УДК 517.98-519.21
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_1(4)_17

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПРЕДЕЛЬНЫХ МЕР ГИББСА МОДЕЛИ ИЗИНГА-ПОТТСА НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ

Исаков Бегзод Мухторжонович, докторант
Isakovbegzod19810420@gmail.com
Андижанский государственный университет
Ахмедов Олимхон Улугбек угли, докторант
Ферганский государственный университет
Olimxonaxmedov5@gmail.com

Аннотация: *Известно, что при низких температурах каждому основному состоянию соответствует предельная мера Гиббса. Следовательно, задача изучения множества основных состояний для данной физической системы является актуальным. Рассматривается модель Изинга-Поттса на дереве Кэли. В рассматриваемой работе изучается основное состояние для модели Изинга-Поттса с тремя состояниями на дереве Кэли. Известно, что существует взаимно-однозначное соответствие между множеством вершин V дерева Кэли порядка k и группой G_k, где G_k – свободное произведение $k+1$ циклических групп второго порядка. Определяются периодические и слабо периодические основные состояния, соответствующие нормальным делителям группы G_k.*

Ключевые слова: *дерево Кэли, модель Изинга-Поттса, периодические и слабо периодические основные состояния.*

FUNKSIONAL EQUATIONS FOR THE LIMITING GIBBS MEASURES OF ISING-POTTS MODEL ON A CAYLEY TREE

Isakov Begzod Mukhtorjonovich, PhD student
Isakovbegzod19810420@gmail.com
Andijan state university
Axmedov Olimxon Ulugbek ugli, PhD student
Fergana State University
Olimxonaxmedov5@gmail.com

Abstract. *It is known that at low temperatures, each ground state corresponds to a Gibbs limit measure. Therefore, the task of studying the set of basic states for a given physical system is relevant. The Ising-Potts model on the Cayley tree is considered. In this paper, we study the ground state for the Ising-Potts model with three states on the Cayley tree. It is known that there exists a one-to-one correspondence between the set of the vertices V of the Cayley tree of order k and a group G_k being a free product of $k+1$ cyclic groups of second order. We define periodic and weakly periodic ground states corresponding to normal divisors of the group G_k. Periodic and weakly periodic ground states corresponding to the normal divisor of group G_k are determined.*

Keywords: *Cayley tree, Ising-Potts model, periodic and weakly periodic ground states.*

Введение. Каждой мере Гиббса сопоставляется одна фаза физической системы. Если существует более чем одна мера Гиббса, то говорят, что существуют фазовые переходы. Основная проблема для данного гамильтониана – это описание всех отвечающих ему предельных мер Гиббса. Известно, что фазовая диаграмма Гиббсовых мер для данного гамильтониана близко к фазовой диаграмме основных изолированных (устойчивых) состояний этого гамильтониана. При низких температурах основному состоянию соответствует предельная мера Гиббса (см.[1], [2]). Поэтому, естественно возникает задача описания основных состояний. В работе [5] изучена трансляционно-инвариантные и периодические основные состояния для модели Изинга на дереве Кэли. В работе [6] вводится понятие слабо периодических основных состояний. Слабо периодические основные состояния для модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями описаны в работах [6], [7]. Периодические основные состояния для модели Поттса с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли порядка $k=2$ изучены в работе [8], [9]. В работе [10] для модели Поттса изучены слабо периодические основные состояния для нормального делителя индекса 2. В работе [11] для модели Поттса с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли порядка $k \geq 2$ описано множество периодических и слабо периодических основных состояний, соответствующих нормальным делителям индекса 4 группового представления дерева Кэли.

В работе [12] изучены периодические и слабо периодические основные состоянии для $\lambda-$модели на дерево Кэли. А в работе [13] для модели Изинга изучена периодические основные состояние относительно подгруппы индекса три. В данной работе рассматривается одна модель смешанного типа (далее назовем моделью Изинга-Поттса) на дереве Кэли порядка $k \geq 2$. Цель этой работы определение достаточных условий существования Гиббсовых мер для этой модели.

Пусть $\tau^k = (V, L), k \geq 1$ есть дерево Кэли порядка k, т.е. бесконечное дерево, из каждой вершины которого выходит равно $k+1$ ребер, где V –множество вершин, L – множество ребер τ^k.

Пусть G_k – свободное произведение $k+1$ циклических групп $\{e, a_i\}$ второго порядка с образующими $a_1, a_2, ...a_{k+1}$, соответственно т.е. $a_i^2 = e \quad i = \overline{1, k+1}$ (см.[3]).

Существует взаимно-однозначное соответствие между множеством вершин V дерево Кэли порядка k и группой G_k (см. [3], [4]).

Две вершины $x, y \in V$ называются соседними, если они представляют собой концевые точки некоторого ребра $l \in L$, и в этом случае мы будем писать $l = \langle x, y \rangle$.

