УДК 517.968
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_1(4)_23

КОРРЕКТТҮҮ БИРИНЧИ ТҮРДӨГҮ ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН КЛАССТАРЫ

Кененбаева Гулай Мекишовна, ф.-м.и.д., профессор
Аскар кызы Лира, ф.-м.и.к.
Бейшебаева Жыпаркүл Качкыновна, ага окутуучу
Саркелова Жылдыз Жанышевна, ага окутуучу
lira130780@mail.ru
Жусуп Баласагын атындагы Кыргыз Улуттук университети
Бишкек, Кыргызстан

Аннотация*.Энтропия түшүнүгүн колдонуунун негизинде биринчи түрдөгү интегралдык теңдеменин корректтүүлүгүнүн мүмкүнчүлүгү чексиз гана аймактарда көрсөтүлдү.Аналитикалуулук эффектисин пайдалануунун негизинде бир, эки жана көп өзгөрмөлүү функциялар үчүн биринчи түрдөгү,туура келүүчү функциялар мейкиндиктеринде корректтүү,сызыктуу жана сызыктуу эмес интегралдык теңдемелердин кең классы тургузулган. Алардын туруктуу чыгарылышы үчүн жакындаштырылган ыкмалар тургузулган. Теңдемелерди өзгөртүп түзүү ыкмасы,чыгарылыштарды өзгөртүп түзүү ыкмасы, аргументти өзгөртүп түзүү ыкмасы, аналитикалык функциялардын ыкмасы, интегралдык теңдемелер теориясы, сызыктуу операторлор теориясы,чексиз катарлар, категориялар теориясы, анын объектилери жана морфизмдери колдонулат.*

Ачкыч сөздөр:*биринчи түрдөгү интегралдык теңдеме, аналитикалык функция, корректтүүлүк, теңдемени өзгөртүү.*

КЛАССЫ КОРРЕКТНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

Кененбаева Гулай Мекишовна, д.ф.-м.н., профессор
Аскар кызы Лира, ф.-м.и.к.
Бейшебаева Жыпаркүл Качкыновна, старший преподаватель
Саркелова Жылдыз Жанышевна, старший преподаватель
lira130780@mail.ru
Кыргызский национальный университет имени Ж. Баласагына
Бишкек, Кыргызстан

Аннотация*. На основе использования понятия энтропии показана возможность корректности интегральных уравнений первого рода только в неограниченных областях. На основе использования эффекта аналитичности построены широкие классы корректных линейных и нелинейных интегральных уравнений первого рода с одной, двумя и многими переменными в соответствующих пространствах функций. Построены приближенные методы для их устойчивого решения. Применяются метод преобразования уравнений, метод преобразования решений, метод преобразования аргумента, методы аналитических функций, теории интегральных уравнений, теория линейных операторов, бесконечные ряды, теория категорий, ее объекты и морфизмы.*

Ключевые слова: *интегральное уравнение первого рода, аналитическая функция, корректность, преобразование уравнения.*

CLASSES OF INTEGRAL EQUATIONSOF THE FIRST KIND

Kenenbaeva Gulay Mekishovna, Doctor of Ph. & Math. Sc., professor
Askar kyzy Lira, Candidate of Ph. & Math. Sc
Beishebaeva Zhyparkul, senior lecturer

Sarkelova Zhyldyz, senior lecturer
lira130780@mail.ru
Kyrgyz National University named after Jusup Balasagyn
Bishkek, Kyrgyzstan

Abstract. *On the base of notion of entropy, there is demonstrated possibility of correctness of integral equations of the first kind only on unbounded domains. On the base of applying the effect of analyticity new classes of correct linear and non-linear integral equations of the first kind with one, two and many variables in corresponding spaces are constructed. Approximate methods for their stable solving are developed. Methods of transformation of equations, of transformation of solutions, of transformation of argument, of analytical functions, of the theory of integral equations, the theory of linear operators, infinite series, the theory of categories, its objects and morphisms are applied.*

Keywords*: integral equation of the first kind, analytical function, correctness, transformation of equation.*

