ВЕСТНИК ОШСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
МАТЕМАТИКА. ФИЗИКА. ТЕХНИКА. 2024, № 1(4)

УДК 515.12
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_1(4)_19

ПОСТРОЕНИЕ МНОЖЕСТВА ВСЕХ СЧЕТНО ПАРАКОМПАКТНЫХ РАСШИРЕНИЙ

Канетова Динара Эменовна, к.ф.-м.н.,
Dinara_kg@mail.ru
Научно-исследовательский медико-социальный институт
Жалал-Абад, Кыргызстан

Аннотация. *Одной из центральных тем в общей топологии является тема, связанная с разного типа расширениями топологических пространств. М. Стоун отмечал, что одной из интересных и трудных проблем общей топологии является изучение всех расширений данного топологического пространства. Исходя из общей проблемы М. Стоуна, Б. Банашевский систематизировал общие задачи теории расширений. П.С. Александровым была поставлена проблема классификации компактных расширений и сформированы различные общие задачи о расширениях топологических пространств. А.А. Борубаевым при помощи равномерности построены множества всех паракомпактных, сильно паракомпактных, линделёфовых и полные по Дьедонне расширений тихоновских пространств.*

В настоящей статье при помощи равномерных структур строится множества всех счетно паракомпактных расширений.

Ключевые слова: *счетно паракомпактные расширение, секвенциальная полнота, секвенциальная полнота по Дьедонне, счетная предпаракомпактность, предуниверсальность.*

БАРДЫК САНАКТУУ ПАРАКОМПАКТУУ КЕҢЕЙҮҮЛӨРДҮН КӨПТҮГҮН ТУРГУЗУУ

Канетова Динара Эменовна, ф.-м.и.к.,
Dinara_kg@mail.ru
Илимий-изилдөө медициналык социалдык-институту
Жалал-Абад, Кыргызстан

Аннотация. *Жалпы топологиянын борбордук темаларынын бири болуп топологиялык мейкиндиктердин трдүү типтеги кеңейүүлөрү менен байланышкан тема саналат. М. Стоун жалпы топологиядагы эң кызыктуу жана оор көйгөйлөрдөн болуп берилген топологиялык мейкиндиктеги бардык кеңейүүлөрдү изилдөө деп белгилеген. М. Стоундун койгон жалпы көйгөйлөрүнүн негизинде Б. Банашевский кеңейүүлөр теориясынын жалпы маселелерин системалаштырган. П.С. Александров тарабынан компактуу кеңейүүлөрдүн классификациялоо көйгөйү жана топологиялык мейкиндиктердин кеңейүүлөрү жөнүндөгү түрдүү жалпы маселелери коюлган. А.А. Бөрүбаев тарабынан тихоновдук мейкиндиктердин бир калыптуу структуралардын жардамы менен бардык паракомпактуу, күчтүү паракомпактуу, линделёфтук жана Дьедонне боюнча толук кеңейүүлөрүнүн көптүгү тургузулган.*

Бул илимий макалада бардык санактуу паракомпактуу кеңейүүлөрдүн көптүгү тургузулган.

Ачкыч сөздөр: *санактуу паракомпактуу кеңейүү, секвенциалдуу толуктуулук, Дьедонне боюнча секвенциалдуу толуктуулук, санактуу предпаракомпактуулук, предуниверсалдуулук.*

CONSTRUCTION OF THE SET OF ALL COUNTABLY PARACOMPACT EXTENSIONS

Kanetova Dinara Emenovna, Cand. Phys.-math. Sc.,
Dinara_kg@mail.ru
Scientific-Research Medical-Social Institute

Jalal-Abad, Kyrgyzstan

Abstract: *One of the central theme in general topology is the theme related to various types of extensions of topological spaces. M. Stone noted that one of the interesting and difficult problems of general topology is the study of all extensions of a given topological spaces. Based on the general problem of M. Stone, B. Banashevsky systematized the general problems of the theory of extensions. P.S. Aleksandfoff posed the problem of classifying compact extensions and formulated various general problems on extensions of topological spaces. A.A. Borubaev, using uniformity, constructed the sets of all paracompact, strongly paracompact, Lindelof and Dieudonne complete extensions of Tychonoff spaces. In this paper, using uniform structures, we construct the sets of all countably paracompact extensions.*

