УДК 515.122
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_1(4)_18

ОБ ОДНОМ ТИПЕ КОМПАКТНОСТИ РАВНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Канетов Бекболот Эменович, д.ф.-м.н., профессор
bekbolot_kanetov@mail.ru
Кыргызский национальный университет имени Ж. Баласагына
Бишкек, Кыргызстан
Сактанов Улукбек Абдисаматович, к.ф.-м.н, доцент
uca73@mail.ru
Ошский государственный университет
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *В последнее время интенсивно развивается теория компактных типов равномерных пространств. К типам компактности равномерных пространств относятся предкомпактные, σ-предкомпактные, τ-ограниченные, равномерно Менгера, равномерно Гуревича, компактные пространства. В настоящей статье исследуются некоторые свойства равномерно Гуревича пространства (или равномерно H - пространства).*

Ключевые слова: *равномерно H - пространства, предкомпактные пространства, σ - предкомпактные пространства, τ - ограниченные пространства, предкомпактные отображения, равномерно совершенные отображения.*

БИР КАЛЫПТУУ МЕЙКИНДИКТЕРДИН БИР КОМПАКТУУЛУК ТИБИ ЖӨНҮНДӨ

Канетов Бекболот Эменович, ф.-м.и.д., профессор
bekbolot_kanetov@mail.ru
Ж. Баласагын атандагы Кыргыз улуттук университети,
Бишкек, Кыргызстан
Сактанов Улукбек Абдисаматович, ф.-м.и.к, доцент
uca73@mail.ru
Ош мамлекеттик университети
Ош, Кыргызстан

Аннотация*: Акыркы убакта бир калыптуу мейкиндиктердин компакттуу тибинин теориясы интенсивдүү түрдө өнүгүп жатат. Бир калыптуу мейкиндиктердин компакттуулугунун тибтерине предкомпактуу, σ - предкомпактуу, τ - чектүү, бир калыптуу Менгер, бир калыптуу Гуревич, компактуу мейкиндиктери кирет. Бул макалада бир калыптуу Гуревич мейкиндигинин (же бир калыптуу H - мейкиндиктин) кээ бир касиеттери изилденген.*

Ачкыч сөздөр: *бир калыптуу H - мейкиндиктер, предкомпактуу мейкиндиктер, σ - предкомпактуу мейкиндиктер, τ - чектелген мейкиндиктер, предкомпактуу чагылтуулар, бир калыптуу жеткилең чагылдыруулар.*

ABOUT ONE TYPE OF COMPACTNESS

Kanetov Bekbolot Emenovich, Doctor of Ph. & Math. Sc., professor
bekbolot_kanetov@mail.ru
Kyrgyz National University named after Jusup Balasagyn
Bishkek, Kyrgyzstan
Saktanov Ulukbek Abdisamatovich, Candidate of Ph. & Math. Sc., docent
uca73@mail.ru

Osh State University
Osh, Kyrgyzstan

***Abstract**: now edeys, the theory of compact types of uniform spaces has been intensively developed. The types of compactness of uniform spaces include precompact, σ-precompact, τ-bounded, uniformly Menger, uniformly Hurevich, compact spaces. In the present article, some properties of a uniformly Hurevich space (or a uniformly H-space) are investigated.*

***Keywords:** uniformly H-spaces, precompact spaces, σ-precompact spaces, τ-bounded spaces, precompact mappings, uniformly perfect mappings.*

В последнее время интенсивно развивается теория компактных типов равномерных пространств. К типам компактности равномерных пространств относятся предкомпактные, σ-предкомпактные, τ-ограниченные, равномерно Менгера, равномерно Гуревича, компактные пространства. Теория этих инвариантов весьма обширна.

Класс равномерно Гуревича пространств, впервые введен и исследован Л. Кочинацом [10], [11].

В настоящей статье исследуются некоторые свойства равномерно Гуревича пространства (или равномерно H-пространства).

Напомним [10], что равномерное пространство (X,U) называется равномерно Гуревича пространством (или равномерно H-пространством), если для любой последовательности $\{\alpha_n\} \subset U$ существует такая последовательность $\{\beta_n\}$, что $\beta_n \subset \alpha_n$ конечное подсемейство и для каждой точки $x \in X$, $x \in \cup\beta_n$ почти для всех $n \in N$.

