УДК 517.5
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_1(4)_14

О НЕКОТОРОЙ ТЕОРЕМЕ ТИПА ФРАГМЕНА-ЛИНДЕЛЁФА

Жураева Умидахон Юнусалиевна, докторант,
umida_9202@mail.ru
Самаркандский государственный университет,
Самарканд, Узбекистан.

Аннотация: *Работа посвящена теореме типа Фрагмена–Линделефа для бигармонических функций, которая получена с помощью формул Карлемановского типа. Доказывается интегральное представление для бигармонических функций. При помощи этого интегрального представления получается некоторые свойства (оценка роста, формула Карлемана) бигармонических функций определенного класса в* R^3.

Ключевые слова: *теорема типа Фрагмена–Линделёфа, бигармоническая функция, функция Карлемана, интегральное представление.*

ABOUT SOME THEOREM OF THE PHRAGMEN-LINDELOF TYPE

Jurayeva Umidahon.Yunusalievna. PhD student,
e-mail: umida_9202@mail.ru
Samarkand State University named after Sharof Rashidov,
Samarkand, Uzbekistan.

Abstract: *Theorems of the Phragmen–Lindelof type for biharmonic functions, which is obtained using Carleman type formulas, is considered. The integral representation for biharmonic functions is proved. With the help of this integral representation, some properties (growth estimation, Carleman formula) of biharmonic functions of a certain class in* R^3 *are obtained.*

Keywords: *Phragmen–Lindelof type theorem, biharmonic function, Carleman's function, integral representation*

Теоремы типа Фрагмена-Линделёфа появились в литературе со времен знаменитой статьи Эдварда Фрагмена и Эрнста Линделофа 1908 года [1]. Теорема Фрагмена-Линделофа “на бесконечности” устанавливает существование асимптотических пределов функции на бесконечности и дает представление о природе этих пределов, когда функция лежит в соответствующем классе решений.

Теоремы типа Фрагмена-Линделёфа часто изучался в течение последнего столетия. Например Альфорс [2] расширил результаты из [1] к верхнему полупространству R^n, Гильбарг [3] и Серрин [4] рассмотрели более общие эллиптические уравнения второго порядка, а Витоло рассмотрел задачу в угловых секторах. Курта [5] и Джин-Ланкастер [6,7,8] рассматривали квазилинейные эллиптические уравнения и негиперболические уравнения, в то время как Капуццо-Витоло [9] и Армстронг-Сираков-Смарт [10] рассматривал полностью нелинейные уравнения. Адамович [11] изучал различные неограниченные области для подрешений уравнения p-Лапласа с переменным показателем, в то время как Бхаттачарья [12] и Гранлунд-Марола [13] рассматривали бесконечно-гармонические функции в неограниченных областях. Аналогичные теоремы рассматривались в работах [14,15]. Эта задача встречается для гармонических функциях в работах Евграфова и И.А. Чегиса [16], А.Ф. Леонтьева [17]. И.С. Аршоном[18], Ш. Ярмухамедова [19] и З.Р.Ашуровой [20] - [23]. В статьях [24]-[25] получены подобные результаты для бигармоничеких функций.

В этой работе мы изучаем некоторые новые результаты: теорему типа Фрагмена-Линделофа для бигармонических функций заданных в R^3. Основной результат, приведенный в этой заметке, изложен в теореме 2.

Пусть R^3 - трехмерное вещественное евклидово пространство
$x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3), x' = (x_1, x_2, 0), y' = (y_1, y_2, 0), r = |x - y|$,
$\alpha = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}, \alpha^2 = s, D = \left\{y : y = (y_1, y_2, y_3), 0 < y_3 < \frac{\pi}{\rho}, \rho > 0\right\}$.

