ВЕСТНИК ОШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
МАТЕМАТИКА. ФИЗИКА. ТЕХНИКА. 2024, № 1(4)

УДК 517.928
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_1(4)_27

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ПРОИЗВОДНОЙ ПО ВРЕМЕННО́Й ПЕРЕМЕННОЙ

Мамазиаева Эльмира Амановна, к.ф.-м.н., доцент
mamaziaeva67 @mail.ru
Ошский государственный университет,
Мамбетов Жоомарт Иманалиевич, к.ф.-м.н., доцент
zhoomart_mambetov@mail.ru
Ошский технологический университет
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *В данной работе рассматривается сведение нелинейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка гиперболического типа с производной по временной переменной к системе интегральных уравнений, без приведения рассмотренного уравнения к каноническому виду. Сначала уравнение приводится к виду, удобному для использования метода дополнительного аргумента. Затем используется развитый учеными Кыргызской республики метод дополнительного аргумента. При доказательстве теоремы существования и единственности решения начальной задачи для нелинейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка гиперболического типа с производной по временной переменной используется следствие из принципа сжимающих отображений Банаха.*

Ключевые слова*: дифференциальное уравнение в частных производных, нелинейное уравнение, уравнение гиперболического типа, метод дополнительного аргумента, задача Коши, принцип сжимающих отображений.*

ГИПЕРБОЛАЛЫК ТИПТЕГИ ЭКИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ЖЕКЕЧЕ ТУУНДУЛУУ СЫЗЫКТУУ ЭМЕС ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕНДЕМЕНИ УБАКЫТ ӨЗГӨРМӨСҮ ТУУНДУСУ МЕНЕН ЧЫГАРУУ

Мамазиаева Эльмира Амановна, к.ф.-м.н., доцент
mamaziaeva67 @mail.ru
Ош мамлекеттик университети,
Мамбетов Жоомарт Иманалиевич, к.ф.-м.н., доцент
zhoomart_mambetov@mail.ru
Ош технологиялык университети,
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *Бул эмгекте каралып жаткан тендемени каноникалык түргө келтирбестен, экинчи тартиптеги гиперболалык типтеги сызыктуу эмес жекече туундулу дифференциалдык тендемени убакыттын өзгөрмөсүнө карата туундусу менен интегралдык тендемелер системасына келтирүүнү карайбыз.*

Ал үчүн тендеме кошумча аргумент кийирүү методун колдонуу менен ыңгайлуу формага келтирилет. Андан кийин Кыргыз республикасынын окумуштуулары тарабынан изилденип чыккан кошумча аргументти кийирүү методу колдонулат. Убакыт өзгөрмөсүнө карата туундусу бар гиперболалык типтеги сызыктуу эмес экинчи тартиптеги жекече туундулу дифференциалдык тендемени чечүүдө баштапкы шарттын жашашы жана жалгыздыгы жөнүндөгү теореманы далилдөөдө Банахтын кысып чагылдыруу принциби колдонулат.

Ачкыч сөздөр: *Жекече туундулуу дифференциалдык теңдеме, сызыктуу эмес тендеме, гиперболалык типтеги тендеме, кошумча аргумент кийирүү методу, Коши маселеси, кысып чагылдыруу принциби.*

SOLUTION OF A NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATION IN SECOND-ORDER HYPERBOLIC PARTIAL DERIVATIVES WITH A TIME VARIABLE DERIVATIVE

Mamaziaeva Elmira Amanovna, Ph.D., *associate professor*
mamaziaeva67 @mail.ru
Osh state university,
Mambetov Zhoomart Imanalievich, Ph.D., associate professor
zhoomart_mambetov@mail.ru
Osh Technological University,
Osh, Kyrgyzstan

Abstract. *In this paper, we consider the reduction of a non-linear second- order partial differential equation of hyperbolic type with a derivative with respect to the time variable to a system of is integral equations, without reducing the considered equation to a canonical form. First, the equation is reduced to a form convenient for using the additional argument method. Then the method of an additional argument developed scientists of the Kyrgyz Republic is used. When proving the theorem of existence and uniqueness of the solution of the initial problem for a non-linear second-order partial differential equation of hyperbolic type with a derivative with respect to the time variable, a corollary from the principle of Banach contraction mappings is used.*

Key words: *partial differential equation, non-linear equation, equation of hyperbolic type, method of additional argument, Cauchy problem, contracting mappings principle.*

Введение. В последнее время ведутся работы по распространению метода дополнительного аргумента (МДА) на дифференциальные уравнения в частных производных нового класса. В работах [1-4] предлагается новый способ сведения рассмотренного уравнения к системе интегральных уравнений (СИУ) с использованием МДА.