В работе все равномерные пространства предполагаются отделимыми, топологические пространства – тихоновскими, а отображения – равномерно непрерывными. Основные терминологии взяты из работы [1] – [9].

Теорема 1. Всякое предкомпактное равномерное пространство (X,U) является равномерно H-пространством.

Доказательство. Пусть (X,U)- предкомпактное пространство и $\{\alpha_n\} \subset U$ - произвольная последовательность равномерных покрытий. В силу предкомпактности (X,U) для любого номера $n \in N$ покрытие α_n содержит конечное подпокрытие $\alpha_n^0 \subset \alpha_n$. Положим $\{\beta_n\}$, $\beta_n = \alpha_n^0$. Легко видеть, что для каждого $x \in X$, $x \in \cup\beta_n$ почти для всех $n \in N$. Следовательно, (X,U) является равномерно H-пространством.

Следствие 1. Любое компактное равномерное пространство (X,U) является равномерно H-пространством.

Теорема 2. Всякое σ-предкомпактное равномерное пространство (X,U) является равномерно H-пространством.

Доказательство. Пусть равномерное пространство (X,U) является σ-предкомпактным и $\{\alpha_n\} \subset U$ - последовательность равномерных покрытий. Так как (X,U) есть σ-предкомпактное пространство, то оно представляется в виде объединения счетного числа своих предкомпактных подпространств, т.е. $X = \underset{n}{\cup} X_n$. Положим $X_n \wedge \alpha_n = \alpha_{X_n}$. Поскольку, пространства X_n предкомпактное, то равномерное покрытие α_n содержит конечное равномерное покрытие α_m^0. Пусть $x \in X$ - произвольная точка.

Тогда легко видеть, что $x \in \cup \alpha_n^0$ почти для всех n. Следовательно, (X, U) является равномерно H-пространством.

Теорема 3. Всякое равномерно H-пространство (X, U) является $\aleph_0$-ограниченным.

Доказательство. Пусть $\alpha \in U$ - произвольное равномерное покрытие и $\alpha_n = \alpha$ для любого $n \in N$. Тогда для последовательности $\{\alpha_n\} \subset U$, где $\alpha_n = \alpha$, $n \in N$, существует такая последовательность $\{\beta_n\}$ конечных подсемейств, что для каждой точки $x \in X$ $x \in \cup \beta_n$ почти для всех $n \in N$. Для каждого $n \in N$ и для каждого элемента $B_{\beta_n(i)} \in \beta_n, i = 1,2, \ldots, k$ такого что, $B_{\beta_n(i)} \ni x$ выбирая по одному элементу $A_{B_{\beta_n(i)}}$ из $\alpha = \alpha_n$ мы получим конечное подсемейство $\alpha_n^0 \subset \alpha$. Тогда семейство $\bigcup\limits_{n \in N} \alpha_n^0$ является счетным подпокрытием покрытия α. Следовательно, пространство (X, U) является $\aleph_0$-ограниченным.

Из теоремы 1. и 3. следует, что H-пространство промежуточно между предкомпактными и $\aleph_0$-ограниченными пространствами.

Теорема 4. Тихоновское пространство X является H-пространством тогда и только тогда, когда равномерное пространство (X, U_X) с универсальной равномерностью U_X является равномерно H-пространством.

Доказательство. Достаточность. Пусть тихоновское пространство X является H-пространством и $\{\alpha_n\} \subset U_X$ - произвольная последовательность равномерных покрытий. Внутренность $\langle \alpha_n \rangle$ каждого покрытия $\alpha_n \in U$ является открытым покрытием, то $\{\langle \alpha_n \rangle\}$ является последовательностью открытых покрытий пространства X, $\langle \alpha_n \rangle = \{\langle A \rangle : A \in \alpha_n\}$, где $\langle A \rangle$ внутренность множества A. Тогда существует такая последовательность $\{\beta_n\}$ конечных открытых подсемейств, что для каждой точки $x \in X$ $x \in \cup \beta_n$ почти для всех $n \in N$, следовательно, пространство (X, U_X) является H-пространством.

Достаточность. Пусть $\{\alpha_n\}$- произвольная последовательность открытых покрытий пространства X. Тогда $\{\alpha_n\} \subset U_X$. Поэтому $x \in \cup \lambda_n$ существует такая последовательность $\{\beta_n\}$ конечных семейств, что для каждой точки $x \in X$ $x \in \cup \beta_n$ почти для всех $n \in N$. Положим $\lambda_n = \langle \beta_n \rangle, \langle \beta_n \rangle = \{\langle B \rangle : B \in \beta_n\}$. Заметим, что $\{\lambda_n\}$ последовательность конечных подсемейств и для каждой точки $x \in X$ почти для всех $n \in N$. Следовательно, X является H-пространством.

