \quad \alpha>0.\end{cases}$$

Постановка задачи

Определение 1. *Регулярным в области* Ω_1 *решением уравнения (1), называется функция* $u(x,y)$, *удовлетворяющая в области* Ω_1 *уравнению (1) и следующим условиям* $D_{0y}^{\delta-1}u(x,y)\in C(\overline{\Omega_1})$, $u_{xx}(x,y), D_{0y}^{\delta}u(x,y)\in C(\Omega_1)$.

Задача T_0**.** Требуется определить функцию $u(x,y)$, обладающую следующими свойствами: а) $u(x,y)$ является регулярным решением уравнения (1) в области Ω_1 и решением класса R_{00}^{λ} в области Ω_2; б) на линии вырождения выполняется условие склеивания

$$\lim_{y\to -0}u(x,y)=\lim_{y\to +0}y^{1-\delta}u(x,y), \quad 0\le x\le 1;$$

$$\lim_{y\to -0}(-y)^{\alpha}\frac{\partial}{\partial y}\left[u(x,y)-A_{\alpha}^{-}(\tau,\lambda)\right]=\lim_{y\to +0}y^{1-\delta}\frac{\partial}{\partial y}\left[y^{1-\delta}u(x,y)\right], \quad 0<x<1;$$

в) на границе области Ω удовлетворяет граничным условиям

$$u\big|_{AA_0}=\varphi_0(y), \ u\big|_{BB_0}=\varphi_1(y), \ 0\le y\le 1; \tag{2}$$

$$u\big|_{AC}=\psi(x), \ 0\le x\le 1/2, \tag{3}$$

где $A_{\alpha}^{-}(\tau,\lambda)$ – определяется формулой

$$A_{\alpha}^{-}(\tau,\lambda)=\gamma_1\int_0^1\tau(\zeta)\left[z(1-z)\right]^{\beta}\bar{J}_{\beta}(\sigma)\,dz+\frac{8\gamma_1 y}{(1+\beta)(1+2\beta)}\times$$

$$\times\int_0^1\left(\lambda^2-\frac{d^2}{d\zeta^2}\right)\tau(\zeta)\left[z(1-z)\right]^{1+\beta}\bar{J}_{1+\beta}(\sigma)\,dz,$$

$\gamma_1=\Gamma(1+2\alpha)/\Gamma^2(1/2+\alpha)$, $\quad \sigma=4\lambda\sqrt{-yz(1-z)}$, $\quad \zeta=x-2\sqrt{-y}(1-2z)$, $\quad \tau(x)=u(x,-0)$, $J_{\gamma}(z)$ - функция Бесселя первого рода, $\bar{J}_{\gamma}(z)=\Gamma(\gamma+1)(z/2)^{-\gamma}J_{\gamma}(z)$, *т.е.* $\bar{J}_{\gamma}(z)=\Gamma(\gamma+1)\sum_{m=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^m(z/2)^{2m}}{m!\,\Gamma(m+\gamma+1)}$, $\gamma\neq -1,-2,-3,\dots$, а $\varphi_0(y),\varphi_1(y)$ и $\psi(x)$ – заданные непрерывные функции.

Отметим, что Н.К.Мамадалиев [1, 2] исследовал различные задачи для уравнения (1) при различных значениях α, когда $\delta=1$, $\lambda=0$. В работе [3] изучено нелокальная краевая задача для уравнения (1) при $\alpha=\alpha_0-n, \alpha_0\in(1/2,1), n=2,3,\dots$ и $\delta=1$. В работе

[4] поставленна и исследована задача Трикоми для уравнения (1) при $\alpha=\alpha_0-n,\alpha_0\in(1/2,1),n=2,3,...$ и $\delta=1$.

Свойства некоторых операторов с функциями Бесселя в ядрах.

