УДК 517.956.6
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_1(4)_13

ОБ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ С ПОЛУПЕРИОДИЧЕСКИМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ТРЁХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ТРИКОМИ В НЕОГРАНИЧЕННОМ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЕ

Джамалов Сироджиддин Зухриддинович, д.ф.-м.н., профессор
siroj63@mail.ru
Туракулов Хамидулло Шамсиддинович, PhD докторант
hamidtsh87@gmail.com
Институт математики имени В.И. Романовского при академии наук РУ
Мамбетсапаев Курбанияз Айниязович
mr.kurbaniyaz@gmail.com
Филиал Российского Государственного Университета нефти и газа имени И.М. Губкина в Ташкенте
Ташкент, Узбекистан

Аннотация: *В данной статье рассматриваются вопросы корректности одной линейной обратной задачи для трехмерного уравнения Трикоми в неограниченном паралилепипеде.*

Для доказательства единственности обобщённого решения используется метод интегралов энергии. Для доказательства существования обобщённого решения сначала используется преобразование Фурье и в результате получается новая задача на плоскости, а для разрешимости этой задачи используется методы "ε -регуляризации" и априорных оценок. Используя эти методы, и равенство Парсеваля, докажем единственность, существование и гладкость обобщённого решения одной нелокальной краевой задачи периодического типа для трехмерного уравнения смешанного типа первого рода второго порядка.

Ключевые слова: *обобщенная решение, модельное уравнения Трикоми, полупериодическая краевая задача, преобразование Фурье, методы “$\varepsilon -$ регуляризации”и априорных оценок.*

ON A LINEAR INVERSE PROBLEM WITH SEMI-PERIODIC BOUNDARY CONDITIONS FOR THE THREE-DIMENTIONAL TRICOMI EQUATION IN THE UNBOUNDED PARALLELEPIPED

Dzamalov Sirojiddin Zuhriddinovich, d.ph-m.s., professor
siroj63@mail.ru
Turakulov Hamidullo Shamsiddinovich, PhD. Stud.
hamidtsh87@gmail.com.
Institute of mathematics named after V.I.Romanovsky Academia of Science of the Republic of Uzbekistan
Mambetsapaev Kurbaniyaz Ayniyazovich
mr.kurbaniyaz@gmail.com
The Branch of the Russian State University of Oil and Gas named after I.M. Gubkin in Tashkent
Tashkent, Uzbekistan.

Abstract: *This article discusses the correctness of a linear inverse problem for the three-dimensional Tricomi equation in an unbounded parallelepiped.*

To prove the uniqueness of the generalized solution, the method of energy is used. To prove the existence of a generalized solution, the Fourier transform is first used, and as a result, a new problem in the plane is obtained, and for the solvability of this problem, the methods of “ε -regularization” and a priori estimates are used. Using *these methods and Parseval's equality, we prove the uniqueness, existence and smoothness of a generalized solution of a non-local boundary value problem of periodic type for a three-dimentional mixed-type equation of the first kind of the second order.*

Key words: *generalized solution, Tricomi model equation, semi-periodic boundary value problem, Fourier transform, methods of "ε -regularization" and a priori estimates.*

В процессе исследования нелокальных задач была выявлена тесная взаимосвязь задач с нелокальными краевыми условиями и обратными задачами. К настоящему времени достаточно хорошо изучены обратные задачи для классических уравнений таких как, параболических, эллиптических и гиперболических типов. [1,2]. Для уравнений смешанного типа, как первого, так и второго рода в ограниченных областях изучено в работах. [4].

В неограниченых областях прямые задачи с нелокалными краевыми условиями изучены в работах [1-3], а обратные задачи с нелокальными краевыми условиями изучены в работах [3,4]. Используя результаты этих работ, в данной работе, для исследования однозначное разрешимости обратных задач для трехмерного уравнения Трикоми в неограниченном паралилепипеде предлагается метод, который основан на сведение обратной задачи к прямым полупериодическим краевым задачам для семейство нагруженных интегро-дифференциальных уравнений Трикоми в ограниченной прямоугольной области.