Keywords: *countably paracompact extensions, sequentially completeness, Dieudonne sequentially completeness, countably preparacompactness, preuniversality*

А.А. Борубаевым [1], [3] при помощи равномерности построены множества всех паракомпактных и близкие к нему расширения тихоновских пространств. В работе [2] построены множества всех μ -полные по Дъедонне расширения. Индекс компактности и суперпаракомпактные расширения изучены в работе [4].

Известно, что на каждом счетно паракомпактном пространстве его универсальная равномерность является секвенциально полной, а система всех счетно открытых покрытий пространства образует базу универсальной равномерностью. Пусть M -всюду плотное подпространство пространства X, V -равномерность на M, порожденная равномерностью U. Тогда равномерное пространство (X,U) является секвенциальным пополнением равномерного пространства (M,V). Следует отметить, что равномерность V, вообще говоря, не является универсальной равномерностью, но обладает специальным свойством – счетно предпаракомпактностью. По счетной предпаракомпактностью пространства M можно построить все его счетно паракомпактные расширения, т.е. получить эти расширения как секвенциальные пополнения пространства M по счетно предпаракомпактности.

Напомним [2], что равномерное пространство (X,U) называется секвенциально полным, если всякий фильтр Коши F, имеющий счетную базу B сходится в нем.

Равномерное пространство $(\tilde{X}_s,\tilde{U}_s)$ называется секвенциальным пополнением равномерного пространства (X,U), если: 1) $X\subset\tilde{X}_s$; 2) (X,τ_U) всюду плотно в $(\tilde{X}_s,\tau_{\tilde{U}_s})$; 3) $(\tilde{X}_s,\tilde{U}_s)$ -секвенциально полное равномерное пространство.

Пусть (X,U) -равномерное пространство и $\varphi_s(U)$ -множество всех минимальных фильтров Коши равномерного пространства (X,U), каждое из которых имеет счетную базу [1], [2].

Пусть $U(X)$ -множество всех равномерностей на множестве X. Две равномерности U и V будем считать эквивалентными $U\sim V$, если $\varphi_s(U)=\varphi_s(V)$. Положим $E_s(U)=\{V\in U(X):U\sim V\}$. Ясно, что $E_s(U)$ является частично упорядоченным отношением.

Нормальную последовательность $\{\alpha_n\}$ покрытий множества X будем называть $\varphi_s(U)$-нормальной, если $\alpha_n\cap F\neq\varnothing$ для любых $F\in\varphi_s(U)$ и $n\in N$.

Для любой равномерности U на множестве X множество $E_s(U)$ имеет наибольший элемент. Действительно, пусть $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ -$\varphi_s(U)$-нормальные последовательности покрытий X . Тогда система $\{\alpha_n \wedge \beta_n\}$ является $\varphi_s(U)$-нормальной последовательностью покрытий множества X . Система U_{φ_s} всех $\varphi_s(U)$-нормальных последовательностей покрытий множества X является равномерностью на множестве X . Заметим, что $\varphi_s(U)=\varphi_s(U_{\varphi_s})$. Докажем, что U_{φ_s} -наибольший элемент $E_s(U)$. Пусть $V\in E_s(U)$ и $\lambda\in V$. Тогда существует нормальная последовательность покрытий $\{\lambda_n\}$ из V такая, что $\lambda=\lambda_1$. $\{\lambda_n\}$ -$\varphi_s(U)$-нормальная последовательность покрытий, поскольку $\varphi_s(U)=\varphi_s(V)$. Следовательно, $\{\gamma_n\}\subset U_{\varphi_s}$, $V\subset U_{\varphi_s}$.

