УДК 517.929
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_1(4)_15

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ РЕШЕНИЙ В ТЕОРИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Жээнтаева Жумагул Кенешовна, к.ф.-м.н., доцент
jjk_kuu@mail.ru
КУМУ имени Б. Сыдыкова,
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *В статье предложены следующие отношения эквивалентности в пространстве решений начальных задач для динамических систем. Отношение асимптотической эквивалентности: расстояние между двумя решениями стремится к нулю при увеличении времени, соответствующее фактор-пространство названо асимптотическим фактор-пространством; отношение асимптотической экспоненциальной эквивалентности: расстояние между двумя решениями убывает экспоненциально при увеличении времени, соответствующее фактор-пространство названо асимптотическим экспоненциальным фактор-пространством. Отношение хаусдорфовой асимптотической эквивалентности: неограниченное сближение решений с обратимым преобразованием аргумента с увеличением времени, соответствующее фактор-пространство названо хаусдорфовым асимптотическим фактор-пространством. Показано, что понятие хаусдорфова асимптотического фактор-пространства создает новые математические объекты.*

Ключевые слова: *отношение эквивалентности, фактор-пространство, асимптотическая эквивалентность, дифференциальное уравнение, начальная задача*.

ДИНАМИКАЛЫК СИСТЕМАЛАРДЫН ТЕОРИЯСЫНДА ЧЫГАРЫЛЫШТАРДЫН АСИМПТОТИКАЛЫК ЭКВИВАЛЕНТТИГИ

Жээнтаева Жумагул Кенешовна, ф.-м.и.к., доцент
jjk_kuu@mail.ru
Б. Сыдыков атындагы КӨЭАУ,
Ош, Кыргызстан

Аннотация. *Макалада динамикалык системалар үчүн баштапкы маселелердин чыгарылыштарынын мейкиндигинде эквиваленттүүлүктүн төмөнкүдөй катыштары сунушталды. Асимптотикалык эквиваленттик катышы: убакыт өскөндө эки чыгарылыштын арасындагы аралык нөлгө умтулат, дал келген фактор-мейкиндик асимптотикалык фактор-мейкиндик деп аталды. Асимптотикалык экспоненциалдык эквиваленттик катышы: убакыт өскөндө эки чыгарылыштын арасындагы аралык нөлгө экспоненциалдуу түрдө умтулат, дал келген фактор-мейкиндик асимптотикалык экспоненциалдык фактор-мейкиндик деп аталды. Хаусдорфтук асимптотикалык эквиваленттүүлүк катышы: убакыттын өсүшү менен чечимдердин чексиз жакындашуусунда аргументтин кайра өз калыбына өзгөрүүсүнө дал келген фактор-мейкиндик хаусдорфтук асимптотикалык фактор-мейкиндик деп аталды. Хаусдорфтук асимптотикалык фактор-мейкиндик түшүнүгү жаңы математикалык объекттерди жаратаары көрсөтүлдү.*

Ачкыч сөздөр: *эквиваленттүүлүктүн катышы, фактор-мейкиндик, асимптотикалык эквиваленттүүлүк, дифференциалдык теңдеме, баштапкы маселе.*

ASYMPTOTICAL EQUIVALENCE OF SOLUTIONS IN THE THEORY OF DYMAMICAL SYSTEMS

Zheentaeva Zhumagul Keneshovna, Cand. Sci.,
jjk_kuu@mail.ru
KUIU named after B. Sydykov,

Osh, Kyrgyzstan

Abstract: *In the paper, the following equivalence relations in spaces of solutions of initial value problems for dynamical systems are proposed. The asymptotical equivalence relation: distance between two solutions tends to zero while time increases, the corresponding quotient space was called "asymptotical quotient space". The asymptotical exponential equivalence relation: distance between two solutions decreases exponentially while time increases, the corresponding quotient space was called "asymptotical exponential quotient space". The Hausdorff asymptotical equivalence relation: distance between two solutions with invertible transformation of argument tends to zero while time increases; the corresponding quotient space is called "Hausdorff asymptotical quotient space". It is demonstrated that the notion of the Hausdorff asymptotical quotient spaces generate new mathematical objects.*

Keywords: *equivalence relation, quotient space, asymptotical equivalence, differential equation, initial value problem.*

1. Введение

Цель данной статьи -показать, что понятия эквивалентности и фактор-пространства могут быть использованы для получения новых результатов и представления в более общей форме известных результатов в различных разделах теории динамических систем.