Постановка задачи. В данной работе рассмотрим применение МДА для уравнения гиперболического типа вида:

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = a^2(t,x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + b(t,x,u(t,x))\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + F(t,x,u), \tag{1}$$

$(t,x) \in G_2(T) = [0,T]\times\mathbf{R}$ с начальными условиями

$$u(0,x) = \varphi(x) \equiv \varphi_0(x), \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x). \tag{3}$$

Используем классы функций из [1]:

$C_b^{(k)}$– класс функций, непрерывных и ограниченных вместе со своими производными до $к$-го порядка.

Теорема. Пусть 1) $\varphi_k(x)\in C_b^{(2-k)}(R),\ k=0,1,\ a(t,x)\in C_b^{(2)}(G_2(T)),\ a(t,x)>0;$

2) $b(t,x,w),\ F(t,x,w)\in C_b^{(2)}(G_2(T)\times R)$ и вместе со своими производными удовлетворяют условию Липшица по переменной w.

Тогда существует такое $T^*\in\mathbf{R}_{++}=(0,\infty)$, что задача (1)-(2)-(3) имеет единственное решение в $C_b^{(2)}(G_2(T^*))$.

Доказательство.

При доказательстве теоремы воспользуемся следующими обозначениями:

$$D[(-1)^i a(t,x)]u = \vartheta_i(t,x), \tag{4}$$

$$\alpha_{ij}(t,x,w)=b(t,x,w)+(-1)^{j}\frac{1}{a(t,x)}(a_t(t,x)+(-1)^{i+1}a(t,x)a_x(t,x)),\ \ i,j=1,2,$$

$$\beta_i(t,x;u)=D[(-1)^{i+1}a(t,x)]\alpha_{i1}(t,x,u(t,x)),\quad \mu_i(t,x,w)=\frac{\partial\alpha_{i1}(t,x,w)}{\partial w},\quad i=1,2.$$

Представим основные этапы доказательства теоремы в виде лемм.

Лемма 1. Задача (1)-(2)-(3) эквивалентна системе интегральных уравнений (СИУ)

$$u(t,x)=\phi_0(p_1(0,t,x))+\int_0^t\vartheta_1(s,p_1(s,t,x))ds; \tag{5}$$

$$\vartheta_i(t,x)=\frac{1}{2}\psi_i(p_i(0,t,x))+\frac{1}{2}\alpha_{i1}(t,x,u)u+\frac{1}{2}\int_0^t\alpha_{i2}(s,p_i,u(s,p_i))\vartheta_i(s,p_i)ds-$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^t\beta_i(s,p_i;u(s,p_i))u(s,p_i)ds-\frac{1}{2}\int_0^t\mu_i(s,p_i,u(s,p_i))u(s,p_i)\vartheta_{3-i}(s,p_i)ds+ \tag{6}$$
$$+\int_0^t F(s,p_i,u(s,p_i))ds,\quad i=1,2;$$

где функции $\psi_i(x)$ определяются из соотношения

$$\left[2\vartheta_i-\alpha_{i1}(t,x,u)u\right]_{t=0}=\psi_i(x),\quad i=1,2:$$
$$\psi_i(x)=2\vartheta_i(0,x)-\alpha_{i1}(t,x,u(0,x))u(0,x)=$$
$$=2(\varphi_1(x)+(-1)^{i}a(0,x)\varphi_0{}'(x))-$$
$$-\left(b(0,x,\varphi_0(x))+(-1)^{i+1}\frac{1}{a(0,x)}(a_t(0,x)+(-1)^{i+1}a(0,x)a_x(0,x))\right)\varphi_0(x).$$

Доказательство Леммы 1.