1. Киришүү

1920-жылдары Ж. Адамар кеңири жайылган типтеги математикалык маселелердин корректтүүлүгүнө жалпы аныктама берген (биз метрикалык мейкиндикти топологиялык мейкиндикке алмаштыруу менен беребиз): төмөнкү түрдөгү оператордук теңдемеден белгисиз z элементин табуу керек

$$Az=f, \tag{1}$$

Мында A – Z топологиялык мейкиндигинен U топологиялык мейкиндигине аракеттенүүчү үзгүлтүксүз оператор, $f \in U$ – берилген элемент: 1) A оператору биективдүү; 2) A^{-1} тескери оператору үзгүлтүксүз.

Андан ары A үзгүлтүксүз ядросу бар интегралдык оператор болгондо көп учурларда маселе Адамар боюнча корректтүү эмес экендиги белгилүү болду. Мындай теңдемелердин маанилүүлүгүнөн улам корректтүүлүктүн жетишээрлик шарттары жөнүндө көйгөйлөр келип чыккан.

Эскертүү. Чыгарылыштын (1) бар экендиги алдын ала болжолдонгон «Тихонов боюнча корректтүүлүктү» биз карабайбыз.

Көптөгөн эмгектерде төмөнкү теореманы далилдөө усулу өнүктүрүлүп жана жалпыланып жатат.

Теорема 1. Эгерде *M(x,s)* жана *f(x)* жылмакай функциялар болсо, (кошумча шарттар аткарылса) $f(0)=0$ жана $M(x,x)\neq 0$, анда биринчи түрдөгү Вольтер тибиндеги теңдеме

$$\int_0^x M(x,s)\,u(s)ds = f(x) \tag{2}$$

үзгүлтүксүз чыгарылышка ээ.

Мындай теоремалар дифференцирлөө жолу менен далилденет, бул аларды экинчи түрдөгү Вольтер тибиндеги эквиваленттүү теңдемелерге келтирет, мисалы.

$$M(x,x)u(x) + \int_0^x \partial M(x,s).\partial x\, u(s)ds = f'(x). \tag{3}$$

Конволюция түрүндөгү теңдемелер үчүн белгилүү

Теорема 2 [1]. Эгерде берилген $f(x) \in L_2(R)$, $K(x) \in L_1$ (R функциялары үчүн Фурье өзгөртүүлөрү бар болсо жана алар $\Phi f(\cdot)(\xi) \in L_2(R)$, $\Phi K(\cdot)(\xi) \in L_2(R)$ шарттарын канааттандырса $(\Phi K(\cdot)(\xi))^{-1}\Phi f(\cdot)(\xi) \in L_2(R))$ анда (1) теңдеме $A(x, u(\cdot))=\int_{-\infty}^{\infty} K(x-s)\,u(s)ds$ менен төмөнкү түрдө жазылган чыгарылышка ээ

$$u(x) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\Phi K(\cdot)(\xi)\right)^{-1} \Phi f(\cdot)(\xi) e^{i\xi x} d\xi \in L_2(R).$$

Бул учурда интегралдоонун аймагы чектелбегендиктен, жеке учурлар үчүн бар болуу теоремасынын аналитикалык эффектисинин негизинде [2], [3], [4] алдык. Бул макалада бул маселе кененирээк талкууланат.

Биринчи түрдөгү интегралдык теңдеменин корректтүүлүгүн кандай учурларда алууга болорун карап көрөлү. Эгерде динамикалык система – "z" баштапкы шарты менен баштапкы маселенин чыгарылышыдифференциалдык теңдеме үчүн жылмакайлоочу болсо, анда муну энтропиянын өсүшү катары кароого болот. Демек, эгерде анын чыгарылышы$z=A(\varphi)$, түрүндө жазылса, мында А толук үзгүлтүксүз интегралдык оператор болсо, анда (1) түрүндөгү тескери маселени алабыз.