Рассмотрим следующие интегральные операторы [5]:

$$A_{kx}^{1,\lambda}\left[g(x)\right]=g(x)-\int_k^x g(t)\frac{t-k}{x-k}\frac{\partial}{\partial t}J_0\left[\lambda\sqrt{(x-k)(x-t)}\right]dt, \tag{4}$$

$$B_{kx}^{1,\lambda}\left[g(x)\right]=g(x)+\int_k^x g(t)\frac{\partial}{\partial x}J_0\left[\lambda\sqrt{(k-t)(x-t)}\right]dt. \tag{5}$$

Свойство 1. *Если* $g(x)\in C(0,1)\cap L_1[0,1]$, *то выражения* $A_{kx}^{1,\lambda}\left[g(x)\right]$ *и* $B_{kx}^{1,\lambda}\left[g(x)\right]$ *будут определены в* $(0,1)$ *и принадлежат классу* $C(0,1)$.

Справедлива следующая теорема и лемма:

Теорема 1[5]. *Если* $g(x)\in C[0,1]$, *то для любых* $k\in[0,1]$ *и* $x\in(0,1)$ *справедливы следующие равенства:* $A_{kx}^{1,\lambda}B_{kx}^{1,\lambda}\left[g(x)\right]=g(x), B_{kx}^{1,\lambda}A_{kx}^{1,\lambda}\left[g(x)\right]=g(x),$ *т.е. в классе непрерывных на* $[0,1]$ *функций операторы (4) и (5) являются взаимно обратными.*

Лемма 1[5]. *При* $\beta<1$ *и* $x\in[0,1]$ *справедливы равенства*

$$\int_0^x (x-t)^{-\beta}\bar{J}_{-\beta}\left[\lambda\sqrt{t(x-t)}\right]g(t)\,dt=\Gamma(1-\beta)D_{0x}^{\beta-1}\left\{B_{0x}^{1,\lambda i}\left[g(x)\right]\right\}, \tag{6}$$

$$\int_x^1 (t-x)^{-\beta}\bar{J}_{-\beta}\left[\lambda\sqrt{(t-x)(1-t)}\right]g(t)\,dt=\Gamma(1-\beta)D_{x1}^{\beta-1}\left\{B_{x1}^{1,\lambda i}\left[g(x)\right]\right\}.$$

Исследование задачи T_0

Рассмотрим уравнение (1) в области Ω_2, т.е. рассмотрим уравнение $L_{\alpha,\lambda}(u)=0$. Непрерывное в $\bar{\Omega}_2$ решение видоизмененной задачи Коши для уравнения $L_{\alpha,\lambda}(u)=0$, с начальными данными

$$u(x,y)\big|_{y=0}=\tau(x),\ 0\leq x\leq 1; \tag{7}$$

$$\lim_{y\to -0}(-y)^{\alpha}\left(\partial/\partial y\right)\left[u-A_{\alpha}^{-}(\tau,\lambda)\right]=\nu(x),\ \ 0<x<1, \tag{8}$$

в характеристических переменных $\xi=x-2\sqrt{-y}$, $\eta=x+2\sqrt{-y}$ имеет вид

$$u(x,y)=A_{\alpha}^{-}(\tau,\lambda)-2^{-2+4\beta}\gamma_2\int_{\xi}^{\eta}(\eta-t)^{-\beta}(t-\xi)^{-\beta}\bar{J}_{-\beta}(\sigma)\nu(t)\,dt, \tag{9}$$

где $\gamma_2=2\Gamma(2-2\alpha)/\Gamma^2(3/2-\alpha)$, $\sigma=\lambda\sqrt{(\eta-t)(t-\xi)}$,

$$A_{\alpha}^{-}(\tau,\lambda)=\gamma_1(\eta-\xi)^{-1-2\beta}\int_{\xi}^{\eta}(\eta-t)^{\beta}(t-\xi)^{\beta}\bar{J}_{\beta}(\sigma)\tau(t)\,dt-$$

$$-\frac{\gamma_1(\eta-\xi)^{-1-2\beta}}{2(1+2\beta)(\beta+1)}\int_{\xi}^{\eta}(\eta-t)^{\beta+1}(t-\xi)^{\beta+1}\bar{J}_{\beta+1}(\sigma)\left[\lambda^2\tau(t)-\tau''(t)\right]dt.$$

