УДК 517.928.2
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_1(4)_24

ТРЕХЗОННАЯ БИСИНГУЛЯРНАЯ ЗАДАЧА КОШИ

Кожобеков Кудайберди Гапаралиевич, д.ф.-м.н., профессор
Турсунов Дилмурат Абдиллажанович, д.ф.-м.н., профессор
dtursunov@oshsu.kg
Омаралиева Гулбайра Абдималиковна, ст. преп.
Ошский государственный университет
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *в статье исследуется задача Коши для бисингулярно возмущенного линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Рассматриваемая задача Коши имеет три особенности: сингулярное присутствие малого параметра; решение соответствующего невозмущенного уравнения имеет полюс первого порядка, а задача Коши имеет двойной пограничный слой. Сингулярное присутствие малого параметра порождает классический пограничный слой, а особая точка соответствующего невозмущенного уравнения порождает второй пограничный слой. В результате у нас получится двойной пограничный слой. Приведено необходимое и достаточное условие появления промежуточного пограничного слоя для рассматриваемого класса задач Коши. Для простоты и понимания оригинального метода исследования и понятие двойного пограничного слоя приведем подробное исследование простейшего примера*.

Ключевые слова*: бипограничный слои, задача Коши, особая точка, бисингулярное возмущение, обыкновенное дифференциальное уравнение.*

ҮЧ ЗОНАЛУУ БИСИНГУЛЯРДЫК КОШИНИН МАСЕЛЕСИ

Кожобеков Кудайберди Гапаралиевич, ф.-м.и.д., профессор
Турсунов Дилмурат Абдиллажанович, ф.-м.и.д., профессор
dtursunov@oshsu.kg
Омаралиева Гулбайра Абдималиковна, ага окутуучу
Ош мамлекеттик университети
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *макалада бисингулярдык козголгон биринчи тартиптеги сызыктуу бир тектүү эмес кадимки дифференциалдык теңдеме үчүн Кошинин маселеси изилденет. Каралып жаткан Кошинин маселеси үч өзгөчөлүккө ээ, алар: кичине параметрдин сингулярдуу катышуусу; тиешелүү козголбогон теңдеменин чыгарылышы биринчи тартиптеги уюлга ээ болуусу жана Кошинин маселесинин кош чектик катмарга ээ болуусу. Кичине параметрдин сингулярдуу катышуусу классикалык чектик катмарды пайда кылат, ал эми тиешелүү козголбогон теңдеменин өзгөчө чекити экинчи чектик катмарды пайда кылат. Натыйжада биз кош чектик катмарга ээ болобуз. Макалада каралган класстагы Кошинин маселеси үчүн аралык чектик катмардын пайда болушунун зарыл жана жетиштүү шарты келтирилген. Оригиналдуу изилдөө ыкмасы жана кош чектик катмар түшүнүгү түшүнүктүү болушу үчүн эң жөнөкөй мисалды кеңири толук изилдөөнү келтирдик.*

Ачкыч сөздөр: *кош чектик катмар, Кошинин маселеси, өзгөчө чекит, бисингулярдык козголуу, кадимки дифференциалдык теңдеме.*

THREE-ZONE BISINGULARLY CAUCHY PROBLEM

Kozhobekov Kudaiberdi Gaparalievich, Doctor of Ph. & Math. Sc., professor
Tursunov Dilmurat Abdillazhanovich, Doctor of Ph. & Math. Sc., professor

dtursunov@oshsu.kg
Omaralieva Gulbayra Abdimalikovna, teacher
Osh State University
Osh, Kyrgyzstan

Abstract: *The paper investigates the Cauchy problem for a bisingularly perturbed linear inhomogeneous ordinary differential equation of the first order. The Cauchy problem under consideration has three features: the singular presence of a small parameter; the solution of the corresponding unperturbed equation has a first-order pole, and the Cauchy problem has a double boundary layer. The singular presence of a small parameter generates the classical boundary layer, and the singular point of the corresponding unperturbed equation generates the second boundary layer. As a result, we get a double boundary layer. A necessary and sufficient condition for the appearance of an intermediate boundary layer for the considered class of Cauchy problems is given. For simplicity and understanding of the original research method and the concept of a double boundary layer, we present a detailed study of the simplest example.*
Keywords: biboundary layers, Cauchy problem, singular point, bisingular perturbation, ordinary differential equation.

