УДК 512.581.2
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_1(4)_22

ТEҢДЕМЕЛЕР КАТЕГОРИЯСЫ ЖАНА АНЫН КАТЕГОРИЯЧАЛАРЫ

Кененбаева Гулай Мекишовна, ф.-м.и.д., профессор
gkenenbaeva@mail.ru
Жусуп Баласагын атындагы Кыргыз Улуттук университети
Бишкек, Кыргызстан

Аннотация. *Мурда, өзгөртүүлөрдө чыгарылыштын сакталуу принцибинин негизинде "предикат" түшүнүгүнүн жардамы менен теңдеменин жаңы жалпы түшүнүгүн киргизгенбиз жана белгилүү категориялардын негизинде теңдемелер категориясынын элементтери тургузулган. «Теңдеме» түшүнүгүнө баштапкы жана чектик шарттар да кирет. Биз ошондой эле белгилүү болгон "Адамар боюнча корректтүүлүктү" кошуу менен корректүү теңдемелердин категорияларынын түшүнүгүн киргиздик жана корректүүлүктү сактоо менен өзгөртүүлөрдүн мисалдарын, функциялар үчүн теңдемелер категориясын келтирдик ж.б. Бул макаланын максаты –мурда адабиятта кыйыр түрдө колдонулган функциялардын категориясын, теңдеме категориясын жана анын аныкталган субкатегорияларын сүрөттөп берүү болуп саналат.*

Ачкыч сөздөр: *категория, морфизм, теңдеме, предикат, чыгарылыш, корректтүүлүк.*

КАТЕГОРИЯ УРАВНЕНИЙ И ЕЕ ПОДКАТЕГОРИИ

Кененбаева Гулай Мекишовна, д.ф.-м.н., профессор
gkenenbaeva@mail.ru
Кыргызский национальный университет имени Ж. Баласагына
Бишкек, Кыргызстан

Аннотация. *Ранее нами было введено новое общее понятие уравнения с помощью понятия "предикат" на основе принципа сохранения решения при преобразованиях и построены элементы категории уравнений на основе известных категорий. Начальные и краевые условия также включаются в понятие «уравнение». Мы также ввели понятие категории корректных уравнений с включением известной «корректности по Адамару» и привели примеры преобразований с сохранением корректности, понятие категории уравнений для функций и другие. Цель настоящей статьи – описание категории функций, которая неявно использовалась ранее в литературе, категории уравнений и выявленных ее подкатегорий.*

Ключевые слова: *категория, морфизм, уравнение, предикат, решение, корректность.*

CATERGORY OF EQUATIONS AND ITS SUBCATEGORIES

Kenenbaeva Gulai Mekishovna, Doctor of Ph. & Math. Sc., professor
gkenenbaeva@mail.ru
Kyrgyz National University named after Jusup Balasagyn
Bishkek, Kyrgyzstan

Abstract. *A new general notion of equation was introduced by us with assistance of the notion "predicate" on the base of the principle of preservation of solution while transformations and elements of the category of equations were constructed on the base of well-known categories. Initial values and boundary values are also included in the notion of equations. Further, we introduced the notion of the category of correct equations including the known "correctness by Hadamard" and presented examples of transformations. The aim of this paper is to describe the category of functions which was used in literature implicitly, the category of equations and their distinguished subcategories.*

Keywords: *category, morphism, equation, predicate, solution, correctness*.

1. Киришүү. Азыркы учурда математиканын көптөгөн тармактары категориялар теориясынын алкагында ийгиликтүү изилденүүдө, анткени ал математикалык объекттердин ортосундагы байланыштардын объекттердин ички түзүлүшүнөн көз каранды болбогон касиеттерин карайт.

Кыргызстанда категориялык алгебра боюнча биринчи жыйынтыктарды М.Я.Медведев[1], категориялык топология боюнча бир катар жыйынтыктарды академик А.А. Борубаев, А.А.Чекеев жана алардын окуучулары [2] алышкан.