Определение 2. Функция $u(x,y)$, определяемая в области Ω_2 формулой (9), называется решением уравнения $L_{\alpha,\lambda}(u)=0$ из класса R_{0p}^{λ} при $-1/2<\alpha<0$, если функция $\tau(x)$ представима в виде

$$\tau(x)=sign(x-p)\int_p^x |x-t|^{-2\beta}\,\bar{I}_{-\beta}\left[\lambda(x-t)\right]T(t)dt,$$

где $\nu(x),\,T(x)\in C[0,1]\cap C^1(0,1)$ и $\nu'(x),\,T'(x)\in L(0,1)$.

Согласно определению 2, функция $u(x,y)$, определенная в области Ω_2 в виде (9), называется решением уравнения $L_{\alpha,\lambda}(0)=0$ из класса R_{00}^{λ}, если функция $\tau(x)$ представима в виде

$$\tau(x)=\int_0^x (x-s)^{-2\beta}\,\bar{I}_{-\beta}\left[\lambda(x-s)\right]T(s)ds, \tag{10}$$

а $\nu(x),T(x)\in C[0,1]\cap C^1(0,1)$ и $\nu'(x),\,T'(x)\in L(0,1)$.

Из (10) вытекает, $\tau(x)\in C^3[0,1]$ и

$$\tau(0)=0,\ \tau'(0)=0. \tag{11}$$

Решения задачи {(1), (7), (8)} из класса R_{00}^{λ} в области Ω_2 имеет вид

$$u(x,y)=\int_0^{\xi}(\eta-s)^{-\beta}(\xi-s)^{-\beta}\,\bar{I}_{-\beta}\left[\lambda\sqrt{(\eta-s)(\xi-s)}\right]T(s)ds+$$

$$+\int_{\xi}^{\eta}(\eta-s)^{-\beta}(s-\xi)^{-\beta}\,\bar{J}_{-\beta}\left[\lambda\sqrt{(\eta-s)(s-\xi)}\right]N(s)ds, \tag{12}$$

где $N(s)=(2cos\pi\beta)^{-1}T(s)-4^{2\beta-1}\gamma_2\nu(s)$.

Подчиняя решение (12) краевому условию (3), получаем уравнение относительно $N(\eta)$:

$$\int_0^{\eta}(\eta-s)^{-\beta}s^{-\beta}\bar{J}_{-\beta}\left[\lambda\sqrt{(\eta-s)s}\right]N(s)ds=\psi\left(\frac{\eta}{2}\right),\quad 0\le\eta\le1.$$

Последнее уравнение, в результате применения равенства (6), можно привести к виду, удобному для дальнейшего исследования:

$$D_{0\eta}^{\beta-1}\left\{B_{0\eta}^{1,\lambda i}\left[\eta^{-\beta}N(\eta)\right]\right\}=\frac{1}{\Gamma(-\beta+1)}\psi\left(\frac{\eta}{2}\right),\ 0\le\eta\le1. \tag{13}$$

Применяя к обеим частям уравнения (13) последовательно операторы $D_{0\eta}^{1-\beta}$, $A_{0\eta}^{1,\lambda i}$ и учитывая равенства $D_{0\eta}^{1-\beta}D_{0\eta}^{\beta-1}f(\eta)=f(\eta)$, $A_{0\eta}^{1,\lambda i}B_{0\eta}^{1,\lambda i}g(\eta)=g(\eta)$, а также структуры функции $N(\eta)$, получаем

$$T(x)=\gamma_3\nu(x)+\frac{2cos\pi\beta x^{\beta}}{\Gamma(1-\beta)}A_{0x}^{1,i\lambda}\left[D_{0x}^{1-\beta}\psi\left(\frac{x}{2}\right)\right].$$

