УДК 517.968
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_1(4)_16

ВЫБОР ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА ПЕРВОГО РОДА С ТРЕМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Зулпукаров Жакшылык Алибаевич, к.ф.-м. н., доцент
zulpukarov66@mail. ru
Жороев Туйгунбек Жунусович ст. преподаватель,
E-mail. tuigun2003@mail.ru
Ошский технологический университет им. М. М. Адышева
Алиева Жаркынай Анарбаевна ст. преподаватель,
Zharkynay_71@mail.ru
Ошский государственный педагогический университет
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *В данной статье рассмотрен метод выбора параметра регуляризации решения системы линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода с тремя независимыми переменными в пространстве $C_n(G)$.*

Различные вопросы решения интегральных уравнений Вольтеррапервого рода широко исследованы в работах таких российских ученых, как А.Н. Тихонов М. М. Лаврентьев, В.К. Иванов, А.Л. Бухгейм, В.Г. Романов, а также рассмотрены кыргызскими учеными М.И. Иманалиевым, А.Асановым и другими. Построение регуляризации решения интегрального уравнения Вольтерра первого рода с одним неизвестным было рассмотрено и исследовано в предыдущих работах.

Ключевые слова: *вектор-функция, ядро, пространство, уравнения, параметр, сингулярно-возмущенные, системы уравнений, теорема.*

ҮЧ КӨЗ КАРАНДЫСЫЗ ӨЗГӨРМӨЛҮҮ БИРИНЧИ ТҮРДӨГҮ СЫЗЫКТУУ ВОЛЬТЕРРАНЫН ИНТЕГРАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР СИСТЕМАСЫНЫН РЕГУЛЯРИЗАЦИЯЛЫК ПАРАМЕТРИН ТАНДОО

Зулпукаров Жакшылык Алибаевич, ф.-м.и.к., доцент
zulpukarov66@mail. ru
Жороев Туйгунбек Жунусович улук окутуучу
tuigun2003@mail.ru
Адышева М. М. атындагы Ош технологиялык университети
Алиева Жаркынай Анарбаевна улук окутуучу
Zharkynay_71@mail.ru
Ош мамлекеттик педагогикалык университети
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *Бул макалада $C_n(G)$ мейкиндигинде үч көз карандысыз өзгөрмөлүү биринчи түрдөгү сызыктуу Вольтерранын интегралдык теңдемелеринин системасынын чечиминин регуляризациялык параметрин тандоо ыкмасы каралат.*

Биринчи түрдөгү Вольтерранын сызыктуу интегралдык теңдемелерин чечимдеринин бар болушу үчүн ар кандай маселелери орус окумуштууларынын А.Н. Тихонов, М.М.Лаврентьев, В.К. Иванов, А.Л. Буххайм, В.Г. Романов, ошондой эле кыргыз окумуштуулары М.И. Иманалиев, А.Асанов жана башкалар. Биринчи түрдөгү Вольтерра интегралдык теңдемесин бир белгисиз менен чечүүнүн регуляризациясын куруу мурунку эмгектерде каралып, изилденген.

Ачкыч сөздөр: *вектордук функция, ядро, мейкиндик, теңдемелер, параметр, теңдемелердин сингулярдуу козголгон системасы, теорема.*

CHOICE OF THE REGULARIZATION PARAMETER OF THE SYSTEM OF A LINEAR INTEGRAL VOLTERRA EQUATION OF THE FIRST KIND WITH THREE VARIABLES

Zulpukarov Zhakshylyk Alibaevich, Candidate of Ph. and Math. Sc., Associate Professor
zulpukarov66@mail. ru
Zhoroev Tuygunbek Zhunusovich, Senior Lecturer
tuigun2003@mail.ru
Osh Technological University named after M. M. Adysheva
Alieva Zharkynai Anarbaevna, Senior Lecturer
Zharkynay_71@mail.ru
Osh State Pedagogical University
Osh, Kyrgyzstan

Abstract:: *This article considers a method for choosing the regularization parameter of a solution to a system of linear Volterra integral equations of the first kind with three independent variables in the space $C_n(G)$.*

Various issues of solving Volterra integral equations of the first kind are widely studied in the works of such Russian scientists as A.N. Tikhonov M.M. Lavrentiev, V.K. Ivanov, A.L. Buchheim, V.G. Romanov, and also reviewed by Kyrgyz scientists M.I. Imanaliev, A. Asanov and others. The construction of a regularization of the solution of the Volterra integral equation of the first kind with one unknown was considered and studied in previous works.