В области

$$G=(-1,1)\times(0,T)\times R=Q\times R=\{(x,t,z);\, x\in(-1,1),\, 0<t<T<+\infty,\, z\in R.\}$$

рассмотрим трехмерное уравнение Трикоми:

$$Lu=xu_{tt}-\Delta u+a(x,t)u_t+b(x,t)u=\psi(x,t,z), \tag{1}$$

где $\Delta u=u_{xx}+u_{zz}$ - оператор Лапласа. Здесь $\psi(x,t,z)=g(x,t,z)+h(x,t)\cdot f(x,t,z)$, $g(x,t,z)$ и $f(x,t,z)$ -заданные функции, а функция $h(x,t)$ подлежит определению.

Линейная обратная задача. Найти функции $(u(x,t,z), h(x,t))$ удовлетворяющие уравнению (1) в области G, такие что, функция $u(x,t,z)$ удовлетворяет следующим полупериодическими краевым условиям

$$D_t^p u\big|_{t=0}=D_t^p u\big|_{t=T}, \tag{2}$$

$$u\big|_{x=-1}=u\big|_{x=1}=0 \tag{3}$$

при $p=0,1$, где $D_t^p u=\dfrac{\partial^p u}{\partial t^p}$, $D_t^0 u=u.$

Далее будем считать, что $u(x,t,z)$ и $u_z(x,t,z)\to 0$ при $|z|\to\infty$, $u(x,t,z)$ абсолютно интегрируема по z на R при любом (x,t) в $\overline{Q}$ (4)

с дополнительным условием

$$u(x,t,\ell_0)=\varphi_0(x,t), \quad \text{где } \ell_0\in R \tag{5}$$

и с функций $h(x,t)$ принадлежит классу

$$U=\left\{(u,h)\big|\, u\in W_2^{2,3}(G);\, h\in W_2^2(Q)\right\}$$

Здесь $W_2^{2,3}(G)$ Банахово пространство с нормой

$$\|u\|^2_{W_2^{2,3}(G)} = (2\pi)^{-1/2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (1+|\lambda|^2)^3 \cdot \|\hat{u}(x,t,\lambda)\|^2_{W_2^2(Q)}\, d\lambda,$$

где $W_2^2(Q)-$ пространство Соболева с нормой

$$\|\vartheta\|_2^2 = \|\vartheta\|^2_{W_2^l(Q)} = \sum_{|\alpha|\le 2} \int_Q |D^\alpha \vartheta|^2 dxdt.$$

Здесь $\alpha-$мультииндекс, D^α – обобщённая производная по переменным x и t,

$$\hat{u}(x,t,\lambda) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t,z)\, e^{-i\lambda z} dz$$

преобразование Фурье по переменной z, функции $u(x,t,z)$.

Определение 1. Обобщённым решением задачи (1)-(5) будем называть функцию $u(x,t,z)\in U$, удовлетворяющую уравнению (1) почти всюду с условиями (2)-(5).

Пусть все коэффициенты уравнения (1) достаточно гладкие функции в области G, и пусть выполнены следующие условия относительно коэффициентов, правой части и заданной функции $\varphi_0(x,t)$;

Условие 1:

периодичность: $a(x,0) = a(x,T);\ c(x,0) = c(x,T)$.

периодически условие: $g(x,0,z) = g(x,T,z),\ \ f(x,0,z) = f(x,T,z),$

гладкость: $f(x,t,l_0) = f_0(x,t) \in C^{0,1}_{x,t}(Q),\ |f_0(x,t)| \ge \eta > 0;\ f \in W_2^{3,3}(G),\ g \in W_2^{1,3}(G).$

Условие 2: $\varphi_0(x,t) \in W_2^3(Q);\ D_t^q \varphi_0\big|_{t=0} = D_t^q \varphi_0\big|_{t=T},\ q = 0,1,2;\ \varphi_0\big|_{x=-1} = \varphi_0\big|_{x=1} = 0$

Однозначное разрешимость задачи (1)-(5) докажем с помощью преобразованием Фурье, т.е для нахождение решение задачи (1)-(5), применяем преобразование Фурье по переменной z, для задачи (1)-(5).

Для того чтобы сформулировать основной результат, необходимо выполнить некоторые формальности построения.