Для произвольной точки $x^0 \in V$ положим $W_n = \{x \in V \mid d(x^0, x) = n\}$, $V_n = \bigcup_{m=0}^{n} W_m$, $L_n = \{< x, y > \in L \mid x, y \in V_n\}$, где $d(x, y)$ – расстояние между x и y на дереве Кэли, т.е. число ребер пути, соединяющее x и y.

Обозначим через $S(x)$ множество "прямых потомков" точки $x \in G_k$, т.е. если $x \in W_n$, то $S(x) = \{y \in W_{n+1} : d(x, y) = 1\}$. Через $S_1(x)$ обозначим множество всех ближайших соседей точки $x \in G_k$, т.е. $S_1(x) = \{y \in G_k : \langle x, y \rangle\}$ и через $x_\downarrow$ обозначим единственный элемент множества $S_1(x) \setminus S(x)$.

Пусть $G_k / G_k^* = \{H_1, ..., H_r\}$–фактор группа, где G_k^*-нормальный делитель индекса $r \geq 1$.

Определения 1. Конфигурация $\sigma(x)$ называется G_k^* - периодической, если $\sigma(x)=\sigma_i$ при $x_i \in H_j, \forall x \in G_k$. G_k-периодическая конфигурация называется трансляционно-инвариантной.

Для данной периодической конфигурации индекс нормального делителя называется периодом конфигурации.

Определение 2. Конфигурация $\sigma(x)$ называется G_k^*-слабо периодической, если $\sigma(x)=\sigma_{ij}$ при $x_{\downarrow} \in H_i,\ x \in H_j,\ \forall x \in G_k$.

Модель Изинга. Рассмотрим функцию σ которая сопоставлять вершины со значениями спина. Мы рассмотрим модель, где спиновые переменные принимают значения из множества $\Phi=\{-1,1\}$, и расположены на вершинах дерева. Тогда конфигурация σ на V определяется как функция $x \in V \to \sigma(x) \in \Phi$; множество всех конфигураций совпадает с $\Omega=\Phi^V$.

Гамильтониан модели Изинга определяется как $H(\sigma)=-J \sum_{\langle x,y\rangle \in L} \sigma(x)\sigma(y),$

где $J \in \mathbb{R}$, $\langle x,y\rangle -$ ближайшие соседи.

Модель Поттса. Модель Поттса рассматривается как обобщением модели Изинга. Рассмотрена функция σ которая сопоставлять вершины со значениями спина $\Phi=\{1,2,\ldots,q\},\ q \geq 2$ и расположенные на вершинах дерева. Тогда конфигурация σ на V определяется как функция $x \in V \to \sigma(x) \in \Phi$; множество всех конфигураций совпадает с $\Omega=\Phi^V$.

Гамильтониан модели Поттса определяется как $H(\sigma)=-J \sum_{\langle x,y\rangle \in L} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)},$

где $J \in \mathbb{R}$, $\langle x,y\rangle -$ ближайшие соседи и $\delta_{ij} -$ символ Кронекера: $\delta_{ij}=\begin{cases} 0 \text{ если } i \neq j, \\ 1 \text{ если } i = j. \end{cases}$

Модель Изинга-Поттса с параметром α

Мы рассматриваем модель, где спин принимает значения из множества $\Phi=\{-1,0,1\}$. Конфигурация σ на V определяется как функция $x \in V \to \sigma(x) \in \Phi;$ множество всех конфигураций совпадает с $\Omega=\Phi^V$.

Гамильтониан модели Изинга-Поттса с параметром α имеет вид

$$H(\sigma)=-\alpha J_1 \sum_{\langle x,y\rangle \in L} \sigma(x)\sigma(y)-(1-\alpha)J_2 \sum_{\langle x,y\rangle \in L} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)},$$

где $J=(J_1,J_2) \in R^2, \alpha \in (0,1),\ \delta_{ij} -$ символ Кронкера.

Система функциональных уравнений

Мы приведем систему функциональных уравнений решения которых дают предельную меру Гиббса модели Изинг-Поттса с параметром $\alpha \in (0,1)$.

Пусть $\mathbf{h}: x \mapsto (h_{-1,x}, h_{0,x}, h_{+1,x}) \in R^3$ векторная функция от $x \in V$, $\{x^0\}$.

