УДК 517.97
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_1(4)_25

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОДНОЧАСТИЧНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА С КОНТАКТНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

[1,2]Кулжанов Уткир Нематович, PhD, доцент,
uquljonov@bk.ru
[3]Исмоилов Голибжон Исмоилович, докторанты
golibjon.ismoilov.tdtu@gmail.com
[1,3]Самаркандский государственный университет имена Шарофа Рашидова,
[2]Самаркандский филиал Ташкентского государственного экономического университета
Самарканд, Узбекистан

Аннотация: *В работе рассмотрен оператор Шредингера, соответствующей системе одной частицы во внешнем силовом поле (с контактным потенциалом) на одномерной решетке. Найдено собственное значение и соответствующий собственный вектор этого оператора.*

Ключевые слова: *гамильтониан, собственное значение, собственная функция, унитарные эквивалентные операторы.*

SPECTRAL PROPERTIES OF A ONE-PARTICLE SCHRÖDINGER OPERATOR WITH CONTACT POTENTIAL

[1,2]Kuljanov Utkir Nematovich, PhD, docent,
uquljonov@bk.ru
[3]Ismoilov Golibjon Ismoilovich, Doctorant
golibjon.ismoilov.tdtu@gmail.com
[1,3]Samarkand State University named after Sharof Rashidov,
[2]Samarkand Branch of Tashkent State University of Economics,
Samarkand, Uzbekistan

Abstract: The Schrödinger operator associated to a system of one particle in an external force field (with a contact potential) on a one-dimensional lattice is considered. The eigenvalue and the associated eigenfunction of this operator are found.

Keywords: hamiltonian, eigenvalues, eigenfuncion, unitary equivalence operators.

1 Введение. Важнейшей физической величиной в любой квантово-механической системе является энергия. Оператор, соответствующий этой наблюдаемой, обозначается через H. Оператор энергии H (оператор энергии H часто называется гамильтонианом, в нерелятивистской квантовой механике он будет также называться оператором Шредингера) определяет закон эволюции системы. Уравнение Шредингера - это основное уравнение квантовой теории. Поэтому исследование оператора Шредингера играет важную роль в современной математике.

В течение последних восмидесяти лет наиболее популярным и традиционным обьектом для математической физики служит нерелятивистская квантовая механика, точнее - оператор Шредингера. Более того, сам облик современной математической физики в значительной мере сформировался при изучении этого оператора. По сути дела вся атомная и молекулярная, и значительная часть ядерной физики, физики плазмы и твердого тела состоит в изучении оператора Шредингера [1,2].

В моделях физики твердого тела [3,4], а также в решетчатой квантовой теории поля [3] рассматриваются дискретные операторы, являющиеся решетчатыми аналогами оператора Шредингера на евклидовом пространстве. Кинематика квантовых частиц на решетке довольно экзотическая [5].

Дискретные операторы Шредингера, соответствующие гамильтонианам систем одной и двух квантовых частиц на целочисленной решетке изучены в работах [6-9]. Изучению оператора Шредингера посвящено огромное число работ, наиболее полный обзор которых содержится в «энциклопедии» методов современной математической физики [10].

В настоящей работе рассмотрен оператор Шредингера $\widehat{\mathrm{H}}_{\mu}$, соответствующей системе одной частицы во внешнем силовом поле $\widehat{\mathrm{V}}_{\mu}$ (с контактным потенциалом) на одномерной решетке. Найдено собственное значение и соответствующий собственный вектор этого оператора.

2. Постановка задачи. Через $\mathbb{Z}$ обозначается одномерная решетка, $\ell_2(\mathbb{Z})$ - гильбертово пространство квадратично - суммируемых функций, определённых на $\mathbb{Z}$.

Оператор энергии $\widehat{\mathrm{H}}_0$ одной частицы на решетке ассоциируется со следующим оператором в гильбертовом пространстве $\ell_2(\mathbb{Z})$:

$$\left(\widehat{\mathrm{H}}_0\hat{\mathrm{f}}\right)(\mathrm{x}) = \sum_{\mathrm{s}\in\mathbb{Z}} \hat{\varepsilon}(\mathrm{s}-\mathrm{x})\,\hat{\mathrm{f}}(\mathrm{s}), \qquad \hat{\mathrm{f}} \in \ell_2(\mathbb{Z})$$

где

$$\hat{\varepsilon}(\mathrm{s}) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \mathrm{s}=0 \\ \dfrac{1}{4}, & \mathrm{s}=\pm 2 \\ 0, & \mathrm{s}\in\mathbb{Z}\setminus\{0,\pm 2\} \end{cases}.$$

Легко показать, что $\widehat{\mathrm{H}}_0$ – самосопряженный оператор и его спектр чисто абсолютно непрерывный, и $\sigma\left(\widehat{\mathrm{H}}_0\right) = [0;1]$. Доказательство последнего факта вытекает из унитарной эквивалентности $\widehat{\mathrm{H}}_0$ к H_0 - оператору умножения на функцию

$$\varepsilon(\mathrm{p}) = \cos^2 \mathrm{p}$$

в гильбертовом пространстве $\mathrm{L}_2(\mathbb{T})$.

Здесь $\mathbb{T} = (-\pi;\pi]$ означает одномерной тор, в котором всюду операции сложения и умножения на действительное число элементов множества $(-\pi;\pi] \subset \mathbb{R}$ понимается как операции на $\mathbb{R}$ по модулю $2\pi\mathbb{Z}$ и $\mathrm{L}_2(\mathbb{T})-$ гильбертово пространство квадратично - интегрируемых функций, определенных на $\mathbb{T}$.