Подставляя это значение $T(x)$ в (10), находим соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ на отрезке $[0,1]$, получаемое из области Ω_2:

$$\tau(x)=\gamma_3\int_0^x (x-s)^{-2\beta}\,\bar{I}_{-\beta}\left[\lambda(x-s)\right]\nu(s)ds+$$

$$+\frac{2\cos\pi\beta}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^x (x-s)^{-2\beta}\,\bar{I}_{-\beta}\left[\lambda(x-s)\right]s^{\beta}A_{0s}^{1,\lambda}\left[D_{0\zeta}^{1-\beta}\psi\left(\frac{s}{2}\right)\right]ds,\ 0\le x\le 1, \qquad (14)$$

где $\gamma_3=2\cdot4^{2\beta-1}\gamma_2 cos\pi\beta$.

Согласно условиям задачи T_0, в уравнении (1) и в условиях (2) можно перейти к пределу при $y\to+0$ (например, см. [6], [7]). В результате получим следующие соотношения:

$$\tau''(x)-\Gamma(1+\delta)\nu(x)-\lambda^2\tau(x)=0,\quad 0\le x\le 1, \qquad (15)$$

$$\tau(0)=\lim_{y\to+0}y^{1-\delta}\varphi_1(y)=a,\ \tau(1)=\lim_{y\to+0}y^{1-\delta}\varphi_2(y)=b. \qquad (16)$$

Если считать, что $\nu(x)$ - известная функция, то при $\lambda\in R$ или $\lambda i\in R$, $\lambda i\ne\pi m,\ m\in Z$ задача {(15), (16)} имеет единственное решение [8]

$$\tau(x)=a+x(b-a)+$$

$$+\lambda^2\int_0^1 G(x,t;\lambda)\left[a+t(b-a)\right]dt+\Gamma(1+\delta)\int_0^1 G(x,t;\lambda)\nu(t)dt, \qquad (17)$$

где $G(x,t;\lambda)$ - функция Грина задачи {(15), (16)}

$$G(x,t;\lambda)=\begin{cases}\dfrac{sh\lambda(x-t)sh\lambda t}{\lambda sh\lambda},0\le x\le t,\\[2mm] \dfrac{sh\lambda x\, sh\lambda(t-1)}{\lambda sh\lambda},t\le x\le 1.\end{cases}$$

Из формулы (17), в силу равенства (11), вытекают следующие равенства $a=0,\ b=0$ и

$$\tau(x)=\Gamma(1+\delta)\int_0^1 G(x,t;\lambda)\nu(t)dt. \qquad (18)$$

(18) является основным соотношением между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ на отрезке $[0,1]$, получаемое из области Ω_1.

Теперь из соотношений (18) и (14) найдем неизвестные функции $\tau(x)$ и $\nu(x)$. С этой целью, из (18) и (14) исключим функцию $\tau(x)$:

$$\Gamma(1+\delta)\int_0^1 G(x,t;\lambda)\nu(t)dt=\gamma_3\int_0^x (x-\zeta)^{-2\beta}\,\bar{I}_{-\beta}\left[\lambda(x-\zeta)\right]\nu(\zeta)d\zeta+$$

$$+\frac{2\cos\pi\beta}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^x (x-s)^{-2\beta}\,\bar{I}_{-\beta}\left[\lambda(x-s)\right]s^{\beta}A_{0s}^{1,\lambda}\left[D_{0s}^{1-\beta}\psi\left(\frac{s}{2}\right)\right]ds,\ 0\le x\le 1, \qquad (19)$$

Продифференцируем это равенство дважды по x. Затем, от полученного равенства почленно вычтем равенство (19). В результате, имеем интегральное уравнение относительно $\nu(x)$:

$$\nu(x)-\frac{2\beta(2\beta+1)\gamma_3}{\Gamma(1+\delta)}\int_0^x (x-s)^{-2\beta-2}\,\bar{I}_{-\beta-1}\left[\lambda(x-s)\right]\nu(s)\,ds=Q(x),0\le x\le 1, \quad (20)$$