Keywords: *vector function, kernel, space, equations, parameter, singularly perturbed systems of equations, theorem.*

Рассматривается система

$$\int_0^t K(t,x,y,s)u(s,x,y)ds + \int_0^t\int_0^x N(t,x,y,s,z)u(s,z,y)dzds +$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^y M(t,x,y,s,z,w)u(s,z,w)dwdzds = f(t,x,y), \ (t,x,y)\in G, \quad (1)$$

где $K(t,x,y,s)$, $N(t,x,y,s,z)$ и $M(t,x,y,s,z,w)$ – (nxn) – известные матрицы функции, а $u(t,x,y)$ и $f(t,x,y)$ – соответственно искомая и заданная n – мерные вектор-функции на $G=\{(t,x,y):\ 0\le t\le T,\quad 0\le x\le X,\quad 0\le y\le Y\}$.

Потребуем выполнение следующих условий:

а) $\|K(t,x,y,s)\|\in C(G_1)$, $\|N(t,x,y,s,z)\|\in C(G_2)$, $\|M(t,x,y,s,z,w)\|\in C(G_3)$, $\|K(t,x,y,t)\|\le N_0\lambda_0(t)$ и $\lambda(t,x,y)\ge\lambda_0(t)\ge 0$ при $(t,x,y)\in G$, $0<N_0$ –const, $\lambda(t,x,y)$ – определенна с помощью формулы (3.1.2), из [5] $\lambda_0(t)\in L_1(0,T)$,

$$G_1=\{(t,x,y,s):\ 0\le s\le t\le T,\ 0\le x\le X,\ 0\le y\le Y\},$$
$$G_2=\{(t,x,y,s,z):\ 0\le s\le t\le T,\ 0\le z\le x\le X,\ 0\le y\le Y\},$$
$$G_3=\{(t,x,y,s,z,w):\ 0\le s\le t\le T,\ 0\le z\le x\le X,\ 0\le w\le y\le Y\};$$

б) при $t>\tau$ для любых $(t,x,y,s),(\tau,x,y,s)\in G_1$ справедливо

$$\|K(t,x,y,s)-K(\tau,x,y,s)\|\le C\int_\tau^t\lambda_0(s)ds,$$

где $0<C$ – некоторый положительный скаляр;

в) при $t>\tau$ для любых $(t,x,y,s,z),(\tau,x,y,s,z)\in G_2$ справедливо

$$\|N(t,x,y,s,z)-N(\tau,x,y,s,z)\|\le C_1\int_\tau^t\lambda_0(s)ds,$$

где $0<C_1$ – некоторая постоянная и $N(t,x,y,t,z)\equiv 0$ при $(t,x,y,z)\in G_4=\{(t,x,y,z):\ 0\le t\le T,\ 0\le z\le x\le X,\ 0\le y\le Y\}$;

г) при $t>\tau$ для любых $(t,x,y,s,z,w),(\tau,x,y,s,z,w)\in G_3$ справедливо

$$\|M(t,x,y,s,z,w)-M(\tau,x,y,s,z,w)\|\le C_2\int_\tau^t\lambda_0(s)ds,$$

где $0<C_2$ – некоторая постоянная и $M(t,x,y,t,z,w)\equiv 0$ при $(t,x,y,z,w)\in G_5=\{(t,x,y,z,w):\ 0\le t\le T,\ 0\le z\le x\le X,\ 0\le w\le y\le Y\}$;