Рассмотрим следы уравнения (1) при $z = \ell_0$:

$$Lu(x,t,\ell_0) = xu_{tt}(x,t,\ell_0) - u_{xx}(x,t,\ell_0) - u_{zz}(x,t,\ell_0) +$$
$$+a(x,t)u_t(x,t,\ell_0) + c(x,t)u(x,t,\ell_0) = \psi(x,t,\ell_0).$$

Теперь, учитывая условие (5) и то, что $f_0 \ne 0$, определим формально неизвестную функцию $h(x,t)$ в виде интеграла

$$h(x,t) = \frac{1}{f_0(x,t)}[\Phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 e^{i\lambda\ell_0} \hat{u}(x,t,\lambda) d\lambda]$$

где $\Phi_0 = L_0\varphi_0 - g_0;\ L_0\varphi_0 = x\varphi_{0tt} - \varphi_{0xx} + a(x,t)\varphi_{0t} + b(x,t)\varphi_0,$ а для определения функций $\hat{u}(x,t,\lambda),$ в области $Q = (-1,1)\times(0,T)$ получим нагруженных интегро-дифференциальных уравнений Трикоми:

$$
L\hat{u} = x\hat{u}_{tt} - \hat{u}_{xx} + a(x,t)\hat{u}_t + (b(x,t) + \lambda^2)\hat{u} = \hat{g}(x,t,\lambda) +
$$

$$
+\frac{\hat{f}(x,t,\lambda)}{f_0(x,t)}[\Phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 e^{i\xi\ell_0}\hat{u}(x,t,\xi)d\xi] \equiv \hat{F}(\hat{u}), \tag{6}
$$

с полупериодическими краевыми условиями:

$$
D_t^p \hat{u}\big|_{t=0} = D_t^p \hat{u}\big|_{t=T}; p = 0,1 \tag{7}
$$

$$
\hat{u}\big|_{x=-1} = \hat{u}\big|_{x=1} = 0 \tag{8}
$$

где, $\lambda \in R = (-\infty, \infty)$,

$$
\hat{f}(x,t,\lambda) = (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,t,z)e^{-i\lambda z}dz
$$

- преобразование Фурье по переменной z, функции $f(x,t,z)$.

Основными результатом является

Теорема 1 (Основной результат). Пусть выполнены вышеуказанные условия 1 и 2 для коэффициентов уравнение (1), кроме того пусть существует положительное число μ, т.ч, $2a(x,t) - \mu x \geq B_1 > 0,$ $b_t(x,t) + \mu b(x,t) \geq b_2 > 0,$ $a_t \leq 0,$ для всех $(x,t) \in \overline{Q},$ и пусть существует положительные числа $\sigma, c(\sigma^{-1}) -$(коэффициенты неравенство Коши) такие, что для $b_0 = \min\{B_1, \mu, b_2\}$ где $c(\sigma^{-1}) = 14\mu^2\sigma^{-1} > 0,$ имеют оценки $b_0 - c(\sigma^{-1}) = \delta > 0;$ $M\|f\|^2_{W_2^{3,3}(G)} \leq \frac{1}{2},$ $M = const(\sigma m \delta^{-1}\eta^{-2}\|f_0\|_{C^{0,1}_{x,t}(Q)})$ $m = 10c_1c_2c_3,$ $c_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\lambda^4 d\lambda}{(1+|\lambda|^2)^3} < +\infty,$

$c_i(i = 2,3) -$ коэффициенты теоремы вложения Соболева.

Тогда функции

$$
u(x,t,z) = (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(x,t,\lambda)e^{i\lambda z}d\lambda, \tag{9}
$$

$$
h(x,t) = \frac{1}{f_0(x,t)}[\Phi_0 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 e^{i\lambda\ell_0}\hat{u}(x,t,\lambda)d\lambda] \tag{10}
$$

являются единственным решением линейной обратной задачи (1)-(5) из указанного класса U.

Литература

1. Аниканов Ю.Е. Некоторые методы исследования многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений. – Новосибирск: Наука,1978. – 120 с.
2. Джамалов С.З. Нелокальные краевые и обратные задачи для уравнений смешанного типа // Монография. –Ташкент, 2021. – 176 с.
3. S.Z.Dzhamalov, R.R.Ashurov, Kh.Sh. Turakulov. The Linear Inverse Problem for the Three- Dimensional Tricomi Equation in a Prismatic Unbounded Domain // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2021, 42(15). – P. 3606–3615.
4. S.Z.Dzhamalov, M.G.Aliev, Kh.Sh. Turakulov. On a linear inverse problem for the three-dimensional Tricomi equation with nonlocal boundary conditions of periodic type in a prismatic unbounded domain. // Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. Math. 2022, (42)(1). – P.1-12.