УДК 517.5:517.91
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_1(4)_21

ФУНКЦИОНАЛДЫК ӨЗ АРА БАЙЛАНЫШТАР, ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР ЖАНА БАШКАРЫЛУУЧУ ОБЪЕКТТЕР ҮЧҮН АЛАРДЫН КОЛДОНУЛУШУ

Кененбаев Эламан
Elaman0527@gmail.com
Кыргыз Республикасынын Улуттук илимдер академиясынын Математика институту
Бишкек, Кыргызстан

Аннотация. *Макалада кандайдыр бир көптүктөгү объекттин чекиттеринин ортосундагы өз ара байланыш, анын ичинде функциянын маанилеринин, дифференциалдык теңдеменин чечимдеринин ортосундагы өз ара байланыш каралат. Алардын классификациясы сунушталат: чексиз жана чектүү сандагы чоңдуктар ортосундагы өз ара байланыштар; толук аныкталган жана жарым-жартылай аныкталган маанилердин ортосундагы өз ара байланыштар. Функционалдык өз ара байланыштардын үстүнөн болгон амалдар каралат. Геометриялык объектилердин, кыймылдуу геометриялык объекттердин, кадимки дифференциалдык теңдемелердин жана жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелердин функционалдык өз ара байланыштарынын мисалдары келтирилген. Мындай байланыштардын кээ бир дифференциалдык теңдемелерди изилдөө үчүн, компьютерде колдонуучунун жардамы менен башкарылуучу объекттердеги тилдик түшүнүктөрдүн сүрөттөлүштөрү үчүн колдонулушу көрсөтүлгөн.*

Негизги сөздөр: *функционалдык өз ара байланыш, дифференциалдык теңдеме, башкарылуучу объект, классификация, компьютерде көрсөтүү.*

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ, ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И УПРАВЛЯЕМЫХ ОБЪЕКТОВ

Kenenbaev Elaman
Elaman0527@gmail.com
Институт математики Национальной Академии наук Кыргызской Республики
Бишкек, Кыргызстан

Аннотация*. В статье рассматриваются соотношения между точками объекта из какого-либо множества, в том числе между значениями функции, решениями дифференциального уравнения. Предлагается их классификация: соотношения между бесконечным и между конечным количеством значений; полностью определенные и частично определенные. Рассматриваются действия над функциональными соотношениями. Приведены примеры функциональных соотношений для геометрических объектов, подвижных геометрических объектов, обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений в частных производных. Показано использование таких соотношений для исследования некоторых дифференциальных уравнений, для изображения языковых понятий на компьютере с помощью управляемых пользователем объектов.*

Ключевые слова: *функциональное соотношение, дифференциальное уравнение, управляемый объект, классификация, компьютерное представление.*

FUNCTIONAL RELATIONS, THEIR APPLICATION TO DIFFERENTIAL EQUATIONS AND CONTROLLED OBJECTS

Kenenbaev Elaman
Elaman0527@gmail.com
Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Kyrgyz Republic
Bishkek, Kyrgyzstan

Abstract. *The article deals with the relationship between the points of an object of any set, including ones between the values of a function, solutions of a differential equation. Their classification is proposed: relations between an infinite and between a finite number of values; fully defined and partially defined. Actions on functional relations are considered: intersection, union. Examples of functional relations for geometric objects, moving geometric objects, ordinary differential equations and partial differential equations are given. Application of such relations for the study of some differential equations, for the representation of language notions on a computer with assistance of user-controlled objects is shown.*

Keywords: *functional relation, differential equation, controlled object, classification, computer presentation.*

1. Киришүү. Макалада кандайдыр бир көптүктүн объектинин чекиттеринин ортосундагы байланыштар, анын ичинде функциянын маанилери, "функционалдык өз ара байланыштар" деп аталган дифференциалдык теңдеменин чечимдери.

Функционалдык ара байланыштар мамилелер математиканын ар кандай тармактарындагы объекттерде жана алардын колдонулуштарында бар. Анын ичинде, дифференциалдык теңдемелердин теориясы боюнча эмгектердин көпчүлүгүндө же чечимдер, же жакын чекиттердеги чечимдердин маанилери (жакындаштыруу ыкмалары) каралат. Ошол эле учурда, алыскы чекиттердеги функциялардын маанилери колдонулган кээ бир жыйынтыктар каралат [1].