Толук үзгүлтүксүз операторго тескери оператор сызыктуу абалда чектелбей турганы белгилүү, бул үзгүлтүксүздүккө эквиваленттүү. Бул жерден биз гипотеза алабыз: эгерде чексиз көптүктөгү объектти издөө маселеси энтропияга туура келген чоңдуктун көбөйүшү жана бош энергиянын чектелген саны менен процесстин математикалык модели болсо, анда тескери маселе корректтүү эмес болот.

Ошондуктан, чектелбеген аймактарда корректтүү биринчи түрдөгү интегралдык теңдемелерди издөө зарыл.

2-бөлүмдө биздин катышуубуз менен иштелип чыккан теңдемелердин категориясын түзүүберилген.

3-бөлүм корректтүү биринчи түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемелерди камтыйт.

4-бөлүмдө –корректтүү биринчи түрдөгү сызыктуу эмес интегралдык теңдемелер берилген.

2. Equa теңдемелеринин категориясы

Ob(Equa) - топтомдор$\{X, Y \in Ob(Set), X$те предикат $P(x), B{:}X\to Y$өзгөртүүлөр$\{X, Y, P, B\}$ теңдемесинин чыгарылышы$y\in Y$, $(\exists x\in X)(P(x)\wedge(y=B(x))$. *Mor(Equa)* - бул$\{X, Y, P, B\}$топтомдорунун өзгөртүүлөрү, бул жерде чыгарылыш сакталат.

*Equa*категориясынын камтылган категориясы*:*

- *Equa-Func*функциялары үчүн теңдемелердин категориясы*:Ob(Equa-Func)* - $\{X \in Ob(Func), Y \in Ob(Func), X$те предикат $P(x), B{:}X\to Y$өзгөртүүлөр$\}$ топтомдору. *Mor(Equa-Func)* –чыгарылыштарды сактоочу өзгөртүүлөр, анын ичинде аргументти өзгөртүүлөр;

- үзгүлтүксүз жалпыланган предикаттары бар Equa-Fun функциялары үчүн теңдемелердин категориясы Ob(Equa-Top) - {X, Y ∈ Ob(Top), Xте P(x) функциясы маанилердин чектүү жыйындысын алат, алардын бири "чындык", B:X→Y өзгөртүүсү} топтомдору, Xге үзгүлтүксүз өтүү учурунда P(x) функциясы маанилерин чектеш маанилерге гана өзгөртөт деген шартта.

3. Биринчи түрдөгү сызыктуу интегралдык теңдемелер

$$\partial u(t,x)/\partial t = a\Delta u(t,x), (t,x)\in \mathbf{R}_{++}\times\mathbf{R}^n,\ a>0 \tag{4}$$

түрүндөгү

$$u(0,x) = \varphi(x),\ x\in\mathbf{R}^n, \tag{5}$$

баштапкы шарты менен $\mathbf{R}^n$ көптүгүндөгү жылуулук өткөрүмдүүлүктүн теңдемесин чыгаруу үчүн бул жерде $\varphi(z)$ – аналитикалык функцияжана аргументтин чыныгы маанилеринде чыныгы маанилерди алат,

T>0 үчүн формула белгилүү

$$u(T,x) = exp(aT\Delta)\varphi(x) = \left(2\sqrt{Ta\pi}\right)^{-n}\int_{\mathbf{R}^n} exp(-|x-\xi|^2/(4aT))\varphi(\xi)d\xi \tag{6}$$

Теорема2. Эгер функция $f(x){:}\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$–чыныгы коэффициенттери менен өзгөрмөлөрү боюнча экспоненциалдык типтегибүтүн аналитикалыкфункция болсо, анда

$$J_n(x;w(s){:}s) := \int_{\mathbf{R}^n} exp(-b|x-\xi|^2)w(\xi)d\xi = f(x). \tag{7}$$

биринчи түрдөгү интегралдык теңдемесинин ушундай эле бүтүн аналитикалык чыгарылышы $w(x) = J_n{}^{-1}(x;f(s){:}s) = \left(\frac{b}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} exp\left(-\frac{1}{4b}\Delta\right)f(x)$жашайт.