Математиканын түрдүү тармактарында «теңдеме» түшүнүгү пайда болот. Бирок буга чейин теңдемелердин айрым түрлөрүнүн категориялары гана курулган, мисалы, [3]. Ошол эле учурда математикада белгилүү жана ар кандай типтеги теңдемелердин жана теңдемелер системаларынын эквиваленттүү экендигин далилдөө үчүн колдонулат.

Мындан тышкары, автономдуу кадимки дифференциалдык теңдемелердин тартибин төмөндөтүүнүн белгилүү ыкмасы, аргументти алмаштыруунун жана өзгөртүүнүн ар кандай ыкмалары, Кыргызстанда иштелип чыккан чечимдерди өзгөртүү ыкмасы, Кыргызстанда түзүлгөн кошумча аргумент ыкмасы ж.б., ар кандай чечимдери бар теңдемелердин эквиваленттүү болушу, ал тургай ар кандай мейкиндиктерде да эквиваленттүү болушу мүмкүн экендигин көрсөтөт. Ошондуктан, бул иштин максаты аталган ыкмалардын так жана бирдей сүрөттөлүшү жана теңдеме категориясынын жана анын категориячаларынын негизги түшүнүктөрүн, объектилерин жана морфизмдерин формулировкалоо, анын башка категориялар менен байланышын орнотуу үчүн «теңдеме» түшүнүгүн «теңдемелер системасы», «кошумча шарттары бар теңдеме» түшүнүктөрүн камтуу менен кеңейтүү болуп саналат.

Категориялар теориясынан белгилүү маалыматтарды келтирели

Аныктама 1. К категориясы :

1) *Ob(K)* $(A, B, C, \ldots)$ объекттердин жыйындысы;

2) *Mor(K)* $(f, g, h, ..)$ морфизмдеринин жыйындысы;

3) Ар бир f морфизмге кээ бир $dom(f)$ жана $cod(f)$ объекттерин ыйгаруучу dom жана cod операциялары (алар fтин башы жана аягы деп аталат). $dom(f) = A$ жана $cod(f) = B$ экендиги $f\colon A \to B$ катары көрсөтүлгөн. Бул учурда f Aдан Bге чейинки морфизм деп айтабыз.

4) $cod(f) = dom(g)$ болгондой ар бир жуп f жана g морфизмдери боюнча кандайдыр бир $g \circ f\colon A \to C$ морфизмди пайда кылган композиция операциясы (ал g жана f композициясы деп аталат).

5) Ар бир A объекти боюнча кандайдыр бир $I_A\colon A \to A$ морфизмин пайда кылган I операциясы (ал A объектисинин бирдик же теңдеш морфизми деп аталат).

К категориясындагы Aдан Bге чейинки бардык морфиздердин жыйындысы К(A, B) менен белгиленет.

Бул учурда, төмөнкү шарттар аткарылышы керек:

1. Композициянын ассоциативдүүлүгү. Каалаган үчтүк $f, g, h, f\colon A \to B$; $g\colon B \to C$; $h\colon C \to D$ морфизмдери үчүн $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ барабардыгы аткарылат.
2. Теңдештиктин касиеттери. Ар кандай $f\colon A \to B$ морфизми үчүн $f \circ IA = f$, $IB \circ f = f$ барабардыктары аткарылат.

Негизги категориялар, алардан бардык калгандары курулган, болуп төмөнкүлөр саналат:

Set көптүктөр категориясы. *Ob(Set)* – бош эмес көптүктөр, *Mor(Set)* – бир көптүктү экинчисине чагылдыруучу функциялар.

Функциялардын категориясы (операторлор, өзгөртүп түзүүлөр, чагылдыруулар). Ал адабиятта айтылган, бирок ага эч кандай белги киргизилген эмес, анын формалдуу сүрөттөлүшүн да таба алган жокпуз. Биз сунуштайбыз: *Func, Ob(Func)=Mor(Set), Mor(Func)* – функцияларды өзгөртүп түзүүлөр. Өз кезегинде бул категориянын субкатегориялары математиканын ар кандай тармактарында колдонулат.