д) вместо точной правой части $f(t,x,y)$ задано ее приближенное значение $f_\delta(t,x,y)$ из $C(G)$ такое, что

$$\|f(t,x,y)-f_\delta(t,x,y)\|_C\le\delta,\ \delta>0,\ (t,x,y)\in G.$$

Наряду с уравнением (1) рассмотрим следующие сингулярно-возмущенные системы уравнений:

$$\varepsilon u_\varepsilon(t,x,y)+\int_0^t K(t,x,y,s)u_\varepsilon(s,x,y)ds+\int_0^t\int_0^x N(t,x,y,s,z)u_\varepsilon(s,z,y)dzds+$$
$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^y M(t,x,y,s,z,w)u_\varepsilon(s,z,w)dwdzds=f(t,x,y)+\varepsilon u(0,x,y),\ (t,x,y)\in G,\quad(2)$$

и приближенно сингулярно-возмущенные системы уравнений

$$\varepsilon u_{\varepsilon\delta}(t,x,y)+\int_0^t K(t,x,y,s)u_{\varepsilon\delta}(s,x,y)ds+\int_0^t\int_0^x N(t,x,y,s,z)u_{\varepsilon\delta}(s,z,y)dzds+$$
$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^y M(t,x,y,s,z,w)u_{\varepsilon\delta}(s,z,w)dwdzds=f_\delta(t,x,y)+\varepsilon u_\delta(0,x,y),\ (t,x,y)\in G,\quad(3)$$

где $0<\varepsilon$ – малый параметр, $u(t,x,y)$ – решение системы (1) и начальные условия решений системы уравнений (1) и (3) связаны между собой следующим образом:

$$\|u(0,x,y)-u_\delta(0,x,y)\|\le C^1\sqrt{\delta},\ \ x\in[0,X],y\in[0,Y],\quad(4)$$

где $0<C^1$ – некоторая постоянная.

Из (2) отнимаем (3), имеем

$$\varepsilon[u_\varepsilon(t,x,y)-u_{\varepsilon\delta}(t,x,y)]+\int_0^t K(t,x,y,s)[u_\varepsilon(s,x,y)-u_{\varepsilon\delta}(s,x,y)]ds+$$
$$+\int_0^t\int_0^x N(t,x,y,s,z)[u_\varepsilon(s,z,y)-u_{\varepsilon\delta}(s,z,y)]dzds+$$
$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^y M(t,x,y,s,z,w)[u_\varepsilon(s,z,w)-u_{\varepsilon\delta}(s,z,w)]dwdzds=$$
$$=f(t,x,y)-f_\delta(t,x,y)+\varepsilon[u(0,x,y)-u_\delta 0,x,y)].\quad(5)$$

Уравнение (5) преобразуем к следующему виду:

$$u_\varepsilon(t,x,y)-u_{\varepsilon\delta}(t,x,y)+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t K(s,x,y,s)[u_\varepsilon(s,x,y)-u_{\varepsilon\delta}(s,x,y)]ds=$$

$$=-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t [K(t,x,y,s)-K(s,x,y,s)][u_\varepsilon(s,x,y)-u_{\varepsilon\delta}(s,x,y)]ds-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\int_0^x N(t,x,y,s,z)[u_\varepsilon(s,z,y)-u_{\varepsilon\delta}(s,z,y)]dzds-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\int_0^x\int_0^y M(t,x,y,s,z,w)[u_\varepsilon(s,z,w)-u_{\varepsilon\delta}(s,z,w)]dwdzds+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}[f(t,x,y)-f_\delta(t,x,y)]+u(0,x,y)-u_\delta(0,x,y).$$

Отсюда, применив резольвенту матричного ядра $\left[-\frac{1}{\varepsilon}K(s,x,y,s)\right]$, аналогично имеем как в § 3.1 из [5].

$$u_\varepsilon(t,x,y)-u_{\varepsilon\delta}(t,x,y)=\int_0^t H(t,x,y,s,\varepsilon)[u_\varepsilon(s,x,y)-u_{\varepsilon\delta}(s,x,y)]ds+$$

$$+\int_0^t\int_0^x N_1(t,x,y,s,z,\varepsilon)[u_\varepsilon(s,z,y)-u_{\varepsilon\delta}(s,z,y)]dzds+\int_0^t\int_0^x\int_0^y M_1(t,x,y,s,z,w)\times$$

$$\times[u_\varepsilon(s,z,w)-u_{\varepsilon\delta}(s,z,w)]dwdzds+F(t,x,y,\varepsilon)+U(t,x,y,\varepsilon),\ (t,x,y)\in G, \quad (6)$$