Теорема 5. Предкомпактный прообраз равномерно H-пространства является равномерно H-пространством. $\gamma_n \in U$

Доказательство. Пусть $f : (X, U) \to (Y, V)$- предкомпактное отображение равномерного пространства (X, U) в равномерно H-пространство (Y, V) и $\{\alpha_n\} \subset U$ - произвольная последовательность равномерных покрытий. Тогда для любого $n \in N$ существует такие конечное покрытие и $\beta_n \in V$, что $f^{-1}\beta_n \wedge \gamma_n \succ \alpha_n$. Поскольку (Y, V)

равномерно H-пространство, то для последовательности $\{\beta_n\} \subset V$ существует такая последовательность $\{\beta_n^0\}$ конечных подсемейств, что для каждой точки $x \in X$ $x \in \cup\beta_n^0$ почти для всех $n \in N$. Для любого $n \in N$ семейство $f^{-1}\beta_n^0 \wedge \gamma_n$ является конечным, и кроме того $\cup\{f^{-1}\beta_n^0 \wedge \gamma_n\} = \cup f^{-1}\beta_n^0$. Далее, для любого $f^{-1}B_{n,i}^0 \cap \Gamma_{n,i} \in f^{-1}\beta_n \wedge \gamma_n$ выберем такое $A_{n,i}^0 \in \alpha_n$, что $f^{-1}B_{n,i}^0 \cap \Gamma_{n,i} \subset A_{n,i}^0$. Легко видеть, что для каждой точки $x \in X$ $x \in \cup\alpha_n^0$ почти для всех $n \in N$, следовательно, (X, U) является равномерно H-пространством.

Из теоремы Л. Кочинаца (см [10], стр. 131) и теоремы 5 следует следующая теорема.

Теорема 6. При предкомпактных отображениях равномерно H-пространство сохраняется как в сторону образа, так и в сторону прообраза.

Следствие 2. При равномерно совершенных отображениях равномерно H-пространство сохраняется в обе стороны.

Предложение 1. Пространство действительных чисел R с естественной равномерностью является равномерно H-пространством.

Доказательство. Пусть $\{\alpha_n\} \subset U_R$ - произвольная последовательность равномерных покрытий и $\beta = \{(n-1, n+1) : n = 0, \pm1, \pm2, \ldots\}$ - открытое покрытие пространства (R, U_R). Рассмотрим следующее построение: при $n = 0$ в силу компактности $[-1,1]$ из покрытия α_1 выделим конечное подсемейство $\alpha_1^0 \subset \alpha_1$ такое, что $(-1,1) \subset [-1,1] \subset \cup\alpha_1^0$, при $n = 1$ из покрытия α_2 выделим конечное подсемейство $\alpha_2^0 \subset \alpha_2$ такое, что $(-2,0) \subset [-2,0] \subset \alpha_2^0$, а при $n = -1$ из покрытия α_3 выделим конечное подсемейство $\alpha_3^0 \subset \alpha_3$, такое, что $(-2,0) \subset [-2,0] \subset \alpha_3^0$ и т.д. Далее продолжая этот процесс, мы получим последовательность $\{\alpha_n^0\}$ конечных подсемейств. Поскольку β является покрытием пространства (R, U_R) и каждый элемент $(n-1, n+1) \in \beta$ покрывается некоторым конечным подсемейством α_n^0, то для каждой точки $x \in R$ $x \in \cup\alpha_n^0$ почти для всех $n \in N$. Следовательно, пространство (R, U_R) является равномерно H-пространством.

Следствие 3. Пространство рациональных чисел Q индуцированной из равномерностью U_R является равномерно H-пространством. Единичный интервал $(0,1)$ индуцированной из равномерностью U_R также является равномерно H-пространством.

Доказательство следует из предложения и из теоремы Л. Кочинаца (см [10], стр. 131) о том, что всякое подпространство равномерно H-пространства является равномерно H-пространством.

Предложение 2. Пополнение равномерно H-пространства является равномерно H-пространством.