Во втором разделе рассматриваются следующие отношения эквивалентности в пространстве решений начальных задач для динамических систем: отношение асимптотической эквивалентности: расстояние между двумя решениями стремится к нулю при увеличении времени; отношение асимптотической экспоненциальной эквивалентности: расстояние между двумя решениями убывает экспоненциально при увеличении времени; отношение хаусдорфовой асимптотической эквивалентности: неограниченное сближение решений с обратимым преобразованием аргумента с увеличением времени.

В третьем разделе – обзор по дифференциальным уравнениям с запаздыванием.

В четвертом разделе – построение новых математических объектов.

2. Определения и обозначения

Обозначим $\boldsymbol{N}_0 = \{0,1,2,3,\ldots\}$, $\boldsymbol{N} = \{1,2,3,\ldots\}$, $\boldsymbol{R} =(-\infty,\infty)$, $\boldsymbol{R}_+ =[0,\infty)$, $\boldsymbol{R}_{++} =(0,\infty)$, E_n - $n\times n$-единичная матрица, $n\in \boldsymbol{N}$; $C^{m(k)}D$ -пространство функций $u: D\to \boldsymbol{R}^m$, непрерывных вместе с производными до k порядка, D -область в $\boldsymbol{R}$, $0\in D$, $m\in \boldsymbol{N}$, $k\in \boldsymbol{N}_0$; $C^{*m(k)}D$ - подпространство функций, удовлетворяющих условию $u(0)=0\in \boldsymbol{R}^m$. Значения $m=1$ и $k=0$ будем опускать.

Пусть аргумент искомых функций t принадлежит вполне упорядоченному множеству Λ, имеющему наименьший элемент 0, но не имеющему наибольшего элемента. Обычно используется $\Lambda=\boldsymbol{R}_+$ или $\Lambda=\boldsymbol{N}_0$.

В данной статье мы рассматриваем только начальные задачи. Если предположить, что начальная задача всегда имеет решение, оно является единственным и глобальным, то есть продолжается на все множество Λ, то пространство решений некоторой динамической системы с начальным условием φ можно представить в виде оператора $W(t,\varphi):\Lambda\times\Phi\to Z$, Φ -топологическое пространство начальных условий, Z -топологическое пространство значений решений. В случае $\Lambda=\boldsymbol{R}_+$ будем предполагать, что $W(t,\varphi)$ непрерывен по t.

Будем рассматривать следующие виды пространств Φ и Z: линейные одномерные ($\boldsymbol{R}$); -линейные многомерные ($\boldsymbol{R}^d$); линейные нормированные; равномерные.

О п р е д е л е н и е 1. Следующее отношение эквивалентности в пространстве Φ названо отношением асимптотической эквивалентности: если Z -линейное нормированное пространство, то

$$(\varphi_1 \sim \varphi_2) \Leftrightarrow (\lim\{ \|W(t,\varphi_1)-W(t,\varphi_2)\|_Z: t\to\infty\}= 0). \tag{1}$$

Если Z -метрическое пространство, то

$$(\varphi_1 \sim \varphi_2) \Leftrightarrow (\lim\{\rho_Z(W(t,\varphi_1), W(t,\varphi_2)): t\to\infty\}= 0). \quad (2)$$

Если Z -равномерное пространство с множеством Γ_Z окружений диагонали, то

$$(\varphi_1 \sim \varphi_2) \Leftrightarrow (\forall V\in\Gamma_Z)(\exists\, t_1 \in\Lambda)\ (\forall t > t_1)((W(t,\varphi_1), W(t,\varphi_2)) \in V). \quad (3)$$

Соответствующее фактор-пространство называется асимптотическим фактор-пространством. Явление «размерность асимптотического фактор-пространства меньше, чем размерность исходного пространства» называется «асимптотическое уменьшение размерности пространства решений».

О п р е д е л е н и е 3. Следующее отношение эквивалентности в пространстве Φ будем называть отношением λ-экспоненциальной асимптотической эквивалентности $(\lambda\in\boldsymbol{R}_{++})$:

Если Z -линейное нормированное пространство, то

$$(\varphi_1 \sim_\lambda \varphi_2) \Leftrightarrow (\sup\{\ ||W(t,\varphi_1)- W(t,\varphi_2)||_Z \exp(\lambda t):\ t\in\Lambda\}< \infty). \quad (4)$$

Если Z -метрическое пространство, то

$$(\varphi_1 \sim_\lambda \varphi_2) \Leftrightarrow (\sup\{\ \rho_Z(W(t,\varphi_1), W(t,\varphi_2)) \exp(\lambda t):\ t\in\Lambda\}< \infty). \quad (5)$$

Соответствующее фактор-пространство названо асимптотическим λ-экспоненциальным фактор-пространством.