где $H(t,x,y,s,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}X(t,x,y,s,\varepsilon)[K(t,x,y,s)-K(s,x,y,s)]-$

$$-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_s^t X(t,x,y,\tau,\varepsilon)K(\tau,x,y,\tau)[K(t,x,y,s)-K(\tau,x,y,s)]d\tau,\ (t,x,y)\in G \quad (7)$$

$$N_1(t,x,y,s,z,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}X(t,x,y,s,\varepsilon)N(t,x,y,s,z)-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_s^t X(t,x,y,\tau,\varepsilon)\times$$

$$\times K(\tau,x,y,\tau)[N(t,x,y,s,z)-N(\tau,x,y,s,z)]d\tau,\ (t,x,y)\in G, \quad (8)$$

$$M_1(t,x,y,s,z,w,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}X(t,x,y,s,\varepsilon)M(t,x,y,s,z,w)-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_s^t X(t,x,y,\tau,\varepsilon)\times$$

$$\times K(\tau,x,y,\tau)[M(t,x,y,s,z,w)-N(\tau,x,y,s,z,w)]d\tau,\ (t,x,y)\in G, \quad (9)$$

$$F(t,x,y,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}[f(t,x,y)-f_\delta(t,x,y)]-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t X(t,x,y,s,\varepsilon)K(s,x,y,s)\times$$

$$\times[f(s,x,y)-f_\delta(s,x,y)]ds,\ (t,x,y)\in G, \quad (10)$$

$$U(t,x,y,\varepsilon)=u(0,x,y)-u_\delta(0,x,y)-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t X(t,x,y,s,\varepsilon)K(s,x,y,s)\times$$

$$\times[u(0,x,y)-u_\delta(0,x,y)]ds,\ (t,x,y)\in G. \quad (11)$$

В дальнейшем используем следующие оценки.

Как показано в леммах 3.1.1 из [5], в силу условий *а*)-*д*) для функций $H(t,x,y,\varepsilon)$, $N_1(t,x,y,s,\varepsilon)$ и $M_1(t,x,y,s,z,w,\varepsilon)$ соответственно справедливы

$$\|H(t,x,y,s,\varepsilon)\|\le C_3,\ (t,x,y,s)\in G_1,\ \varepsilon>0, \quad (12)$$

$$\|N_1(t,x,y,s,z,\varepsilon)\|\le C_4,\ (t,x,y,s,z)\in G_2,\ \varepsilon>0, \quad (13)$$

$$\|M_1(t,x,y,s,z,w,\varepsilon)\|\le C_5,\ (t,x,y,s,z,w)\in G_3,\ \varepsilon>0, \quad (14)$$

где $C_3 = C\sqrt{n}(e^{-1} + N_0)$, $C_4 = C_1\sqrt{n}(e^{-1} + N_0)$, $C_5 = C_2\sqrt{n}(e^{-1} + N_0)$, $N_0 > 0$
$G_1=\{(t,x,y,s)$: $0\le s\le t\le T$, $0\le x\le X$, $0\le y\le Y\}$, $G_2=\{(t,x,y,s,z)$: $0\le s\le t\le T$, $0\le z\le x\le X$, $0\le y\le Y\}$,
$G_3=\{(t,x,y,s,z,w)$: $0\le s\le t\le T$, $0\le z\le x\le X$, $0\le w\le y\le Y\}$.
Перейдем к оценке $F(t,x,y,\varepsilon)$ и $U(t,x,y,\varepsilon)$.