Пусть бесконечная область D двухмерного пространство и бигармоническая в D функция $u(P)$, непрерывная вплоть до границы со своими частными производными до третьего порядка включительно. Требуется показать, что если функция $u(P)$, ее нормальная производная, лапласиан функции и нормальная производная этого лапласиана ограничены на границе D и $u(P)$ неограниченна внутри, то при $P \to \infty$ она должна расти внутри D со скоростью, не меньшей некоторой предельной, и оценить эту предельную скорость роста.

Определяя функции $\varphi_\sigma(y, x)$ и $\Phi_\sigma(y, x)$, $\alpha > 0$ следующими равенствами

$$\varphi_\sigma(y, x) = \frac{3\exp(achi\rho_1(x_3 - h/2)}{2\rho\exp(\sigma x_3)} \int_0^\infty \mathrm{Im} \frac{\exp(\sigma\omega - achi\rho_1(\omega - h/2)}{(\omega - x_3 + 3h)(\omega - x_3)} \frac{dt}{\sqrt{t^2 + \alpha^2}}, \tag{1}$$

$$\Phi_\sigma(y, x) = c_0 r^2 \varphi_\sigma(y, x) \tag{2}$$

где $\omega = y_3 + i\eta$, $\eta^2 = t^2 + \alpha^2$, ρ, ρ_1 −положительные числа, (в дальнейшем обозначим с помощью c_0 все постоянные числа, которым мы будем часто пользоваться в дальнейшем).

Теорема 1. Для функция $\Phi_\sigma(y, x)$ определенная формулой (2), справедлива равенство $\Phi_\sigma(y, x) = C_1(r + r^2 G_\sigma(y, x))$, $(C_1 \in R)$, где $G_\sigma(y, x)$ гармоническая функция по переменной включая $y = x$ и при $y \neq x$, $\Phi_\sigma(y, x)$ является функцией Карлемана для области D.

Теорема 2. Пусть $u(y)$ - бигармоническая функция определенная в D, имеющая непрерывные частные производные до третьего порядка вплоть до конечных точек границы ∂D и

$$\sum_{\kappa=0}^{1} \left(\left|\Delta^k u(y)\right| + \left|\frac{\partial \Delta^{1-k} u(y)}{\partial n}\right| \right) \le c_0 exp\, exp\, \rho_2 |y|, \qquad \forall y \in D, \ \rho_2 < \rho_1 < \rho,$$

$$\forall y \in \partial D, \ u(y) = 0, \ \int_{\partial D} \left(\sum_{k=0}^{1} \left(\left|\Delta^k u(y)\right| + \left|\mathrm{grad}\Delta^{1-k} u(y)\right| \right) \right) |ds| \le c_0.$$

Тогда в любой точке $y \in D$ выполняется $u(y) = 0$.

Теорема точно, так как можно построить пример бигармонической функции, которой устанавливает его точность.

Рассмотрим функцию $u(y)$, в области $D \subset R^3$, где D-неограниченная область, $D = \{y = (y_1, y_2, y_3) : y_1, y_2, y_3 \in R, \ 0 < y_3 < \frac{\pi}{\rho}, \ \rho > 0\}$ с границей ∂D

$$u(y_1, y_2, y_3) = \mathrm{Re}\exp\left(e^{\frac{2\pi\left(y_2 + i\left(y_3 + \frac{b}{2}\right)\right)}{b}} - \frac{\pi\left(y_2 + i\left(y_3 + \frac{b}{2}\right)\right)}{b} \right), \ b = \frac{\pi}{\rho}.$$

Введем следующее обозначения:

$$\mathrm{v}(y_1,y_2,y_3) = e^{e^{\frac{2\pi y_2}{b}}\left(\cos\frac{2\pi\left(y_3+\frac{b}{2}\right)}{b}+i\sin\frac{2\pi\left(y_3+\frac{b}{2}\right)}{b}\right)-\frac{\pi y_2}{b}-i\frac{\pi y_3}{b}},$$

$$A=e^{\frac{2\pi y_2}{b}}\sin\frac{2\pi\left(y_3+\frac{b}{2}\right)}{b}-\frac{\pi\left(y_3+\frac{b}{2}\right)}{b},\quad B=e^{\frac{2\pi y_2}{b}}\cos\frac{2\pi\left(y_3+\frac{b}{2}\right)}{b}-\frac{\pi y_2}{b}.$$