О п р е д е л е н и е 4. При $\Lambda=\boldsymbol{R}_+$ следующее отношение эквивалентности в пространстве Φ будем называть отношением хаусдорфовой асимптотической эквивалентности:

Если Z -метрическое пространство, то $(\varphi_1 \cong \varphi_2)$ определяется следующим образом: для любого $\varepsilon\in \boldsymbol{R}_{++}$ можно найти такое $s \in \boldsymbol{R}_+$ и такую строго возрастающую до бесконечности непрерывную функцию $\vartheta:[s,\infty)\to \boldsymbol{R}_+$, что $(\forall t\in[s,\infty))(\rho_Z(W(t,\varphi_1), W(\vartheta(t),\varphi_2))<\varepsilon)$.

Если Z -равномерное пространство с множеством Γ_Z окружений диагонали, то $(\varphi_1 \cong \varphi_2)$ определяется следующим образом: для любого $\varepsilon\in \Gamma_Z$ можно найти такое $s \in \boldsymbol{R}_+$ и такую строго возрастающую до бесконечности непрерывную функцию $\vartheta(t):[s,\infty)\to \boldsymbol{R}_+$, что

$$(\forall t\in[s,\infty))(\ (W(t,\varphi_1), W(\vartheta(t),\varphi_2)) \in\varepsilon). \quad (6)$$

Хаусдорфово асимптотическое фактор-пространство будем обозначать $\Phi^{*=}$.

3. Обзор результатов по асимптотике решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

Для случая, когда $\Lambda=\boldsymbol{R}_+$, $W(t,\varphi(\cdot))$ – решение начальной задачи с начальным условием $\varphi\in\Phi:=C[-h,0]$ для линейного дифференциального уравнения с ограниченным запаздыванием аргумента, в ряде работ (см. обзор в [1], [2]) были найдены условия, когда существует такое конечномерное подпространство $\Phi_0 \subset\Phi$, что

$$(\forall\varphi\in\Phi)(\exists\varphi_0\in\Phi_0)(\ \lim\ \{\ ||\ W(t,\varphi) - W(t,\varphi_0)||\ t\to \infty\}\ )=0, \quad (8)$$

то есть пространство решений «асимптотически конечномерно». Решения $W(t,\varphi_0)$ $(\varphi_0\in\Phi_0)$ были названы специальными.

В связи с этими результатами мы выдвинули гипотезу [3] о том, что аналогичные результаты должны иметь место для более фундаментального типа динамических систем – разностных уравнений, и что такие результаты могут улучшить известные результаты для уравнений с запаздыванием.

Пусть Ω -некоторое нормированное пространство. Рассмотрены четыре последовательности операторов (первая – числа, вторая – «функционалы»): a_n: $\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$; b_n:Ω

$\to \boldsymbol{R}$; c_n: $R \to \Omega$; d_n:$\Omega \to \Omega$, $n=0,1,2,\ldots$ с ограничениями $a_n \in A=[a_-,a_+]$; $||b_n|| \le b>0$, $||c_n|| \le c>0$, $||d_n|| \le d>0$, и система разностных уравнений в $R \times \boldsymbol{\Omega}$

$$x_{n+1}= a_n x_n + b_n y_n,$$
$$y_{n+1}= c_n x_n + d_n y_n, n=0,1,2,\ldots \quad (8)$$

Были доказаны

Т е о р е м а 1. Если существует такое $\nu>0$, что
1) $q_- := a_- - \nu b>0$; 2) $c+\nu d \le \nu q_-$, то существует такое решение $\{X, Y\}$, что

$$(\forall n \in N)(X_n \ge q_-^{\,n}; \ ||Y_n|| \le \nu X_n). \quad (9)$$

Такие решения также названы специальными.

Т е о р е м а 2. Если 1) $d<a_-$; 2) $(a_- - d)^2 >4bc$, то выполняются условия 1), 2) Теоремы 1.

Т е о р е м а 3. Если $\omega:=(a_+ \ d + bc) \ q_-^{-2} <1$, то для любого решения $\{x, y\}$ и специального «аппроксимирующиего» решения $\{X, Y\}$, определенного в Теореме 1, существует предел $\gamma\{x, y\}:=\lim \{ x_n/X_n: n\to\infty\}$.