Лемма 1. Пусть функция $F(t,x,y,\varepsilon)$ определена формулой (10) и выполняется условие *д*). Кроме того, $\lambda_0(t) > 0$ при почти всех $t \in [0,T]$. Тогда для $F(t,x,y,\varepsilon)$ справедлива оценка

$$\|F(t,x,y,\varepsilon\| \le \frac{\delta}{\varepsilon}(1+N_0\sqrt{n}),\ \varepsilon>0,\ (t,x,y)\in G. \tag{15}$$

Доказательство. Действительно, из (10) имеем

$$\|F(t,x,y,\varepsilon)\| \le \frac{\|f(t,x,y)-f_\delta(t,x,y)\|_C}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon^2}\left\|\int_0^t X(t,x,y,s,\varepsilon)K(s,x,y,s)\times\right.$$

$$\left.\times[f(s,x,y)-f_\delta(s,x,y)]\right\|ds \le \frac{\|f(t,x,y)-f_\delta(t,x,y)\|_C}{\varepsilon} + \frac{\|f(t,x,y)-f_\delta(t,x,y)\|_C}{\varepsilon}\times$$

$$\times\frac{N_0\sqrt{n}}{\varepsilon}\int_0^t \|X(t,x,y,s,\varepsilon)\|\|K(s,x,y,s)\|ds \le \frac{\|f(t,x,y)-f_\delta(t,x,y)\|_C}{\varepsilon}\times$$

$$\times[1+\frac{N_0\sqrt{n}}{\varepsilon}\int_0^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \lambda_0(\tau)d\tau}\lambda_0(s)ds] = \frac{\delta}{\varepsilon}(1+\sqrt{n}N_0)$$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть функция $U(t,x,y,\varepsilon)$ определена формулой (11), при этом вектор-функции $u(0,x,y)$ и $u_\delta(0,x,y)$ связаны между собой следующим образом
$\|u(0,x,y)-u_\delta(0,x,y)\| \le C^1\sqrt{\delta}$, $x\in[0,X], y\in[0,Y]$. Кроме того, $\lambda_0(t) > 0$ при всех $t\in[0,T]$. Тогда для $U(t,x,y,\varepsilon)$ справедлива оценка

$$\|U(t,x,y,\varepsilon)\| \le C^1\sqrt{\delta}(1+N_0\sqrt{n}),\ \varepsilon>0,\ (t,x,y)\in G, \tag{16}$$

где $0<C^1$– некоторая постоянная, не зависящая от ε и δ.

Доказательство. Аналогично доказательству предыдущей леммы 3.3.1. из [5], В силу оценок (12), (13), (14), (15) и (16), из (6) имеем

$$\|V(t,x,y,\varepsilon,\delta)\| \le a(t,x,y,\varepsilon,\delta) + \int_0^t C_3\|V(s,x,y,\varepsilon,\delta)\|ds, \tag{17}$$

где $V(t,x,y,\varepsilon,\delta) = u_\varepsilon(t,x,y) - u_{\varepsilon\delta}(t,x,y)$,

$$a(t,x,y,\varepsilon,\delta) = \sqrt{\delta}(1+N_0\sqrt{n})(\frac{\sqrt{\delta}}{\varepsilon}+C^1) + \int_0^t\int_0^x C_4\|V(s,z,y,\varepsilon,\delta)\|dzds +$$

$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^y C_5\|V(s,z,w,\varepsilon,\delta)\|dwdzds. \tag{18}$$

На основании леммы 2.1.5 [5] из (17) получим

$$\|V(s,z,w,\varepsilon,\delta)\| \le a(t,x,y,\varepsilon,\delta) + \int_0^t C_3 e^{C_3(t-s)}a(s,x,y,\varepsilon,\delta)ds\,.$$

Вместо $a(t,x,y,\varepsilon,\delta)$ положим выражение (18) и из последнего неравенства имеем

$$\|V(t,x,y,\varepsilon,\delta)\| \le \sqrt{\delta}(1+N_0\sqrt{n})(\frac{\sqrt{\delta}}{\varepsilon}+C^1)+\int_0^t\int_0^x C_4\|V(s,z,y,\varepsilon,\delta)\|dzds+$$
$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^y C_5\|V(s,z,w,\varepsilon,\delta)\|dwdzds+\int_0^t C_3e^{C_3(t-s)}\{\sqrt{\delta}(1+N_0\sqrt{n})(\frac{\sqrt{\delta}}{\varepsilon}+C^1)+$$
$$+\int_0^s\int_0^x C_4\|V(s_1,z,y,\varepsilon,\delta)\|dzds_1+\int_0^s\int_0^x\int_0^y C_5\|V(s_1,z,w,\varepsilon,\delta)\|dwdzds_1\}ds\ .$$