Далее функцию $\mathrm{v}(y_1,y_2,y_3)$ перепишем в виде

$$\mathrm{v}(y_1,y_2,y_3)=e^{e^{\frac{2\pi y_2}{b}}\cos\frac{2\pi\left(y_3+\frac{b}{2}\right)}{b}-\frac{\pi y_2}{b}}\cos\left(e^{\frac{2\pi y_2}{b}}\sin\frac{2\pi\left(y_3+\frac{b}{2}\right)}{b}-\frac{\pi\left(y_3+\frac{b}{2}\right)}{b}\right)+$$

$$ie^{e^{\frac{2\pi y_2}{b}}\cos\frac{\pi\left(y_3+\frac{b}{2}\right)}{b}-\frac{\pi y_2}{b}}\sin\left(e^{\frac{2\pi y_2}{b}}\sin\frac{2\pi\left(y_3+\frac{b}{2}\right)}{b}-\frac{\pi\left(y_3+\frac{b}{2}\right)}{b}\right)=e^{B}\cos A+i\,e^{B}\sin A.$$

Тогда $u(y_1,y_2,y_3) = e^{B}\cos A$. Имея в виду равенства

$$\cos\left(e^{\frac{2\pi y_2}{b}}\sin\frac{2\pi\frac{b}{2}}{b}-\frac{\pi\frac{b}{2}}{b}\right)=\cos\left(e^{\frac{2\pi y_2}{b}}\sin\pi-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0,$$

$$\cos\left(e^{\frac{2\pi y_2}{b}}\sin\frac{-2\pi\frac{b}{2}}{b}+\frac{\pi\frac{b}{2}}{b}\right)=\cos\left(-e^{\frac{2\pi y_2}{b}}\sin\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

получим $u(y_1,y_2,0) = 0$, $u\left(y_1,y_2,\frac{\pi}{\rho}\right)=0$. Вычислим частные производные первого и второго порядка функций A и B:

$$A'_{y_2}=\frac{2\pi}{b}e^{\frac{2\pi y_2}{b}}\sin\frac{2\pi\left(y_3+\frac{b}{2}\right)}{b},\quad A''_{y_2y_2}=\left(\frac{2\pi}{b}\right)^2e^{\frac{2\pi y_2}{b}}\sin\frac{2\pi\left(y_3+\frac{b}{2}\right)}{b},$$

$$A'_{y_3}=\frac{2\pi}{b}e^{\frac{2\pi t}{b}}\cos\frac{2\pi\left(y_3+\frac{b}{2}\right)}{b}-\frac{\pi}{b},\quad A''_{y_3y_3}=-\left(\frac{2\pi}{b}\right)^2e^{\frac{2\pi y_2}{b}}\sin\frac{2\pi\left(y_3+\frac{b}{2}\right)}{b},$$

$$B'_{y_2}=\frac{2\pi}{b}\cos\frac{2\pi y_3}{b}e^{\frac{2\pi y_2}{b}}-\frac{\pi}{b},\quad B''_{y_2y_2}=\left(\frac{2\pi}{b}\right)^2e^{\frac{2\pi y_2}{b}}\cos\frac{2\pi\left(y_3+\frac{b}{2}\right)}{b};$$

$$B'_{y_3}=-\frac{2\pi}{b}e^{\frac{2\pi y_2}{b}}\sin\frac{2\pi\left(y_3+\frac{b}{2}\right)}{b},\quad B''_{y_3y_3}=-\left(\frac{2\pi}{b}\right)^2e^{\frac{2\pi y_2}{b}}\cos\frac{2\pi\left(y_3+\frac{b}{2}\right)}{b}.$$