Постановка задачи. Исследуем задачу Коши

$$\varepsilon^n y'_\varepsilon(x)+(x^\gamma q(x)+\varepsilon^m p(x))y_\varepsilon(x)=f(x),\ \ x\in[0,T], \tag{1}$$

$$y_\varepsilon(0)=a, \tag{2}$$

где $n, m, \ \gamma\in\mathbf{N}$, a – *const*, $f(0)\neq 0$, $f,q,p\in C^\infty[0,T],\ 0<\alpha_0<q(x),\ \ 0<\alpha_0<p(x):x\in[0,T]$, γ – кратность особой точки $x=0$.

Решение начальной задачи существует, единственно. Требуется определить при каких значениях параметров n, γ и m появляется промежуточный пограничный слой в начальной задачи (1)-(2) на отрезке $[0,T]$ [1]-[12].

Докажем следующую теорему.

Теорема. Для появления промежуточного (дополнительного) пограничного слоя в начальной задаче (1)-(2) необходимо и достаточно выполнения условия $n>m+\dfrac{m}{\gamma}$.

Доказательство. Для доказательства теоремы, что в пограничном слое имеется два характерных предела, кроме внешнего, которые будут включать в себя два внутренних разложения.

Пусть $x=\varepsilon^\alpha t$, $\alpha>0$, тогда $dx=\varepsilon^\alpha dt$ и уравнение (1) перепишется в виде:

$$\varepsilon^{n-\alpha}\frac{dy_\varepsilon(t)}{dt}+(\varepsilon^{\alpha\gamma}t^\gamma q(\varepsilon^\alpha t)+\varepsilon^m p(\varepsilon^\alpha t))y_\varepsilon(t)=f(\varepsilon^\alpha t) \tag{3}$$

Уравнивая порядков поведения слагаемых по малому параметру двух любых членов имеем соответствующие характерные пределы, возможны следующие три случаи:

1) $n-\alpha=\alpha\gamma\Rightarrow\alpha=\dfrac{n}{\gamma+1}$; 2) $n-\alpha=m\ \Rightarrow\alpha=n-m$; 3) $\alpha j=m\Rightarrow\alpha=\dfrac{m}{\gamma}$.

Достаточность. В первом случае

$$\varepsilon^{n\frac{\gamma}{\gamma+1}}\left(\frac{dy_\varepsilon(t)}{dt}+t^\gamma q(\varepsilon^\alpha t)y_\varepsilon(t)\right)+\varepsilon^m p(\varepsilon^\alpha t))y_\varepsilon(t)=f(\varepsilon^\alpha t)\,, \tag{4}$$

пусть $y_\varepsilon(t)=\varepsilon^{-m}\psi_\varepsilon(t)$ тогда (4) примет вид:

$$\varepsilon^{n\frac{\gamma}{\gamma+1}-m}\left(\frac{d\psi_\varepsilon(t)}{dt}+t^\gamma q(\varepsilon^\alpha t)\psi_\varepsilon(t)\right)+p(\varepsilon^\alpha t))\psi_\varepsilon(t)=f(\varepsilon^\alpha t)$$

по условию теоремы $n\frac{\gamma}{\gamma+1} > m$, поэтому этот случай исключается.