Top топологиялык мейкиндиктердин категориясы. *Ob(Top)* – топологиялык мейкиндиктер, *Mor(Top)* – үзгүлтүксүз чагылдыруу.

Бул категориядагы түшүнүктөр башка нерселер менен катар маселелердин корректүүлүгүн аныктоо үчүн, анын ичинде теңдемелер категориясында колдонулат.

2. Теңдемелердин категориясын жана анын категориячаларын аныктоо

Динамикалык системалар теориясынын ар кандай бөлүмдөрүндө дифференциалдык, интегралдык, айырмалык, ошондой эле интегродифференциалдык жана башка типтеги теңдемелердин баштапкы, чектик, локалдык эмес шарттары жана башка кошумча маалыматтары менен ар кандай функционалдык мейкиндиктерде каралат. Мындай маселелерди бир түрдө көрсөтүү үчүн, ошондой эле белгилүү методдорду системалуу түрдө колдонуу жана жалпылоо үчүн категория теориясынын ыкмасын колдонуу сунушталат

Теңдемелер категориясы *Equa* [4] деп белгиленет.

Аныктама 1. *Ob(Equa)* - {бош эмес *X, Y* көптүктөрү, *X* көптүгүндө *P(x)* предикаты, $B{:}X\to Y$ өзгөртүп түзүүсү} топтому.

$\{X, Y, P, B\}$ теңдемесинин чечими $(\exists x\in X)(P(x)\wedge(y=B(x))$ болгондой $y\in Y$ болот.

Ошондой эле, эгерде B теңдеш өзгөртүп түзүү болсо, анда биз *"P(x)"*. теңдемесинин чечүү маселесин гана алабыз.

Mor(Equa) – $\{X, Y, P, B\}$ көптүктөрүнүн чечимдери (же алардын жоктугу) сакталгандай өзгөртүүлөр.

Морфизмдердин мисалдары:

1- М и с а л. Баштапкы көптүктүн өзгөртүлүшү. *X* көптүгү $\{x\in X{:}\ P(x)\}=\{x\in X_1{:}\ P(x)\}$ боло тургандай X_1 көптүгү менен алмаштырылат.

2- М и с а л. Чечимдерди өзгөртүү. $\varphi{:}X\to X$ биективдүү функциясы киргизилди. $\{X, Y, P, B\}$ маселеси *"*$P(\varphi(z)), z\in X$*"* теңдемесин чыгарууга жана $y=B(\varphi(z))$ эсептөөгө өзгөртүлөт.

3- М и с а л. Теңдеменин өзгөртүлүшү. P_1 предикаты же $\{x\in X{:}\ P(x)\}=\{x\in X{:}\ P_1(x)\}$, же (жалпы, бирок татаалыраак ыкма) $\{x\in X{:}\ P(x)\}\subset\{x\in X{:}\ P_1(x)\}$. катары киргизилет. Экинчи учурда, *B* өзгөртүп түзүүлөрү чечимдерин $\{x\in X{:}\ P_1(x)\}\backslash\{x\in X{:}\ P(x)\}$ топтомунан алып салуу үчүн өзгөртүлүшү керек.

Equa категориясынын категориячалары.

Equa-Func функциялары үчүн теңдемелер категориясы.

Аныктама 2. *Ob(Equa-Func)* - {$X\in Ob(Func)$, $Y\in Ob(Func)$ *X* боюнча *P(x)* предикаты, $B{:}X\to Y$ өзгөртүп түзүүлөрү} топтому.

Mor(Equa-Func) - өзгөртүүлөр, анын ичинде, 1-, 2-, 3- жалпы мисалдардан тышкары, төмөнкүлөр:

4- М и с а л. Аргументтин өзгөртүлүшү. $x(t)$ функциясы үчүн жаңы Z функцияларынын мейкиндигинен 1-1 $t=\psi(s)$ алмаштыруусу киргизилди, анда $z(s)=x(\psi(s))$ менен белгиленет жана, $\{x\in X: P(x)\}=\{z\in Z: P_1(z)\}$ болгондой P_1 предикаты киргизилет.