Складывая полученные равенства, выводим

$$A''_{y_1y_1}+A''_{y_2y_2}+A''_{y_3y_3}=0, \tag{3}$$

$$B''_{y_1y_1}+B''_{y_2y_2}+B''_{y_3y_3}=0, \tag{4}$$

и кроме того

$$\left(B'_{y_2}\right)^2+\left(B'_{y_3}\right)^2-\left(A'_{y_2}\right)^2-\left(A'_{y_3}\right)^2=0, \tag{5}$$

$$2A'_{y_2}B'_{y_2}+2A'_{y_3}B'_{y_3}=0. \tag{6}$$

Далее вычислим частные производные функции $u(y)$:

$u'_{y_1}=0$, $u'_{y_2}=B'_{y_2}e^{B}\sin A+A'_{y_2}e^{B}\cos A$, $u'_{y_3}=B'_{y_3}e^{B}\sin A+A'_{y_3}e^{B}\cos A$.

А также находим частные производные второго порядка:

$u''_{y_2y_2}=e^{B}\left(B''_{y_2y_2}\sin A+A'_{y_2}B'_{y_2}\cos A\right)+B'_{y_2}B'_{y_2}e^{B}\sin A+e^{B}\left(A''_{y_2y_2}\cos A-A'_{y_2}A'_{y_2}\sin A\right)+B'_{y_2}A'_{y_2}e^{B}\cos A$,

$u''_{y_3y_3}=e^{B}\left(B''_{y_3y_3}\sin A+A'_{y}B'_{y}\cos A\right)+B'_{y_3}B'_{y_3}e^{B}\sin A+e^{B}\left(A''_{y_3y_3}\cos A-A'_{y_3}A'_{y_3}\sin A\right)+B'_{y_3}A'_{y_3}e^{B}\cos A$.

Складывая полученные равенства, выводим

$\Delta u = u''_{y_1} + u''_{y_2y_2} + u''_{y_3y_3} = e^B \sin A \left(B''_{y_2y_2} + B''_{y_3y_3}\right) + e^B \cos A$
$(A'_{y_2}B'_{y_2} + A'_{y_3}B'_{y_3})$+ $e^B \sin A$ $(B'_{y_2}B'_{y_2} + B'_{y_3}B'_{y_3} - A'_{y_2}A'_{y_2} - A'_{y_3}A'_{y_3})$+ $e^B \cos A \left(A''_{y_2y_2} + A''_{y_3y_3}\right)$.
На основании равенств (3)-(6) окончательно имеем: $\Delta u = 0$, поэтому $\Delta^2 u = 0$, т.е $u(y)$ бигармоническая функция.

Пример бигармонической функции $u = sin\rho y_2 sh\rho y_1$ показывает, что ограничение на рост нормальной производной, выражаемой интегральным неравенством, ослабить нельзя.