Во втором случае

$$\varepsilon^m\left(\frac{dy_\varepsilon(t)}{dt} + p(\varepsilon^\alpha t))y_\varepsilon(t)\right) + \varepsilon^{\gamma(n-m)}t^\gamma q(\varepsilon^\alpha t)y_\varepsilon(t) = f(\varepsilon^\alpha t), \tag{5}$$

пусть $y_\varepsilon(t) = \varepsilon^{-m}\psi_\varepsilon(t)$ тогда (5) примет вид:

$$\left(\frac{d\psi_\varepsilon(t)}{dt} + t^\gamma q(\varepsilon^\alpha t)\psi_\varepsilon(t)\right) + \varepsilon^{\gamma n - m(\gamma+1)} p(\varepsilon^\alpha t))\psi_\varepsilon(t) = f(\varepsilon^\alpha t)$$

по условию теоремы $n\gamma - m(\gamma+1) > 0$, поэтому этот случай требует исследования.

В третьем случае

$$\varepsilon^{n-\frac{m}{\gamma}}\frac{dy_\varepsilon(t)}{dt} + \varepsilon^m(t^\gamma q(\varepsilon^\alpha t) + p(\varepsilon^\alpha t))y_\varepsilon(t) = f(\varepsilon^\alpha t), \tag{6}$$

пусть $y_\varepsilon(t) = \varepsilon^{-m}\psi_\varepsilon(t)$ тогда (6) примет вид:

$$\varepsilon^{n-\frac{\gamma+1}{\gamma}m}\frac{d\psi_\varepsilon(t)}{dt} + (t^\gamma q(\varepsilon^\alpha t) + p(\varepsilon^\alpha t))\psi_\varepsilon(t) = f(\varepsilon^\alpha t)$$

по условию теоремы $n - \frac{\gamma+1}{\gamma}m > 0$, поэтому этот случай требует исследования.

Мы доказали, что в пограничном слое имеется два характерных предела, кроме внешнего, которые будут включать в себя два внутренних разложения:

$$1)\ x = \varepsilon^{n-m}\tau; \qquad 2)\ x = \varepsilon^{\frac{m}{\gamma}}t.$$

Так как $n > m + \frac{m}{\gamma}$, поэтому $n - m > \frac{m}{\gamma}$.

Изменение масштаба $\tau = \frac{x}{\varepsilon^{n-m}}$, соответствующее $\alpha = n - m$, описывает подслой (пограничный слой) вблизи начальной точки x=0, которую будем называть левой зоной. А изменение масштаба $t = \frac{x}{\varepsilon^{m/\gamma}}$, соответствующее $\alpha = \frac{m}{\gamma}$, определяет другую область, лежащую между левой зоной и областью внешнего разложения, т.е. правой зоной называют средней зоной.

В задачах вязко-невязких взаимодействий эти зоны обычно называются нижним, средним и верхним подслоем соответственно [37].

Необходимость. Покажем, что в случае $n \le m + \frac{m}{\gamma}$ в окрестности особой точки имеется только один характерный предел.

а) При $n = m + \frac{m}{\gamma}$ во всех трех случаях ($\alpha = n/(\gamma+1)$; $\alpha = n - m$; $\alpha = m/\gamma$) получаем только один характерный предел:

$$\frac{d\psi_\varepsilon(t)}{dt} + t^\gamma q(\varepsilon^\alpha t)\psi_\varepsilon(t) + p(\varepsilon^\alpha t))\psi_\varepsilon(t) = f(\varepsilon^\alpha t), \text{ где } \psi_\varepsilon(t) = \varepsilon^m y_\varepsilon(t).$$

б) При $n < m + \frac{m}{\gamma}$:

в первом случае пусть $y_\varepsilon(t)=\varepsilon^{-n\frac{\gamma}{\gamma+1}}\psi_\varepsilon(t)$ тогда (4) примет вид:

$$\left(\frac{d\psi_\varepsilon(t)}{dt}+t^\gamma q(\varepsilon^\alpha t)\psi_\varepsilon(t)\right)+\varepsilon^{m-n\frac{\gamma}{\gamma+1}}p(\varepsilon^\alpha t))\psi_\varepsilon(t)=f(\varepsilon^\alpha t)$$

по условию $n<m+\dfrac{m}{\gamma}$, поэтому – это один из характерных пределов.