Экинчи бөлүмдө геометриялык объектилердин, кыймылдуу геометриялык объекттердин, кадимки дифференциалдык теңдемелердин жана жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелердин функционалдык өз ара байланыштарынын мисалдары келтирилген. Алардын классификациясы сунушталат: чексиз жана чектүү сандагы чоңдуктар ортосундагы өз ара байланыштар; толук аныкталган жана жарым-жартылай аныкталган маанилердин ортосундагы өз ара байланыштар. Функционалдык өз ара байланыштардын үстүнөн болгон амалдар каралат.

Үчүнчү бөлүмдө мындай өз ара байланыштар кээ бир дифференциалдык теңдемелерди изилдөө үчүн, компьютерде колдонуучунун жардамы менен башкарылуучу объекттердеги тилдик түшүнүктөрдүн сүрөттөлүштөрү үчүн колдонулушу көрсөтүлгөн.

2. Функционалдык өз ара байланыштардын мисалдары жана классификациясы

Белгилөөнү колдонобуз: F – бири-бири менен туташтырылган чекиттердин минималдуу саны, $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in R^m$.

Чекиттердин номурлары чарчы кашаа менен белгиленет.

2.1. Тегерек. *F=4*. Эгерде *T[2]* жана *T[3]* чекиттери *T[1]* жана *T[4]* чекиттеринин ортосунда болсо, анда *(T[1] T[2] T[4])* бурчу *(T[1] T[3] T[4])* бурчуна барабар болот.

2.2. Кыймылдуу эки звенолуу сынык сызык. *F=3*. *(T[1] T [2])* сегменттин узундугу туруктуу, *(T [2] T [3])* сегменттин узундугу туруктууга барабар.

2.3. Белгилүү болгондой, эки өзгөрмөлүү гармоникалык функциялар өз ара байланышты канааттандырат: функциянын каалаган тегеректеги орточо мааниси (чексиз сандагы чекиттер) тегеректин борборундагы функциянын маанисине барабар.

Ошол эле учурда чекиттердин ар кандай чектүү көптүгүндө гармоникалык функция каалаган чоңдуктарды ала алат. *m=2* болсун, *x[1], x[2],…,x[k]* чекиттери жана *u[1], u[2],…,u[k]* сандары бар.

Бул маанилердин негизинде биз комплекстүү өзгөрмөнүн функциясы катары *L(x)* Лагранж көп мүчөсүн түзөбүз: *L(x[j])=u[j, j=1,...,k* жана армоникалык функция *U(x)=Re L(x)* ти аныктайбыз. Анда

$$U(x[j])= Re\, L(x[j])= Re\, u[j]= u[j],\, j=1,…,k.$$

Демек, чектүү чекиттердеги гармоникалык функциянын ар кандай маанилери бири-бири менен байланышпайт. Бул жерде $F=\infty$.

2.4. Бир скалярдуу өзгөрмөлүү *f(x)=kx* түрүндөгү сызыктуу функциясынын нөлдөн башка эки чекитиндеги маанилери туура келиши керек:

$$f(x[1])x[2]= f(x[2])x[1];\ F=2.$$

2.5. Үч чекиттеги бир скалярдуу өзгөрмөлүү *f(x)=kx+b* сызыктуу функциясынын маанилери туура келиши керек:

$$(f(x[1])- f(x[3]))(x[1]-x[3])= (f(x[2])- f(x[3]))(x[2)\ ]-x[3]);\ F=3.$$

2.6. Бир скалярдуу өзгөрмөлүү k даражадагы көп мүчө-функциянын *F=k+2* чекиттериндеги маанилери туура келиши керек.

m=1 болсун, *x[1], x[2],…,x[k+2]* сандары жана *f[1], f[2], …, f[k+2]* сандары берилсин. *x[1], x[2],…,x[k+1]* жана *f[1], f[2],…,f[k+1]* маанилерин колдонуп, k-тартиптеги L(x) Lagrange көп мүчөсүн түзөбүз. *L(x[k+2])=f[k+2]* болушу керек.