Доказательство. Пусть $(\tilde{X}, \tilde{U})$ - пополнение равномерно H-пространства (X, U) и $\{\tilde{\alpha}_n\} \subset \tilde{U}$ - произвольная последовательность равномерных покрытий. Положим $\alpha_n = \tilde{\alpha}_n \wedge \{X\}$. Тогда из определения пополнения равномерных пространств $\{\alpha_n\} \subset U$.

Так как (X,U) равномерно H-пространство, то существует последовательность $\{\beta_n\}$ конечных подсемейств такая, что для каждой точки $x \in X$ $x \in \cup\beta_n$. Положим $\tilde{\beta}_n = \{\tilde{\mathrm{B}}_n : \mathrm{B}_n \in \beta_n\}$, $\tilde{\mathrm{B}}_n = \tilde{X} \setminus [X \setminus \mathrm{B}_n]_{\tilde{X}}$, $\mathrm{B}_n \in \beta_n$. При любом $n \in N$ семейство $\tilde{\beta}_n$ является конечным, так как семейство β_n является конечным, при любом $n \in N$. Пусть $\tilde{x} \in \tilde{X}$ - произвольная точка. Поскольку отображение $i : (X,U) \to (\tilde{X},\tilde{U})$ изоморфизм равномерного пространства (X,U) в равномерное пространство $(\tilde{X},\tilde{U})$, то $i^{-1}(\tilde{x}) = x$. Поэтому $\tilde{x} \in \cup\tilde{\beta}_n$ почти для всех $n \in N$. Следовательно, пополнение $(\tilde{X},\tilde{U})$ является равномерно H-пространством.

Известно, что произведение $(X \times Y, U \times V)$ равномерно H-пространства (X,U) на равномерно H-пространство (Y,V) является равномерно H-пространством.

Теорема 7. Конечная дискретная сумма $(X,U) = \coprod\{(X_i,U_i) i = 1,2,\ldots,m\}$ равномерно H-пространств $(X_i,U_i), i=1,2,...,m$ - равномерно H-пространства.

Доказательство. Пусть $(X_i,U_i), i=1,2,...,m$ - равномерно H-пространства. Пусть $\{\alpha_n\} \subset U$ - некоторая последовательность равномерных покрытий. Тогда $\{\alpha_{n,i}\} \subset U_i$ $i = 1,2,\ldots,m$. Поэтому при каждом $i \in \{1,2,\ldots,m\}$ существует такая последовательность $\{\beta_{n,i}\}$, что при любом $n \in N$ семейство $\beta_{n,i}$ является конечным и для каждой точки $x \in X_i$ $x \in \cup\beta_{n,i}$ почти для всех $n \in N$. Положим $\beta_n = \bigcup_{i=1}^{n}\beta_{n,i}$. Поскольку пространство $(X_i,U_i), i=1,2,...,m$ - попарно дизъюнктны в пространстве (X,U), то система β_n является конечным подсемейством для α_n. По определению дискретной суммы равномерных пространств, имеем, что для каждой точки $x \in X$ $x \in \cup\beta_n$ почти для всех $n \in N$. Следовательно, равномерное пространство (X,U) равномерно H-пространство.

Литература

1. Борубаев А.А. Равномерные пространства и равномерно непрерывные отображения. – Фрунзе: Илим, 1990.
2. Борубаев А.А., Чекеев А.А. Равномерные структуры на топологических пространствах и группах. – Бишкек: Изд. центр при КГПУ им. И. Арабаева, 1997.
3. Борубаев А.А. Равномерные пространства. – Бишкек: Учкун, 2003.
4. Борубаев А.А. Равномерные пространства. - Бишкек: КГУ, 1987.
5. Борубаев А.А. О некоторых классах равномерных пространств. - Изв. НАН КР. – 2012. – № 3. – С. 102-105.
6. Борубаев А.А. Равномерная топология. – Бишкек: Илим, 2013.
7. Канетов Б.Э. Некоторые классы равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений. – Бишкек, 2013.
8. Borubaev A.A. Uniform topology and its applications. – Bishkek: Ilim, 2021.
9. Isbell J. Uniform space. – Providence, 1964.
10. Kocinac L.D.R. Selection principles uniform spaces // Note Mat. – T. 22. – Vol. 2. – 2003. – P. 127-139.
11. Kocinac L.D.R. Some covering properties in topological and uniform spaces // Proceedings of the Steklov Institute of Math. – T. 252. – 2006. – P. 122-137.