Последнее неравенство интегрируем и применим формулу Дирихле, затем заменив t на T пишем в виде

$$\|V(t,x,y,\varepsilon,\delta)\| \le \sqrt{\delta}(1+N_0\sqrt{n})(\frac{\sqrt{\delta}}{\varepsilon}+C^1)e^{C_3T}+\int_0^t\int_0^x C_4e^{C_3T}\|V(s,z,y,\varepsilon,\delta)\|dzds+$$
$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^y C_5e^{C_3(t-s)}\|V(s,z,w,\varepsilon,\delta)\|dwdzds\ . \tag{19}$$

К неравенству (19) применим лемму 2.1.6 [5], и затем применяя формулу Дирихле, имеем

$$\|V(t,x,y,\varepsilon,\delta)\| \le \sqrt{\delta}(1+N_0\sqrt{n})(\frac{\sqrt{\delta}}{\varepsilon}+C^1)e^{C_3T}[1+\int_0^t\int_0^x R(t,x,s,z)dzds]+$$
$$+\int_0^t\int_0^x\int_0^y [C_5e^{C_3T}+\int_0^s\int_0^z C_5e^{C_3T}R(t,x,s_1,z_1)dz_1ds_1]\|V(s,z,w,\varepsilon,\delta)\|dwdzds\ , \tag{20}$$

где $R(t,x,s,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(C_4e^{C_3T}\right)^{n+1}\frac{(t-s)^n(x-z)^n}{(n!)^2}$.

Из (20) получим следующее неравенство:

$$\|V(t,x,y,\varepsilon,\delta)\| \le C_6(\varepsilon,\delta)+\int_0^t\int_0^x\int_0^y C_7\|V(s,z,w,\varepsilon,\delta)\|dwdzds\ , \tag{21}$$

где $C_6(\varepsilon,\delta)=\sqrt{\delta}(1+N_0\sqrt{n})(\frac{\sqrt{\delta}}{\varepsilon}+C^1)e^{C_3T}[1+R(T,X,0,0)TX]$,
$C_7=C_5e^{C_3T}[1+R(T,X,0,0)TX]$.

К (21) применив лемму 2.1.7 [5], получим

$$\|V(t,x,y,\varepsilon,\delta)\| \le C_6(\varepsilon,\delta)+\int_0^t\int_0^x\int_0^y R_1(t,x,y,s,z,w)C_6(\varepsilon,\delta)dwdzds\ , \tag{22}$$

где $R_1(t,x,y,s,z,w)=\sum_{n=0}^{\infty}C_7^{n+1}\frac{(t-s)^n(x-z)^n(y-w)^n}{(n!)^3}$.

Таким образом, (22) получим следующую оценку:

$$\|V(t,x,y,\varepsilon,\delta)\|_C \le \sqrt{\delta}(1+N_0\sqrt{n})(\frac{\sqrt{\delta}}{\varepsilon}+C^1)C_8\ , \tag{23}$$

где $C_8=e^{C_3T}[1+R(T,X,0,0)TX][1+R_1(T,X,Y,0,0,0)TXY]$.

Теперь рассмотрим уравнение (2). Его решение будем искать в виде

$$u_\varepsilon(t,x,y)=u(t,x,y)+\xi_\varepsilon(t,x,y)\ ,\ (t,x,y)\in G, \tag{24}$$

где $u(t,x,y)$ – решение системы уравнения (1).