Эгерде чекиттер арифметикалык прогрессияны түзсө, анда мындай туура келүүчүлүк төмөкүдөй жазылат:

$$\sum_{j=0}^{k+1} C_{k+1}^{j}\,(-1)^{j} f(x[j+1]) = 0$$

2.7. Эки скалярдуу өзгөрмөлүү функция – ар бири бир өзгөрмөлүү функциялардын суммасы – Асгейрссондун тендештигин төрт чекит үчүн канааттандырат, *F=4*:

Эгерде *m=2* болгондо *f(x) ≡ f1(x1)+f2(x2), u[1], u[2], v[1], v[2]* кандайдыр бир сандар болсо, анда

$$f(u[1], v[1])+ f(u[2], v[2])\equiv f(u[1], v[2])+ f(u[2], v[1]\ ).$$

Функционалдык өз ара байланышка амалдар:

Эгерде *u[3]* кандайдыр бир сан болсо, анда биз жаза алабыз:

$f(u[2], v[1])+ f(u[3], v[2])\equiv f(u[2], v[2])+ f(u[3], v[1]\ ).$

Мурунку барабардык менен кошсок, алабыз

$f(u[1], v[1])+ f(u[3], v[2])\equiv f(u[1], v[2])+ f(u[3], v[1]).$

2.8. *m* скалярдуу өзгөрмөлөлүү функциясы - ар бири бир өзгөрмөлүү функциялардын суммасы - тик бурчтукту түзгөн төрт чекити үчүн ошондой эле Асгейрссон тендештигин канааттандырат, анын каалаган эки карама-каршы жагы ордината окторунун бирине параллель.

2.9. *m* скалярдуу згөрмөлөлүү функциясы - ар бири аз өзгөрмөлүү функциялардын суммасы катарында –

$f(x)= g_1(x_2, \ldots, x_m) + \ldots + g_q(x_1, \ldots, x_{q-1}, x_{q+1}, \ldots, x_m) + \ldots + g_m(x_1, \ldots, x_{m-1})$,

$F=2m$ чекиттери үчүн жалпыланган Асгейрссон тендештигин канааттандырат.

3. Дифференциалдык теңдемелердин классификациясы жана функционалдык өз ара байланыштардын колдонулушу

Адабияттарда, кадимки дифференциалдык жана экиден көп эмес өзгөрмөлүү жана экинчи тартиптен жогору эмес жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелер үчүн, терминологиядагы бирдейлик бар экенин көрсөтүп турат.

[2], [3], [4] жана башкаларда жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелерди алардын жазылышына жараша классификациялоо жана жазылышын жөнөкөйлөштүрсө да өзгөрбөй тургандай өзгөртүп түзүүлөрдү сунушталат. Мурда бир типке таандык болгон теңдемелердин чечимдеринин ар кандай функционалдык өз ара байланыштары бар экендиги [5], [6] көрсөтүлгөн. [7] макаласында, жазуу формасына карабастан, теңдемелерди чечимдерине жараша классификациялоо сунушталган.

Функционалдык өз ара байланыштарды колдонуунун мисалдарын карап көрөлү.

3.1. Кадимки дифференциалдык теңдемелер.

$y^{(k)}(x)=0$ теңдемесин карап көрөлү. Анын чечими $(k\text{-}1)$- тартиптеги көп мүчө. 2.6-бөлүктөн анын маанилери каалаган $h>0$ үчүн удаалаш түрдө формула боюнча табылышы мүмкүн экени келип чыгат:

$$y(x) = \sum_{j=1}^{k} C_k^j\,(-1)^{j+k} y(x-jh)$$

Ар түрдүү чекиттердеги теңдеменин чечиминин маанилеринин ортосундагы байланышты C. J. de la Vallee Poussin алган (мисалы, [8]): теңдеме

$$y^{(n)}(x)+p_1(x)\, y^{(n-1)}(x)+\ldots+ p_n(x)\, y(x) = 0,\ \ a\le x\le b, \qquad p_k(x)\in C[a,b],$$

$y(x[i]) = c_i,\ i=1,\ldots, n$ шарты менен

$$\|p_1\|_{[a,b]}(b-a)+ \|p_2\|_{[a,b]}\,(b-a)^2/2!+\ldots + \|p_n\|_{[a,b]}\,(b-a)^n/n! < 1.$$

чектөөсүндө жалгыз чыгарылышка ээ.