Наибольший элемент U_{φ_s} частично упорядоченного множества $E_s(U)$ будем называть φ_s-лидером равномерности U . Равномерное пространство (X,U) называется предуниверсальным, если $U=U_{\varphi_s}$.

Равномерное пространство (X,U) является предуниверсальным тогда и только тогда, когда секвенциальное пополнение $(\tilde{X}_s,\tilde{U}_s)$ равномерного пространства (X,U) является универсальным пространством, в самом деле, пусть V -такая равномерность на X , что $\varphi_s(\tilde{U}_s)=\varphi_s(\tilde{V}_s)$. Поскольку $(\tilde{X}_s,\tilde{U}_s)$ секвенциально полное пространство, то $\varphi_s(\tilde{U}_s)$ есть множество всех фильтров окрестностей точек пространства $(\tilde{X}_s,\tilde{U}_s)$, имеющих счетную базу. Ясно, что $\varphi_s(U)=\varphi_s(\tilde{U}_s)\cap X$, поэтому $\varphi_s(U)=\varphi_s(V)$, где V - равномерность на X, порожденная равномерностью $\tilde{V}_s$. Ясно, что $\tilde{V}_s\subset\tilde{U}_s$. Следовательно, $(\tilde{X}_s,\tilde{U}_s)$ универсальное пространство. Обратно, пусть $(\tilde{X}_s,\tilde{U}_s)$ - универсальное пространство и $\alpha\in U_{\varphi_s}$. Тогда $\tilde{\alpha}_s=\{\tilde{A}_s : A\in\alpha\}$, где $\tilde{A}_s=\tilde{X}_s\setminus[X\setminus A]_{\tilde{X}_s}$ есть покрытие $(\tilde{X}_s,\tilde{U}_s)$. Система $\{\tilde{\alpha}_s : \alpha\in U_{\varphi_s}\}$ является базой для некоторой равномерности $\tilde{U}_{\varphi_s}$ на $\tilde{X}_s$. $\tilde{U}_{\varphi_s}=\tilde{U}_s$, поскольку $\tilde{U}_s$ -универсальная. Итак, $U=U_{\varphi_s}$.

Определение 1 [2]. Топологическое пространство X называется μ-полным по Дьедонне, если на нем существует μ -полная равномерность.

$\aleph_0$-полное по Дьедонне пространство называется секвенциально полным по Дьедонне пространством [2].

Топологическое пространство X секвенциально полно по Дьедонне тогда и только тогда, когда универсальная равномерность пространства X секвенциальна полна [2].

В самом деле, пусть топологическое пространство X секвенциально полно по Дьедонне. Тогда найдется равномерность U на X, такая что (X,U) секвенциально полно. Пусть U_X -универсальная равномерность на X и F -произвольный фильтр Коши равномерного пространства (X,U_X), имеющий счетную базу. Тогда фильтр Коши F имеющий счетную базу сходится в (X,U) т.е. в (X,U_X). Значит, (X,U_X) секвенциально полно.

Пусть $D_s(X)$ -множество всех секвенциально полных по Дьедонне расширений, а $U_{D_s}(X)$ -множество всех предуниверсальных равномерностей тихоновского пространства X. Множество $D_s(X)$ частично упорядочено относительно порядка "$\leq$", а $U_{D_s}(X)$ частично упорядочено по включению "$\subset$".

Теорема 1. Для любого тихоновского пространства X частично упорядоченные множества $D_s(X)$ и $U_{D_s}(X)$ изоморфны.