Рассмотрим распределение вероятностей $\mu_{\mathbf{h}}^{(n)}$ на Ω_{V_n}:

$$\mu_{\mathbf{h}}^{(n)}(\sigma_n)=Z_{n,\mathbf{h}}^{-1}\exp\left\{-\beta H(\sigma^{(n)})+\sum_{x\in W_{n-1}}h_{b(x),(\sigma_n)_{b(x)}}\right\},$$

где $\sigma_n\in\Omega_{V_n}, (\sigma_n)_{b(x)}=\sigma_n|_{b(x)}$ и $Z_{n,h}=\sum_{\omega_n\in\Omega_{V_n}}\exp\left\{-\beta H(\omega^{(n)})+\sum_{x\in W_{n-1}}h_{b(x),(\omega_n)_{b(x)}}\right\},$

для $h_{b(x),\sigma_{b(x)}}\in R.$

Рассмотрим условие согласованности для $\mu_{\mathbf{h}}^{(n)}$: $\sum_{\substack{\omega_n\in\Omega_{V_n}\\ \omega_n|_{V_{n-1}}\equiv\sigma_{n-1}}}\mu_{\mathbf{h}}^{(n)}(\omega_n)=\mu_{\mathbf{h}}^{(n-1)}(\sigma_{n-1}),$

для всех $n\geq 1$ и $\sigma_{n-1}\in\Omega_{V_{n-1}}$.

Учитывая теорему Колмогорова, существует единственная предельная мера Гиббса μ_h на Ω такой, что для каждого $n=1,2,...$ и $\sigma_n\in\Omega_{V_n}$, имеет место равенство:

$$\mu_h(\{\sigma|_{V_n}=\sigma_n\})=\mu_h^{(n)}(\sigma_n).$$

Доказано следующая

Теорема 1. Вероятностное распределение $\mu_h^{(n)}(\sigma)$ согласованно при $k\geq 2$ тогда и только тогда для любого $x\in V\setminus\{x^0\}$ имеют место следующие:

$$\begin{cases} z_{-1,x}=\left(\dfrac{\eta^{\alpha}\nu^{1-\alpha}z_{-1,x}+\dfrac{1}{\eta^{\alpha}}z_{+1,x}+1}{z_{-1,x}+z_{+1,x}+\nu^{1-\alpha}}\right)^k, \\ z_{+1,x}=\left(\dfrac{\dfrac{1}{\eta^{\alpha}}z_{-1,x}+\eta^{\alpha}\nu^{1-\alpha}z_{+1,x}+1}{z_{-1,x}+z_{+1,x}+\nu^{1-\alpha}}\right)^k, \end{cases}$$

где $\eta=exp(J_1\beta), \nu=exp(J_2\beta), \beta=1/T,\quad z_{i,x}=exp(h_{i,x}-h_{0,x}), i=\pm 1$ для всех $x\in V$.

Литература

1. Синай Я.Г, Теория фазовых переходов. Строгие результаты. М.:Наука.1980.
2. Minlos R.A., Introduction to mathematical statistical physics. University lecture series, V.,19. 2000.
3. Rozikov U. A Gibbs Measures on Cayley Trees. Hackensack, NJ World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2013.
4. Н. Н. Ганиходжаев, У. А. Розиков Описание периодических крайних гиббсовских мер некоторых решеточных моделей на дереве Кэли. Теоретическая и математическая физика, том 111, номер 1, 1997, стр.109-117.
5. U.A.Rozikov, A Constructive Description of Ground States and Gibbs Measures for Ising Model With Two-Step Interactions on Cayley Tree, Jour. Statist. Phys. 122: 217-235 (2006).
6. Розиков У.А., Рахматуллаев М.М. Слабо периодические основные состояния и меры Гиббса для модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли. ТМФ. 2009, Т.,160, №3, С., 507-516.
7. Rahmatullaev M.M. Description of weak periodic ground states of Ising model with competing interactions on Cayley tree Appl. Math. and Inf.Science. 2010. V.,4, №2, P. 237-241.
8. Ботиров Г.И., Розиков У.А., Модель Поттса с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли: контурный метод. ТМФ, 2007, Т .153, №1, с. 86-97.
9. F.Mukhamedov, U.Rozikov, F.F.Mendes. On contour arguments for the three state Potts model with competing interactions on a semi-infinite Cayley tree. Journal of Mathematical Physics 48, 013301 (2007); https://doi.org/10.1063/1.2408398
10. Рахматуллаев М.М. Слабо периодические меры Гиббса и основные состояния для модели Поттса с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли.] ТМФ, 2013, Т.176, №3, с. 477-493.

11. M.M.Rahmatullaev, M.A.Rasulova, Periodic and weakly periodic ground states for the Potts model with competing interactions on the Cayley tree. Sib. Adv. Math. 26(3), 215-229 (2016)

12. F.M.Mukhamedov, M.M.Rahmatullaev, M.A.Rasulova, Weakly periodic ground states for the $\lambda-$model. Ukr. Mat. Zh. 2020. V. 72, № 5. pp. 667678

13. M.M.Rahmatullaev, D.O.Egamov, F.H.Haydarov, Periodic And Weakly Periodic Ground States Corresponding To Subgroups Of Index Three For The Ising Model On Cayley Tree. Reports on Mathematical Physics, 2021, V. 88, № 2. pp. 247-257