Пусть $\vartheta_i(t,x),\ i=1,2$ – компоненты решения СИУ (5)-(6). Непосредственным дифференцированием из (5)-(6) имеем (4) и

$$D[(-1)^{i+1}a(t,x)]\vartheta_i(t,x)=\frac{1}{2}\alpha_{i1}(t,x,u)\vartheta_{3-i}(t,x)+$$
$$+\frac{1}{2}\alpha_{i2}(t,x,u)\vartheta_i(t,x)+F(t,x,u),\quad i=1,2.$$

Отсюда получаем выполнение уравнения (1).

Таким образом, мы доказали, что первый компонент решения СИУ (5)-(6) удовлетворяет уравнению (1). Первый компонент решения СИУ(5)-(6) удовлетворяет и начальным условиям (2)-(3).

Теперь покажем, что решение задачи (1)-(2)-(3) является решением СИУ (5)-(6). Для этого запишем уравнение (1) в виде

$$D[(-1)^{i+1}a(t,x)]\left(2\vartheta_i(t,x)+(-1)^{i}\alpha_{i1}(t,x,u))u\right)=\alpha_{i2}(t,x,u)\vartheta_i(t,x)-$$
$$-\beta_i(t,x;u)u-\mu_i(t,x,u)u(t,x)\vartheta_{3-i}(t,x)+2F(t,x,u),\quad i=1,2. \tag{7}$$

Действительно, из (7) имеем:

$$2D[(-1)^{i+1}a(t,x)]\vartheta_i(t,x)-\mu_i(t,x,u)\vartheta_j(t,x)u(t,x)-\beta_i(t,x;u)u(t,x)-$$
$$-\alpha_{i1}(t,x,u)\vartheta_j(t,x)=\alpha_{i2}(t,x,u)\vartheta_i(t,x)-\beta_i(t,x;u)u(t,x)-$$
$$-\mu_i(t,x,u)\vartheta_j(t,x)u(t,x)+2F(t,x,u),\quad i=1,2.$$

Отсюда

$$2D[(-1)^{i+1}a(t,x)]\vartheta_i(t,x)-\alpha_{i1}(t,x,u)\vartheta_j(t,x)=$$
$$=\alpha_{i2}(t,x,u)\vartheta_i(t,x)+2F(t,x,u),\quad i=1,2. \tag{8}$$

Для (8) получаем:

$$2\left[\frac{\partial^2 u(t.x)}{\partial t^2}-a^2(t.x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}+(-1)^i\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}D[(-1)^{i+1}a(t,x)]a(t,x)\right]=$$
$$=\left(b(t,x,u)-\frac{1}{a(t,x)}D[(-1)^{i+1}a(t,x)]a(t,x\right)\left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}+(-1)^{i+1}a(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right)+$$
$$+\left(b(t,x,u)+\frac{1}{a(t,x)}D[(-1)^{i+1}a(t,x)]a(t,x\right)\left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}+(-1)^{i}a(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right)+$$
$$+2F(t,x,u),\quad i=1,2.$$

Отсюда

$$2\left[\frac{\partial^2 u(t.x)}{\partial t^2}-a^2(t.x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}+(-1)^i\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}D[(-1)^{i+1}a(t,x)]a(t,x)\right]=$$
$$=2b(t,x,u)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}+2(-1)^i\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}D[(-1)^{i+1}a(t,x)]a(t,x)+$$
$$+2F(t,x,u),\quad i=1,2.$$

Таким образом, мы показали, что из (7) получается уравнение (1).

Введя обозначение $z(t,x;u)=2\vartheta_i(t,x)+(-1)^i\alpha_{i1}(t,x,u)u(t,x),$ запишем (7) в виде:

$$D[(-1)^{i+1}a(t,x)]z(t,x;u)=\alpha_{i2}(t,x,u)\vartheta_i(t,x)-$$
$$-\beta_i(t,x;u)u-\mu_i(t,x,u)u(t,x)\vartheta_{3-i}(t,x)+2F(t,x,u),\quad i=1,2. \tag{9}$$

Для задачи (9), с учетом определения функций $\psi_i(x)$, применяя метод дополнительного аргумента, имеем

$$z(t,x;u)=\psi_i(p_i(0,t,x))+\int_0^t\alpha_{i2}(s,p_i,u(s,p_i))\vartheta_i(s,p_i)ds-$$
$$-\int_0^t\beta_i(s,p_i;u(s,p_i))u(s,p_i)ds-\int_0^t\mu_i(s,p_i,u(s,p_i))u(s,p_i)\vartheta_{3-i}(s,p_i)ds+ \tag{10}$$
$$+2\int_0^t F(s,p_i,u(s,p_i))ds,\quad i=1,2.$$

В самом деле, дифференцируя (10), получаем (9). Из (10) следует также выполнение начальных условий.