Доказательство. Пусть задано отображение $F_s : U_{D_s}(X) \to D_s(X)$, $F_s(U) = s_U X$, $U \in U_{D_s}(X)$, и расширение $s_U X$ пространства X. Ясно, что $F_s(U) \in D_s(X)$. Пусть $U, V \in U_{D_s}(X)$ и $F_s(V) = s_U(X)$. Положим $F_s(U) = F_s(V)$. Найдется $f_s : s_U X \to s_V X$ такое, что $f_s \circ s_U = s_V$. Пусть $\tilde{U}_s$ и $\tilde{V}_s$ -универсальные равномерности пространств $s_U X$ и $s_V X$ соответственно. Заметим, что $U = \{s_U^{-1}\tilde{\alpha}_s : \tilde{\alpha}_s \in \tilde{U}_s\}$ и $V = \{s_U^{-1}\tilde{\beta}_s : \tilde{\beta}_s \in \tilde{V}_s\}$. $f_s : (s_U X, \tilde{U}_s) \to (s_V X, \tilde{V}_s)$ -равномерный изоморфизм, так как $f_s : s_U X \to s_V X$ -гомеоморфизм, а $\tilde{U}_s$ и $\tilde{V}_s$ -универсальные равномерности. Отсюда следует, что $U = V$. Пришли к противоречию. Итак, $F_s(U) \neq F_s(V)$. Докажем сюръективность отображения F_s. Пусть $sX \in D_s(X)$ и $\tilde{U}_s$ -универсальная равномерность на нем. Положим $U = \{s^{-1}\tilde{\alpha}_s : \tilde{\alpha}_s \in \tilde{U}_s\}$. Заметим, что U -предуниверсальная равномерность на X. Легко видеть, что $(sX, \tilde{U}_s)$ является секвенциальным пополнением равномерного пространства (X, U). Следовательно, $F_s(U) = s_U X$. Теперь остается показать, что отображение $F_s : (U_{D_s}(X), \subset) \to (D_s(X), \leq)$ -изоморфизм. Пусть $U, V \in U_{D_s}(X)$ такие, что $V \subset U$. Пусть $F_s(U) = s_U X$, $F_s(V) = s_V X$. Пусть $(s_U X, \tilde{U}_s)$ -секвенциальное пополнение пространства (X, U), $(s_V X, \tilde{V}_s)$ -секвенциальное пополнение пространства (X, V). Очевидно, что тождественное отображение $i_X : (X, U) \to (X, V)$ равномерно непрерывно. Тогда существует такое равномерно непрерывное отображение $f_s : (s_U X, \tilde{U}_s) \to (s_V X, \tilde{V}_s)$, что $f_s \circ s_U = s_V$. Отсюда следует, что $s_V X \leq s_U X$. Обратно, пусть $s_V X \leq s_U X$. Тогда существует такое непрерывное отображение $f_s : s_U X \to s_V X$, что $f_s \circ s_U = s_V$. Если $\tilde{U}_s$ и $\tilde{V}_s$ -универсальные равномерности пространств $s_U X$, $s_V X$ соответственно, то отображение $f_s : (s_U X, \tilde{U}_s) \to (s_V X, \tilde{V}_s)$ равномерно непрерывно. Так как $f_s \circ s_U = s_V$ и $U = \{s_U^{-1}\tilde{\alpha}_s : \tilde{\alpha}_s \in \tilde{U}_s\}$ и $V = \{s_U^{-1}\tilde{\beta}_s : \tilde{\beta}_s \in \tilde{V}_s\}$, то $V \subset U$. Следовательно, отображение $F_s : (U_{D_s}(X), \subset) \to (D_s(X), \leq)$ является изоморфизмом.

Пусть X-тихоновское пространство. Через $T(X)$ обозначим множество всех тихоновских расширений, $CP(X)$ -множество всех счетно паракомпактных расширений X. $CP(X) \subset T(X)$ и по отношению "$\leq$" оно частично упорядочено.

Определение 2. Пусть (X,U)-равномерное пространство. Равномерность U называется счетно предпаракомпактным, если всякое счетное покрытие α множества X, такое что $\alpha \cap F \neq \varnothing$ для любого $F \in \varphi_s(X)$ содержится в равномерности U.

Пусть $U_{CP}(X)$ -множество всех счетно предпаракомпактных равномерностей тихоновского пространства X.

Теорема 2. Для пространства X, частично упорядоченные множества $(CP(X),\leq)$ и $(U_{CP}(X),\subset)$ попарно равномерно изоморфны.