Ал $f(x)$ боюнча туруктуу; эгер$f(x)>0$ жана $(\forall k\in\mathbf{N})(|f^{(2k)}(x)|\leq 2bk\,|f^{(2k-2)}(x)|)$ болсо,анда бул чыгарылыш оң болот.

4. Биринчи түрдөгү сызыктуу эмес интегралдык теңдемелер

2-теореманын баардык шарттары канааттандырылыса, анда

$$\int_{\mathbf{R}^n} exp(-b|x-\xi|^2)v^{2k}(\xi)d\xi = f(x). \tag{8}$$

теңдеме чыгарылышка ээ.

Чыгарылышты өзгөртүү:

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x, \xi, w(\xi))d\xi = f(x) \quad (9)$$

теңдемесинде *w(x)= W(x, u(x)) ордуна коюсу аткарылат*, жана $K_1(x, \xi, u) = K(x, \xi, W(\xi, u))$ белгилөөсү киргизилет, анда эгер (9) – корректтүү болсо корректтүү болгон

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_1(x, \xi, u(\xi))d\xi = f(x), \quad (10)$$

интегралдык теңдемеси алынат.

Аргументтерди өзгөртүү. (9) теңдемесинде $\xi = H(\eta)$ ордуна коюусун колдонобуз, бул жерде $H(\eta)$ аналитикалык функция, $x \in R$ болгондо чыныгы мааниилерди алат жана өсүүчү болот, $H(R)=R$. Жаңы белгисиз $u(\eta) = w(H(\eta))$ функциясын жана $K_3(x, \eta, u) = K(x, H(\eta), u)H'(\eta)$ киргизебиз.
Анда эгер (9) – корректтүү болсо корректтүү болгон

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_3(x, \eta, u(\eta))d\eta = f(x), \quad (11)$$

теңдемесин алабыз. Ошондой эле жаңы теңдемелер $x=\varphi(z)$түрүндөгү алмашырууларда да алынат.

Интегралдык өзөктөрдүн композициясы. Эгер

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x, \xi, w(\xi))d\xi = f(x), \int_{-\infty}^{\infty} M(x, \xi, w(\xi))d\xi = f(x)$$

интегралдык теңдемелери кайсы бир аналитикалык функциялардын классында корректтүү болсо, анда

$$\int_{-\infty}^{\infty} K\left(x, \xi, \int_{-\infty}^{\infty} M(\xi, \eta, w(\eta))d\eta\right)d\xi = f(x)$$

теңдемеси дагы аналитикалык функциялардын ушул классында корректтүү болот.

Сумма түрүндө бериле турган интегралдуу өзөгү бар теңдемелердин корректтүүлүгү. Эгер $|\lambda|$ жетишээрлик кичине болсо, анда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(exp(-b_1(x-\xi)^2) + \lambda exp(-b_2(x-\xi)^2)\right)w(\xi)d\xi = f(x) \quad (12)$$

теңдемеси болот.

5. Корутунду

Бул макаланын натыйжалары корректтүү биринчи түрдөгү интегралдык теңдемелердин кеңири класстары бар экенин көрсөтүп турат.

Адабияттар

1. [Электрондук ресурс] / http://eqworld.ipmnet.ru/en/solutions/ie/ie0322.pdf
2. Аскар кызы Л. Класс интегральных уравнений первого рода, имеющих решение при любой правой части / Г.М. Кененбаева, Л. Аскар кызы // Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики: труды Международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения академика Г. И. Марчука, ИВМ и МФ СО РАН. – Новосибирск: Абвей, 2015. – С. 321-325.
3. Аскар кызы Л. Условия существования положительных решений линейных интегральных уравнений первого рода / Л. Аскар кызы // Вестник ЖАГУ, 2016. – № 1(32). – С. 24-29.
4. Аскар кызы Л. Корректность решения двумерного интегрального уравнения первого рода с аналитическими функциями [Текст] / Л. Аскар кызы // Проблемы современной науки и образования. – № 21(63). – Иваново: Олимп, 2016. – С. 6-9.