Во втором случае, пусть $y_\varepsilon(t)=\varepsilon^{-\gamma(n-m)}\psi_\varepsilon(t)$ тогда (5) примет вид:

$$\varepsilon^{m(\gamma+1)-\gamma n}\left(\frac{d\psi_\varepsilon(t)}{dt}+t^\gamma q(\varepsilon^\alpha t)\psi_\varepsilon(t)\right)+p(\varepsilon^\alpha t))\psi_\varepsilon(t)=f(\varepsilon^\alpha t)$$

по условию $n<m+\dfrac{m}{\gamma}$, поэтому этот случай не рассматривается.

В третьем случае, пусть $y_\varepsilon(t)=\varepsilon^{\frac{m}{\gamma}-n}\psi_\varepsilon(t)$ тогда (6) примет вид:

$$\frac{dy_\varepsilon(t)}{dt}+\varepsilon^{\frac{\gamma+1}{\gamma}m-n}(t^\gamma q(\varepsilon^\alpha t)+p(\varepsilon^\alpha t))y_\varepsilon(t)=f(\varepsilon^\alpha t)$$

по условию $n<m+\dfrac{m}{\gamma}$, поэтому этот случай тоже не рассматривается.

В итоге получается только один характерный предел:

$$\left(\frac{d\psi_\varepsilon(t)}{dt}+t^\gamma q(\varepsilon^\alpha t)\psi_\varepsilon(t)\right)+\varepsilon^{m-n\frac{\gamma}{\gamma+1}}p(\varepsilon^\alpha t))\psi_\varepsilon(t)=f(\varepsilon^\alpha t)$$ *. Теорема доказана.*

Литература

1. Ильин, А.М. Согласование асимптотических разложений краевых задач [Текст] / А.М. Ильин. – М.: Наука, 1989. – 334 с.
2. Алымкулов К., Турсунов Д. А. Об одном методе построения асимптотических разложений решений бисингулярно возмущенных задач. *Изв. вузов. Математика*, 12, 2016, 3–11.
3. Турсунов Д. А. Асимптотическое разложение решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с тремя точками поворота. Тр. ИММ УрО РАН, 22, № 1, 2016, 271–281.
4. Tursunov D. A. The asymptotic solution of the three-band bisingularly problem. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 38:3, ISSN 19950802. Maik Nauka-Interperiodica Publishing (2017), 542–546.
5. Турсунов Д. А. Асимптотическое решение линейных бисингулярных задач с дополнительным пограничным слоем. *Изв. вузов. Математика*, 3, 2018, 70–78.
6. Кожобеков К. Г., Турсунов Д. А. Асимптотика решения краевой задачи, когда предельное уравнение имеет нерегулярную особую точку. *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, 29:3 (2019), 332–340.
7. Tursunov D. A., Kozhobekov K. G., Bekmurza uulu Ybadylla Asymptotics of solutions of boundary value problems for the equation $\varepsilon y''+xp(x)y'-q(x)y=f$. *Eurasian Math. J.*, 13:3 (2022), 82–91.
8. Омаралиева Г. А., Турсунов Д. А. Промежуточный пограничный слой в сингулярно возмущенных уравнениях первого порядка. Тр. ИММ УрО РАН, 28, № 2, 2022, – С. 193–200.
9. Омаралиева Г. А., Турсунов Д. А. Асимптотика решения двух зонной двухточечной краевой задачи. Вестн. Южно-Ур. ун-та. Сер. Матем. Мех. Физ., 13:2 (2021), 46–52.
10. Омаралиева Г. А., Турсунов Д. А. Сингулярно возмущенная задача с двойным пограничным слоем. Вестник Ошского государственного университета. 2021. Т. 1. № 1. С. 102-109.
11. Kozhobekov K.G., Tursunov D.A., Omaralieva G.A. Asymptotics of the Solution of Bisingular Boundary Value Problems with a Biboundary Layer // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2022, Vol. 43, No. 11, P. 166–172.
12. Омаралиева Г. А. Достаточное условие существования дополнительной зоны в сингулярно возмущенных краевых задачах второго порядка // Бюллетень науки и практики. – 2023. – Т. 9. – № 2. – С. 10-16.