Доказательство. Пусть задано отображение $P: U_{CP}(X) \to CP(X)$, $P(U) = s_U X$, где $s_U X$ -расширение X. Расширение $s_U X$ строится как секвенциальное пополнение X по равномерной структуре U. Покажем справедливости равенства $P(U_{CP}(X)) = CP(X)$. Пусть $U \in U_{CP}(X)$ и $P(U) = s_U X$. Пусть $\hat{\alpha}$ -счетное открытое покрытие пространства $s_U X$, элементы которого состоят из канонически открытых множеств $s_U X$. Пусть U' - универсальная равномерность $s_U X$. Через α обозначим след покрытия $\hat{\alpha}$. Тогда для каждого минимального фильтра Коши $F \in \varphi_s(X)$ существует фильтр окрестностей $B(x)$ некоторой точки $x \in s_U X$ такой, что $F = \{O_x \cap X : O_x \in B\}$. Следовательно, $\alpha \cap F \neq \varnothing$ для любого $F \in \varphi_s$. Так как, равномерность U счетно предпаракомпактна, то α является элементом равномерности U. Ясно, что $[\alpha]$ принадлежит в $\widetilde{U}$, а $\langle[\alpha]\rangle$ принадлежит в U, где $[\alpha] = \{[A]_{s_U X} : A \in \alpha\}$, $\langle[\alpha]\rangle = \{\langle[A]_{s_U X}\rangle_{s_U X} : A \in \alpha\}$. Отсюда следует, что $\hat{\alpha} = \langle[\alpha]\rangle$, т.е. $\hat{\alpha} \in U'$. Тогда существует локально конечное открытое покрытие β такое, что $\beta \succ \alpha$. Пусть $\hat{\beta} \in U'$ такое покрытие, что $\hat{\beta} \cap X = \beta$. Легко видеть, что покрытие $\hat{\beta}$ также является локально конечным покрытием, вписанное в счетное открытое покрытие $\hat{\alpha}$. Следовательно, $P(U_{CP}(X)) \subset CP(X)$.

Теперь докажем справедливость обратного включения. Пусть sX -некоторый элемент из $CP(X)$, а U' -универсальная равномерность sX, которая имеет базу, состоящую из локально конечных покрытий $B' \subset U'$. Заметим, что равномерная структура U, порожденная равномерной структурой U', тоже обладает базой, состоящую из локально конечных покрытий. Покажем, что $U \in U_{CP}(X)$. Выберем такое счетное открытое покрытие α множества X, что α и F имеют общий элемент для всякого F из $F \in \varphi_s(U)$. Для каждого $x \in s_U X$ найдется такое открытое множество $\hat{A}_x$ в $s_U X$, что след множества $\hat{A}_x$ на X содержится в α. Положим $\hat{\alpha} = \{\langle \hat{A}_x \rangle : x \in s_U X\}$. Так как U'-универсальная равномерная структура, то счетное покрытие $\hat{\alpha}$ является равномерным покрытием относительно U'. Пусть $\gamma = \hat{\alpha} \wedge \{X\}$. Ясно, что $\gamma \succ \alpha$. Тогда согласно определению равномерности имеем, что $\alpha \in U$, т.е. U является счетно предпаракомпактной. Таким образом $P(U) = sX$. Значит, множество $CP(X)$ содержится в множестве $P(U_{CP}(X))$.

Литература

1. Борубаев А.А. Равномерные пространства и равномерно непрерывные отображения. Фрунзе: Илим, 1990.

2. Канетов Б.Э. Некоторые классы равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений. Бишкек: КНУ им. Ж. Баласагына, 2013.

3. Borubaev A.A. Uniform topology and its applications. Bishkek, Ilim, 2021.

4. Kanetov B., Kanetova D. Characterization of some types of compactness and a construction of index compactness $\leq \tau$ extensions by means of uniform structures. AIP Cof. Proc., Melville. – New York. – 2018. – Vol. 1997. – P. 1-5.