Из обозначения (4) методом дополнительного аргумента получаем (5).

Лемма доказана.

Лемма 2. Существует такое $T^*\in\boldsymbol{R}_{++}$, что СИУ (5)-(6) имеет единственное решение в области $G_2(T^*)$.

Доказательство. Запишем СИУ (5)-(6) в виде одного векторного равенства

$$\theta(t,x)=A(t,x;\theta), \tag{11}$$

в котором $\theta=(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ - вектор-функция переменных (t,x), компоненты которой есть искомые функции, $\theta_1=\vartheta_1(t,x),\quad \theta_2=\vartheta_2(t,x),\ \theta_3=u(t,x),$

Здесь компоненты оператора $A=(A_1,A_2,A_3)$ определяются равенствами:

$$A_i(t,x;\theta)=\frac{1}{2}\psi_i(p_i(0,t,x))+\frac{1}{2}\alpha_{i1i}(t,x,\theta_1)\theta_1+$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^t\alpha_{i2}(s,p_i,\theta_1(s,p_i))\theta_i(s,p_i)ds-\frac{1}{2}\int_0^t\beta_{i.}(s,p_i;\theta_1(s,p_i))\theta_1(s,p_i)ds- \tag{12}$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^t\mu_i(s,p_i,\theta_1(s,p_i))\theta_1(s,p_i)\theta_{3-i}(s,p_i)ds+\int_0^t F(s,p_i,\theta_1(s,p_i))ds,$$
$$i=1,2$$

$$A_3(t,x;\theta)=\varphi_0(p_1(0,t,x))+\int_0^t\theta_1(s,p_1(s,t,x))ds. \tag{13}$$

Покажем, что уравнение (11) имеет в области *$G_2(T^*)$* при достаточно малом *T^** единственное непрерывное решение. Для этого воспользуемся

Лемма 3. Если оператор *A* в банаховом пространстве удовлетворяет условиям 1) $||A(0)||\leq c = const$; 2) $||Ax-Ay|| \leq \theta\ ||x-y||$, $\theta<1$ в шаре $||x||\leq\frac{c}{1-\theta}$, то он имеет в этом шаре одну неподвижную точку.

Норму в пространстве $C_b(G_2(T^*)\to\mathbf{R}^3)$ определим равенством

$$\|\theta\|_*=\max_{(t,x)\in G_2(T^*)}\left\{|\theta_i(t,x)|,\quad i=1,2,3\right\}. \tag{14}$$

Далее, получаем, что функции $A_1(t,x;0)$; $A_2(t,x;0)$; $A_3(t,x;0)$ являются ограниченными функциями в силу условий Теоремы.

Следовательно, $A(t,x;0)$ ограничено.

Далее, из условий Теоремы следует, что

$$\|A(\theta')-A(\theta'')\|_*\leq T^*L^*\|\theta'-\theta''\|_*,$$

где L^* - некоторая константа, определяемая из норм и коэффициентов Липшица заданных функций и вольтерровского оператора в правых частях (12)-(13).

Из последних двух соотношений следует справедливость Леммы 2, а из доказанных лемм следует справедливость Теоремы.

Литература

1. Аширбаева А.Ж. Решение нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка методом дополнительного аргумента / А.Ж. Аширбаева. – Бишкек: Илим, 2013. – 134 с.
2. Аширбаева А.Ж. Приведение дифференциального уравнения в частных производных второго порядка гиперболического типа к интегральному уравнению/ А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазияева // Материаловедение. – Бишкек. - 2013. - № 2. – С. 258-261.
3. Аширбаева А.Ж. Новый способ приведения дифференциального урав-нения в частных производных второго порядка гиперболического типа к интегральному уравнению/ А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазияева // Вестник ОшГУ. – 2013. – № 1. – Спец. выпуск. – С. 87–90.
4. Мамазиаева Э.А. Сведение нелинейной задачи электрических колебаний в проводах к системам интегральных уравнений методом дополнительного аргумента / А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазияева // Известия ОшТУ. – Ош, 2015. – № 1. -С. 87–90.