Литература

1. Phragmen E. Lindelof E. Sur une extension d'un principe classique de l'analyse et sur quelques propri'et'es des functions monogenes dans le voisinage d'un point singulier, Acta Math. 31. no 1. 1908.pp. 381-406.
2. Ahlfors L., On Phragmen-Lindelof's principle. Trans. Amer. Math. Soc. 41, 1937, pp. 1-8.
3. Gilbarg D. The Phragmen-Lindelof theorem for elliptic partial differential equations. J. Rational Mech. Anal. 1. 1952. pp. 411-417.
4. Serrin J. On the Phragmen-Lindelof principle for elliptic differential equations. J. Rational Mech. Anal. 3. 1954. pp. 395-413.
5. Kurta V. V. Phragmen-Lindelof theorems for second-order quasilinear elliptic equations. Ukrain. Mat. Zh. 44. 10. 1992. pp 1376-1381.
6. Jin Z., Lancaster K. Theorems of Phragmen-Lindelof type for quasilinear elliptic equations. J. Reine Angew. Math. 514.1999. pp. 165-197.
7. Jin Z., Lancaster K. Phragmen-Lindelof theorems and the asymptotic behavior of solutions of quasilinear elliptic equations in slabs. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics 130. 2. 2000. pp. 335-373.
8. Jin Z., Lancaster K. A Phragmen-Lindelof theorem and the behavior at infinity of solutions of non-hyperbolic equations. Pacific journal of mathematics 211. no 1. 2003. pp. 101-121.
9. Capuzzo D., Vitolo A. A qualitative Phragmen-Lindelof theorem for fully nonlinear elliptic equations. Differential Equations 243. no 2. 2007. pp. 578-592.
10. Armstrong S. N., Sirakov B., Smart C. K. Singular solutions of fully nonlinear elliptic equations and applications. Arch. Ration. Mech. Anal. 205. no 2. 2012. pp. 345-394.
11. Adamowicz T. Phragmen-Lindelof theorems for equations with nonstandard growth. Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications 97. 2014. pp. 169- 184.
12. Bhattacharya T. On the behaviour of infinity-harmonic functions on some special unbounded domains. Pacific Journal of Mathematics 219. no 2. 2005. pp. 237-253.
13. Granlund S., Marola N. Phragmen-Lindelof theorem for infinity harmonic functions. Commun. Pure Appl. Anal. 14 (2015), pp. 127-132
14. Almefleh H., Lancaster K. Pragmen-Lindelof theorems in cylinders. Royal Society of Edinburgh. Proceedings A. 135. 2005 .3. pp. 439 - 459.
15. Almefleh H., AlAhmad R. Pragmen-Lindelof type theorem at infinity. International Journal of Mathematics and Computer Science. 17. 2022.1. pp. 331-343.
16. Evgraphov M.A., Chegis I.A. Generalization of the Phragmen-Lindelof type theorem for analytic functions to harmonic functions in space. Reports of the Academy of Sciences of the USSR. 1960, Vol.134, pp. 252-262.
17. Leontiev A.F. On Phragmen-Lindelof type theorems for harmonic functions in a cylinder. Proceedings of the Academy of Sciences of of the USSR. 1960. Vol. 27. pp. 661-676.
18. Arshon I.S., Evgraphov M.A. An example of a harmonic function in the whole space, bounded outside a circular cylinder. Reports of the Academy of Sciences of the USSR. 1962 Vol. 143. pp. 231-234.
19. Yarmukhamedov Sh.Ya. The Cauchy problem for the polyharmonic equation.Reports of the Russian Academy of Sciences.2003. Vol.388. pp-162-165.
20. Ashurova Z.R., Juraeva N.Yu., Juraeva U.Yu. About some properties of the Yarmukhamedov kernel. International Journal of Innovative Research. 2021, Impact Factor 7.512. Vol. 10. pp. 84-90
21. Ashurova Z.R., Jurayeva N.YU., Jurayeva U.Yu. Growing Polyharmonic functions and Cauchy problem. Journal of Critical Reviews. India 2020. DOI 10.31938.jcr.07.06.62. Vol. 7. pp. 371-378.
22. Ashurova Z.R., Jurayeva N.YU., Jurayeva U.Yu. Task Cauchy and Carleman function. Academicia: An International Multidisciplinary Research Journal. Affiliated to Kurukshetra University, Kurukshetra. 2020. URL http://saarj.com Vol.10. pp. 371-378.
23. Ashurova Z.R., Jurayeva N.YU., Jurayeva U.Yu. The Carleman function and the Cauchy problem for polyharmonic functions. Lap LAMBERT Academic publishing Saabrucen.2013. 96 p.
24. Jurayeva U.Yu . The Phragmen-Lindelof type theorems. Uzbek Mathematical Journal 2022, Volume 66, Issue 3, pp.54-61. DOI: 10.29229/uzmj.2022-3-7.

25. Жураева У. Ю., Теоремы типа Фрагмена–Линделефа для бигармонических функций, Изв. вузов. Матем., 2022, номер 10, 42–65. DOI: https://doi.org/10.26907/0021-3446-2022-10-42-65