Эта унитарная эквивалентность осуществляется с помощью преобразования Фурье $\mathcal{F}\colon \mathrm{L}_2(\mathbb{T}) \to \ell_2(\mathbb{Z})$:

$$(\mathcal{F}\mathrm{f})(\mathrm{x}) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{ixq}}\mathrm{f}(\mathrm{q})\mathrm{dq}\,, \qquad \mathrm{x}\in\mathbb{Z}, \qquad \mathrm{f}\in\mathrm{L}_2(\mathbb{T}).$$

Заметим, что спектр оператора H_0 совпадает с отрезком $[0;1]$, т.е. $\sigma(\mathrm{H}_0) = [0;1]$.

Полный гамильтониан $\widehat{\mathrm{H}}_{\mu}$, $\mu\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ описывающий движение одной квантовой частицы на одномерной решетке во внешнем поле $\widehat{\mathrm{V}}_{\mu}$, определяется как ограниченное возмущение свободного гамильтониана $\widehat{\mathrm{H}}_0$:

$$\widehat{\mathrm{H}}_{\mu}, = \widehat{\mathrm{H}}_0 - \widehat{\mathrm{V}}_{\mu}.$$

Здесь $\widehat{\mathrm{V}}_{\mu} -$ оператор умножения на вещественную функцию $\hat{\mathrm{v}}_{\mu}(\mathrm{s})$:

$$\hat{v}_\mu(s) = \begin{cases} \mu, & s = 0 \\ 0, & s \neq 0 \end{cases}, \qquad \mu \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Теперь переходим к импульсному представлению оператора $\widehat{V}_\mu$.

Импульсное представление оператора $\widehat{V}_\mu$ имеет вид:

$$\left(V_\mu f\right)(p) = \frac{\mu}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(q)\, dq, \qquad f \in L_2(\mathbb{T}).$$

Отметим, что V_μ оператор ранга один, следовательно оператор V_μ есть компактный. Кроме того, V_μ положительный оператор, если $\mu > 0$, и отрицательный, если $\mu < 0$.

Через H_μ обозначим импульсное представление оператора $\widehat{H}_\mu$:

$$H_\mu = H_0 - V_\mu. \tag{1}$$

Поэтому согласно теореме Вейля (о существенном спектре) непрерывный спектр оператора H_μ совпадает со спектром $\sigma(H_0) = [0;1]$ оператора H_0, т.е.

$$\sigma_{cont}\left(H_\mu\right) = \sigma(H_0) = [0;1].$$

3 Основной результат. Собственное значение и собственная функция оператора H_μ.

Из выражения (1) и положительности оператор H_μ при $\mu > 0$, и отрицательности при $\mu < 0$, следует существует собственного значение оператора H_μ, если $\mu > 0$, то это собственное значение может принадлежат интервалу $(-\infty; 0)$, а если $\mu < 0$, то оно может принадлежат интервалу $(1;\ \infty)$.

Теперь сформулируем основной результат этой работы.

Теорема. a) если $\mu > 0$, то число $z_\mu^- = \frac{1-\sqrt{1+4\mu^2}}{2} < 0$ есть простое собственное значение оператора H_μ и соответствующая собственная функция с точностью до постоянного множителя имеет следующий вид:

$$f(p) = \frac{\mu}{\cos^2 p - z_\mu^-}.$$

b) если $\mu < 0$, то число $z_\mu^+ = \frac{1+\sqrt{1+4\mu^2}}{2} > 1$ есть простое собственное значение оператора H_μ и соответствующая собственная функция с точностью до постоянного множителя имеет следующий вид:

$$f(p) = \frac{\mu}{\cos^2 p - z_\mu^+}.$$

Литература

1. Mogilner A.I. Hamiltonians of solid state physics at few-particle discrete Schrodinger operators: problems and results // Advances in Sov. Math. 1991. V. 5. P. 139–194.
2. A.I. Mogilner. The problem of few quasi-particles in solid state physics // In "Applications self-adjoint extensions in quantum physics"(eds. P. Exner, P. Seba), Lecture Notes in Phys. Vol.324. Springer-Vilag, Berlin. 1988. 52-83.
3. Mattis D.C. The few-body problem on a lattice // Rev. Mod. Phys. 1986. V. 58, No. 2. P. 361–379.
4. Malishev V.A., Minlos R.A. Linear infinite-particle operators / trl. by A. Mason. Providence,RI: American Mathematical Society, 1995. VIII, 298 p. (Translations of Mathematical Monographs; v.143). Математика/Mathematics 36.
5. Minlos R.A., Mogilner A.I. Some problems concerning spectra of lattice models // Schrödinger Operators, Standard and Nonstandard: Proc. Conf. in Dubna, USSR, 6–10 September 1989/P. Exner, P. Seba (eds.). Singapore: World Scientific, 1989. P. 243–257.
6. S.Albeverio, S.N.Lakaev and Z.I.Muminov, On the structure of the essential spectrum for the three-particle Schroedinger operators on lattices, Math. Nachr.No 7, 1-18 pp. 2007.
8. Р.Беллман, Введение в теорию матриц, Изд. "Наука". Москва, 376 ст. 1976.

9. Faria da Veiga P.A., Ioriatti L. and O‘.Carroll, Energy-momentum spectrum of some two-particle lattice Schroedinger Hamiltonians. Phys. Rev. E, 3 - 9 pp. 2002.
10. Reed M. and Simon B.: Methods of modern mathematical physics. IV: Analysis of Operators. Academic Press, New York. 458 pp.1979.