Подставляя (24) в (2), после элементарных преобразований имеем

$$\xi_\varepsilon(t,x,y)+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t K(s,x,y,s)\xi_\varepsilon(s,x,y)ds=-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t[K(t,x,y,s)-K(s,x,y,s)]\times$$

$$\times\xi_\varepsilon(s,x,y)ds-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\int_0^x N(t,x,y,s,z)\xi_\varepsilon(s,z,y)dzds-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\int_0^x\int_0^y M(t,x,y,s,z,w)\xi_\varepsilon(s,z,w)dwdzds-u(t,x,y)+u(0,x,y). \qquad (25)$$

Далее, в силу условия *а*), *б*), *в*), *г*), *д*) и теоремы 3.1.1из [5] и (25) имеем

$$\|\xi_\varepsilon(t,x,y)\|\le C_8C_0(\varepsilon),\ (t,x,y)\in G, \qquad (26)$$

где $C_0(\varepsilon)=2(2N_0+1)\sqrt{n}\|u(t,x,y)\|_C e^{-\frac{1}{\varepsilon^{1-\beta}}}+(N_0+1)\sqrt{n}\omega_{\bar u}(\varepsilon^\beta),\ 0<\beta<1,$

$C_8=e^{C_3T}[1+R(T,X,0,0)TX][1+R_1(T,X,Y,0,0,0)TXY]$,

$\omega_{\bar u}(\varepsilon^\beta)=\sup\limits_{\substack{|\upsilon-\upsilon_0|<\delta\\(x,y)\in[0,X]\times[0,Y]}}\|u(\varphi^{-1}(\upsilon),x,y)-u(\varphi^{-1}(\upsilon_0),x,y)\|$, $\varphi^{-1}(\upsilon)$ – обратная функция к функции $\upsilon=\phi(t)=\int_0^t\lambda_0(s)ds>0$.

Если ε выбираем в виде $\varepsilon=\sqrt{\delta}$, то в силу (26) и (23) имеет место

$$\|u(t,x,y)-u_{\varepsilon\delta}(t,x,y)\|_C\le\|u(t,x,y)-u_\varepsilon(t,x,y)\|_C+\|u_\varepsilon(t,x,y)-u_{\varepsilon\delta}(t,x,y)\|_C\le$$

$$\le 2(2N_0+1)\sqrt{n}C_8\|u(t,x,y)\|_C e^{-\frac{1}{\delta^{\frac{1}{2}(1-\beta)}}}+C_8(N_0+1)\sqrt{n}\omega_{\bar u}(\delta^{\frac{1}{2}\beta})+$$

$$+\sqrt{\delta}(1+N_0\sqrt{n})(1+C^1)C_8\ . \qquad (27)$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема. Пусть выполняются условия *а*)-*д*), система (1) имеет непрерывное решение $u(t,x,y)$ на $C_n(G)$. Тогда решение $u_{\varepsilon\delta}(t,x,y)$ уравнения (3) для $\varepsilon=\sqrt{\delta}$ сходится к непрерывному решению уравнения (1) в области G при $\delta\to0$ и справедлива оценка (27).

Литература

1. Арсенин, В.Я. О применении метода регуляризации к интегральным уравнениям первого рода типа свертки / В. Я. Арсенин, Т.Н.Савелова // Журнал вычслит. матем. и матем. физики. –1969. – Т.9, №6. – С.204-210.
2. Асанов, А. Об одном классе систем интегральных уравнений Вольтерра первого рода на полуоси / А. Асанов // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1985. –Вып.18. –С.17-20.
3. Асанов, А. Единственность решения интегрального уравнения Вольтерра первого рода с двумя независимыми переменными / А. Асанов, Т. О. Бекешов // Мат-лы. междунар. конф. «Актуальные проблемы матем. и матем. моделирования экологических систем», Алматы, окт. –Алматы, 1996. – С 47.
4. Иманалиев, М. И. Регуляризация, единственность и существование решения для интегральных уравнений Вольтерра первого рода / М.И. Иманалиев, А. Асанов // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1988. – Вып.21. – С.3-38.
5. Зулпукаров Ж. А. Регуляризация и единственность решений интегральных уравнений Вольтерра первого рода с тремя независимыми переменными: диссертация кандидата физико-математических наук / Жакшылык Алибаевич Зулпукаров –Ош 2015. – 106 с.