где

$$Q(x)=\frac{4\beta(2\beta+1)\cos\pi\beta}{\Gamma(1+\delta)\Gamma(1-\beta)}\int_0^x (x-t)^{-2\beta-2}\,\bar{I}_{-\beta-1}\left[\lambda(x-t)\right]\Phi(t)\,dt,$$

$$\Phi(t)=t^{\beta}A_{0t}^{1,\lambda}\left[D_{0t}^{1-\beta}\psi\left(\frac{t}{2}\right)\right].$$

Так как $\alpha\in(-1/2,0)$, то $\beta=\alpha-1/2\in(-1,-1/2)$ и $-2\beta-2\in(-1,0)$. Поэтому ядро интегрального уравнения (20) имеет слабую особенность.

Пусть выполнены следующие условия:

$$\psi^{(m)}(0)=0,\,m=0,1,2\,,\psi'''(s/2)=s^{p}\psi_0(s),\,p>-2-2\beta,\psi_0(s)\in C[0,1]. \quad (21)$$

Докажем, что $Q(x)\in C[0,1]\cap C^1(0,1)$ и $Q'(x)\in L(0,1)$. С учетом (21) и (4), имеем

$$\Phi(t)=\frac{t^{2+2\beta}}{8\Gamma(2+\beta)}\int_0^1 (1-z)^{1+\beta}\,\psi'''\left(\frac{zt}{2}\right)dz-$$

$$-\frac{\lambda^2 t^{4+2\beta}}{32\Gamma(2+\beta)}\int_0^1 s^{3+\beta}\bar{J}_1\left[\lambda t\sqrt{s(1-s)}\right]ds\int_0^1 (1-z)^{1+\beta}\,\psi'''\left(\frac{zts}{2}\right)dz\,,$$

$$\Phi'(t)=\frac{\beta t^{1+2\beta}}{8\Gamma(2+\beta)}\int_0^1 (1-z)^{1+\beta}\,\psi'''\left(\frac{tz}{2}\right)dz+\frac{t^{1+2\beta}}{8\Gamma(1+\beta)}\int_0^1 (1-z)^{\beta}\,\psi'''\left(\frac{zt}{2}\right)dz-$$

$$-\frac{\beta\lambda^2 t^{3+2\beta}}{32\Gamma(2+\beta)}\int_0^1 s^{3+\beta}\bar{J}_1\left[\lambda t\sqrt{s(1-s)}\right]ds\int_0^1 (1-z)^{1+\beta}\,\psi'''\left(\frac{zst}{2}\right)dz+$$

$$+\frac{\lambda^4 t^{5+2\beta}}{128\Gamma(2+\beta)}\int_0^1 s^{3+\beta}(2-s)\bar{J}_2\left[\lambda t\sqrt{s(1-s)}\right]ds\int_0^1 (1-z)^{1+\beta}\,\psi'''\left(\frac{zts}{2}\right)dz\,. \quad (22)$$

Отсюда, в силу $\psi'''(s/2)=s^{p}\psi_0(s),\,p>-2-2\beta,\psi_0(s)\in C[0,1]$, следует, что $\Phi(\zeta)\in C[0,1]$, поэтому $Q(x)\in C[0,1]$. Теперь вычисляем $Q'(x)$:

$$Q'(x)=-\frac{4\beta\cos\pi\beta\lambda^2}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^x (x-t)^{-2\beta-1}\,\bar{I}_{-\beta-1}\left[\lambda(x-t)\right]\Phi(t)\,dt+$$

$$+\frac{4\beta(2\beta+1)\cos\pi\beta}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^x (x-t)^{-2\beta-2}\,\bar{I}_{-\beta-1}\left[\lambda(x-t)\right]\Phi'(t)\,dt-$$

$$-\frac{4\beta\cos\pi\beta\lambda}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^x (x-t)^{-2\beta-1}\,\bar{I}'_{-\beta-1}\left[\lambda(x-t)\right]\Phi'(t)\,dt.$$

Отсюда, согласно (21) и (22) следует, что $Q'(x)\in C(0,1)\cap L(0,1)$. Следовательно, $Q(x)\in C[0,1]\cap C^1(0,1)$ и $Q'(x)\in L(0,1)$.