3.2. Жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелер.

$u_{xx}(x,y)\text{-}u_{yy}(x,y)=0$ толкун теңдемесин карап көрөлү. Бул теңдеменин жалпы чечими д'Аламбердин формуласы менен табылат жана 2.7-бөлүмдөн (t, x) тегиздикте жактары координата октору менен 45^0 түзгөн тик бурчтуктун диагоналдарынын биринин учунда $u(t, x)$ функциясынын маанилеринин суммасы, башка диагоналдын учтарындагы $u(t,x)$ функциясынын маанилеринин суммасына барабар, $F=4$ экендиги келип чыгат. Бул функ-ционалдык байланышты колдонуу менен, ар кандай чекиттердеги чечимдин маанилерин удаалаш табууга болот.

3.3. өзгөрүүчү этиштердин өз алдынча компьютерде көрсөтүлүшү [9]. Математикалык көз караштан жана компьютердик ишке ашыруу боюнча, этиштер: эң жөнөкөй (которуу) – *ал, кой, жылдыр, бер* (бир чекиттин кыймылын программалоо жетиштүү), жылдыруу –буруу – *бур, тургуз* (бир чекиттин жана буруу бурчунун өзгөрүшүнүн кыймылы программаланган) жана татаал – дисплейде өзгөртүүчү объект болуп бөлүнөт. Мындай этиштер үчүн көп учурларда функционалдык өз ара байланышкан чектүү сандагы чекиттердин кыймылын программалоо жетиштүү. Мисалы, *түздө, бүктө* (2.1-пунктту кара).

4. Корутунду

Бул макалада келтирилген мисалдар функционалдык өз ара байланыштарды колдонуу математиканын жана анын колдонмолорунун ар кандай тармактарында объекттерди көрсөтүүгө жана кээ бир маселелерди чечүү мүмкүнчүлүктөрүн берээрин көрсөтүп турат.

Адабияттар

1. Панков П.С. Аксиоматическая теория характеристик и ее применение к аналитическим функциям / П.С.Панков, Г.М.Матиева, Х.С. Сабирова // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, вып. 33. – Бишкек: Илим, 2004. – С. 37-42.
2. Джураев Т.Д. О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка / Т.Д.Джураев, Я.Попелек // Дифференциальные уравнения. - 1991. - Т. 27. - № 10. - С. 1734-1745.
3. Джураев Т.Д. К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка / Т.Д.Джураев, А.Сопуев. – Ташкент: Фан, 2000. – 144 с.
4. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа / Т.Д.Джураев, А.Сопуев. М.Мамажанов. – Ташкент: Фан, 1986. – 220 с.
5. Сабирова Х.С. Влияние младших членов дифференциальных уравнений с частными производными на их характеристичность / Х.С. Сабирова // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, вып. 38. – Бишкек: Илим, 2008. – С. 107-111.
6. Сабирова Х.С. Различие в характеристических свойствах волновых уравнений с различным количеством переменных / Х.С. Сабирова // Вестник Международного университета Кыргызстана, № 1(20), 2011. – С. 58-61.
7. Кененбаева Г.М. Элементы категории уравнений / Г.М.Кененбаева, Л.Аскар кызы, Ж.К. Бейшебаева, Э. Маматжан уулу // Вестник Института математики НАН КР, 2018, № 1. - С. 88-95.
8. Бессмертных Г. А. О существовании и единственности решений многоточечной задачи Валле–Пуссена для нелинейных дифференциальных уравнений / Г. А. Бессмертных // Дифференциальные уравнения, 1970, том 6, № 2, с. 298–310.
9. Kenenbaev E. Functional relations and mathematical models of transforming verbs / P.Pankov, E. Kenenbaev, S. Chodobaev // Herald of Institute of Mathematics of NAS of KR, 2022, No. 1. - Pp. 131-136.