Такие специальные решения названы.

Т е о р е м а 4. Если выполняются условия Теорем 2 и 3 и $\omega(a_+ +b\nu)<1$, то для любого решения $\{x, y\}$ и специального «асимптотически аппроксимирующего» решения $\{X, Y\}$, определенного в Теореме 1,

$$\lim\{ |x_n-\gamma\{x, y\}X_n|: n\to\infty\}= 0.$$

Данные результаты были применены к дифференциальным уравнениям с запаздыванием:

$$z'(t)=P(t)z(t-h), \ t \in R_+, \ h=const >0, \ P(t) \in [p_-,p_+]. \quad (10)$$

Результаты, обзор которых произведен в [1]-[2], применительно к (14) дают оценку для наличия асимптотически аппроксимирующих специальных решений: $\sup\{|P(t)h|: t \in R_+\}< 1/e = 0.367\ldots$

Представлением пространства $C[-h,0]$ в виде декартова произведения пространства функций-констант и пространства Ω функций, таких, что $Z(0)=0$,

и расчетами на компьютере получены следующие условия наличия асимптотически аппроксимирующего свойства для уравнения (14):

$-0.12\le P(t)h \le 0.39$; $-0.10 \le P(t)h \le 0.40$; $-0.08 \le P(t)h \le 0.41$;
$-0.06\le P(t)h \le 0.42$; $-0.04 \le P(t)h \le 0.43$; $-0.02 \le P(t)h \le 0.44$.

Эти полученные результаты дополняют результаты, упомянутые в [1], [2]. Уже после наших публикаций были опубликованы статьи [4], [5], [6], где получены аналогичные результаты для более узких классов дифференциальных уравнений с запаздыванием.

4. Построение объектов при помощи хаусдорфовой асимптотической эквивалентности

Хаусдорфово асимптотическое фактор-пространство $\Phi^{*=}$ может содержать и ранее неизвестные математические объекты.

В одномерном случае, $\Lambda= \boldsymbol{R}_+$; $\Phi = Z= \boldsymbol{R}$. Фактор-пространство $\Phi^{*=}$ включает в себя: классы функций, имеющих конечный предел при $t\to\infty$ (эквивалентные константам); класс функций, возрастающих при $t>t_0$ для некоторого t_0 и неограниченных сверху; класс функций, убывающих при $t>t_0$ для некоторого t_0 и неограниченных снизу; классы функций, эквивалентных периодическим и изменяющимся в диапазонах вида $[a,b]\subset \boldsymbol{R}$ при $t>t_0$ для некоторого t_0 функциям; различные классы функций, для которых различаются (конечные или бесконечные) значения $\lim\sup\{u(t): t\to\infty\}$ и $\lim\inf\{u(t): t\to\infty\}$ и т.д.

Пусть Φ = Z=$\boldsymbol{R}^3$. Странный аттрактор, притягивающее множество которого состоит из двух касающихся циклов.

Здесь $\Phi^{*=}$ состоит из трех элементов: класс эквивалентности, представляемый чередованием обхода циклов; класс эквивалентности, представляемый приближением к первому циклу; класс эквивалентности, представляемый приближением ко второму циклу.

5. Заключение

В настоящей статье показано, что новые понятия могут возникать в различных разделах теории динамических систем.

Литература

1. Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. – Москва: Наука, 1972. – 351 с.
2. Панков П.С. Асимптотическая конечномерность пространства решений одного класса систем с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. – 1977. – том 13, № 4. – С. 455-462.
3. Жээнтаева Ж.К. Асимптотика решений систем линейных операторно-разностных уравнений с переменными коэффициентами // Вестник Кыргызско-Российского Славянского университета. Серия естественные и технические науки. – 2016, № 5. – С. 34-37.
4. Mallet-Paret J., Nussbaum R. D. Asymptotic homogenization for delay-differential equations and a question of analyticity // Discrete and Continuous Dynamical Systems. – 2020, vol. 40, issue 6. – P. 3789-3812.
5. Feher A., Marton L., Pituk M. Approximation of a Linear Autonomous Differential Equation with Small Delay // Symmetry-Basel, 2019, vol. 11, issue 10. – 10 p.
6. Ye Yu., Liang H. Asymptotic dichotomy in a class of higher order nonlinear delay differential equations // Journal of Inequalities and Applications. – 2019, vol. 2. – 17 p.