В силу свойств ядра и правой части интегрального уравнения (20), согласно теории интегральных уравнений Вольтерра второго рода [9], оно имеет единственное решение.

После нахождения функции $\nu(x)$ из (20), функция $\tau(x)$ находится по формуле (18). После этого решение задачи T_0 в области Ω_2 определяется по формуле (12), а в области Ω_1 - как решение первой краевой задачи для уравнения $L_1(u)=0$ с условиями (2) и $\lim\limits_{y\to+0} y^{1-\delta}u(x,y)=\tau(x),\quad 0\le x\le 1$, определяется по формуле [10]

$$u(x,y)=\int_0^1 \tau(t)G(x,y;t,0)dt+\int_0^y \varphi_1(s)G_t(x,y;0,s)ds-\int_0^y \varphi_2(s)G_t(x,y;1,s)ds,$$

где

$$G(x,y;t,s)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left[\Gamma(x-t+2m,y-s)-\Gamma(x+t+2m,y-s)\right],$$

$$\Gamma(x,y)=\frac{1}{2y}\int_{|x|}^{\infty} e_{1,\delta/2}^{1,0}\left(-\frac{\xi}{y^{\delta/2}}\right)J_0\left(\lambda\sqrt{\xi^2-x^2}\right)d\xi,\ e_{\alpha,\beta}^{\mu,\delta}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\mu+\alpha k)\Gamma(\delta-\beta k)},\alpha>\beta.$$

Таким образом, доказана следующая основная

Теорема 2. Если λ – действительное число или чисто мнимое число, отличное от $i\pi n,\ n\in Z,$ а заданные функции удовлетворяют условиям (21) и $y^{1-\delta}\varphi_1(y), y^{1-\delta}\varphi_2(y)\in C[0,1],\ \lim\limits_{y\to+0} y^{1-\delta}\varphi_1(y)=0,\ \lim\limits_{y\to+0} y^{1-\delta}\varphi_2(y)=0$, то задача T_0 имеет единственное решение.

Литература

1. Мамадалиев, Нуманжон К. "О представлении решения видоизмененной задачи Коши." *Сибирский математический журнал* 41, no. 5 (2000): 1087-1097.
2. Мамадалиев, Назиржон Камилжонович. "Об одном подходе к решению задачи Трикоми для уравнения параболо-гиперболического типа." *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук* 9.1 (2007): 66-68.
3. Urinov AK, Okboev AB. Nonlocal boundary-value problem for a parabolic-hyperbolic equation of the second kind. Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020 Sep;41(9):1886-97.
4. Окбоев А.Б. Задача Трикоми для уравнения параболо-гиперболического типа // Бюллетень Института математики. –Ташкент. 2020. №1. –С. 95 – 103
5. Салахитдинов М.С., Уринов А.К. Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром. –Ташкент: Фан, 1997. 168 с.
6. S. Kh. Gekkieva, A boundary value problem for the generalized trans- fer equation with a fractional derivative in a semi-infinite domain. Izv. Kabardino-Balkarsk. Nauchnogo Tsentra RAN 1 (8) (2002), 6-8.
7. Berdyshev, A. S., A. Cabada, and E. T. Karimov. "On a non-local boundary problem for parabolic-hyperbolic equation involving Riemann-Liouville fractional differential operator."
8. Джураев Т. Д., Сопуев А., Мамажонов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. –Ташкент: Фан, 1986. – 220 с.
9. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. – Москва: Физматгиз, 1959. – 232 с.
10. Mamchuev, M.O. Solutions of the Main Boundary Value Problems for a Loaded Second-Order Parabolic Equation with Constant Coefficients, Differ. Uravn., 2016, vol. 52, no. 6, pp. 789–797.