Үзгүлтүксүз жалпыланган предикаттары менен теңдемелер категориясы.

Аныктама 3. *Ob(Equa-Top)* - {топологиялык *X, Y* мейкиндиктери, функция - бири белгиленген "чындык" болгон чектүү маанилер жыйындысын алуучу *X* мейкиндигиндеги жалпыланган предикат $P(x)$, *X*те үзгүлтүксүз өтүүдө $P(x)$ функциясы маанилерди коңшуларга гана өзгөртөт (мындай функцияны жалпыланган-үзгүлтүксүз деп атоо сунуш кылынат) деген шартта $B:X\to Y$ өзгөртүп түзүүсү} топтому. Бул [5]те колдонулган.

Параметрлери бар теңдемелер үчүн сунушталат

Аныктама 4. *Ob(Equa-Par)* - {бош эмес *X, F, Y* көптүктөрү, $X\times F$ көптүгүндө $P(x, f)$ предикаты, $B:X\to Y$ өзгөртүп түзүүсү} топтому.

{*X, F, Y, P, B*} теңдемесинин чечими деп, каалаган $f\in F$ үчүн $(\exists x\in X)(P(x, f)\wedge(y=B(x))$ болгондой $y(f)\in Y$ ди атайбыз.

Ошондой эле, эгерде B теңдеш өзгөртүп түзүү болсо, анда *"P(x,y)"* теңдемесинин чечүү маселесин гана алабыз.

*Mor(Equa-Par) – {X, Y, P, B} (F*тен тышкары*)* көптүктөрүнүн чечимдери (же алардын жоктугу) сакталгандай өзгөртүүлөр.

Параметрлери бар корректтүү теңдемелер үчүн сунушталат

Аныктама 5. *Ob(Equa-Par-Top)* - {*X, F, Y* топологиялык мейкиндиктер, $X\times F$ те $P(x,f)$ предикаты, $B:X\to Y$ үзгүлтүксүз өзгөртүп түзүүсү} топтому. Бул учурда 1) $(\forall f\in F)(\exists! y\in Y)(\exists x\in X)(P(x,f)\wedge(y=B(x))$;

2) *y f* тен үзгүлтүксүз көз каранды.

Mor(Equa-Par-Top) – 1)- жана 2- касиеттерин сактаган өзгөртүп түзүүлөр.

Ошондой эле, эгерде предикат *P(x,f) ="A(x)=f"* түрүндө жазылса, мында *A* кандайдыр бир оператор болсо, анда биз "Адамар боюнча корректтүүлүктү" алабыз.

3. Корутунду

Бул макалада келтирилген аныктамалардан математикада кездешүүчү ар кандай типтеги теңдемелерди жалпы теңдемелер категориясына киргизүүгө боло тургандыгы көрүнүп турат.

Адабияттар

1. Медведев М.Я. Полусопряженные функторы и категории алгебр над n-тройками: Автореферат дисс. … к. ф.-м.н. (01.01.04) / М.Я. Медведев. - Новосибирск, 1973. - 17 с.

2. Борубаев А.А. О категорных характеристиках компактных, полных равномерных пространств и полных по Райкову топологических групп / А.А. Борубаев // Известия Академии наук, вып. 4, 2007. - С. 1-6.

3. Rosický J. Equational categories / J.Rosický // Cachiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, vol. 22, no. 1, 1981. - P.85-95.

4. Кененбаева Г.М., Аскар кызы Л., Бейшебаева Ж.К., Маматжан уулу Э. Элементы категории уравнений / Г.М. Кененбаева, Л.Аскар кызы, Ж.К. Бейшебаева, Э. Маматжан уулу // Вестник Института математики НАН КР, 2018, № 1. – С. 88-95.

5. Кененбаева Г.М. Применение доказательных вычислений к поиску областей, удовлетворяющих заданным свойствам / Г.М. Кененбаева. – Автореферат дисс. … к.ф.-м.н., 05.13.16. – Новосибирск, 1991. – 16 с.