УДК 517.956.6
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_1(4)_12

ОБ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ТРЁХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОЛУНЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ УСЛОВИИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ТИПА В НЕОГРАНИЧЕННОМ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЕ

Джамалов Сироджиддин Зухриддинович, д.ф.-м.н., профессор,
siroj63@mail.ru
Сипатдинова Бийбиназ Кенесбайевна, PhD докторант,
sbiybinaz@mail.ru
Халхаджаев Бахтиёр Батырович, PhD докторант,
xalxadjaev@yandex.ru
Институт математики имени В.И.Романовского при академии наук РУ
Ташкент, Узбекистан.

Аннотация: *Для уравнений смешанного типа второго рода в неограниченных областях нелокальные краевые задачи в многомерном случае практически не исследованы.*

С этой целью в данной работе в неограниченном параллелепипеде формулируется и изучается полу нелокальная краевая задача периодического типа для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода второго порядка. Для доказательства единственности обобщённого решения используется метод интегралов энергии. Для доказательства существования обобщённого решения сначала используется преобразование Фурье и в результате получается новая задача на плоскости, а для разрешимости этой задачи используется методы "ε -регуляризации" и априорных оценок. Используя эти методы, и равенство Парсеваля, доказывается единственность, существование и гладкость обобщённого решения одной нелокальной краевой задачи периодического типа для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода второго порядка.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа второго рода второго порядка, полу нелокальная краевая задача, преобразование Фурье, методы "ε-регуляризации" и априорных оценок.

ON A LINEAR INVERSE PROBLRM FOR A THREE-DIMENTIONAL MIXED TYPE SECOND ORDER EQUATION WITH A SEMI-NONLOCAL BOUNDARY CONDITION OF A PERIODIC TYPE IN AN UNBOUNDED PARALLELEPIPED

Dzamalov Sirojiddin Zuhriddinovich, d.ph-m.s., professor
siroj63@mail.ru
Sipatdinova Biybinaz Kenesbayevna, PhD. Stud,
sbiybinaz@mail.ru
Khalkhodjayev Bakhtiyor Batirovich, PhD. Stud,
xalxadjaev@yandex.ru

Abstract: *For equations of mixed type of the second kind in unbounded domains, nonlocal boundary value problems in the multidimensional case are practically not studied.*

To prove the uniqueness of the generalized solution, the method of energy is used. To prove the existence of a generalized solution, the Fourier transform is first used, and as a result, a new problem in the plane is obtained, and for the solvability of this problem, the methods of "ε -regularization" and a priori estimates are used. Using these methods and Parseval's equality, we prove the uniqueness, existence and smoothness of a generalized solution of a non-local boundary value problem of periodic type for a three-dimentional mixed-type equation of the second kind of the second order.

Keywords: generalized solutions, second-order mixed-type equation, semi-nonlocal boundary value problem, Fourier transform, the methods of “ε -regularization” and a priori estimates.

В процессе исследования нелокальных задач была выявлена тесная взаимосвязь задач с нелокальными краевыми условиями и обратными задачами. К настоящему времени достаточно хорошо изучены обратные задачи для классических уравнений математической физики [3]. Обратные задачи для уравнений смешанного типа как первого, так и второго рода в ограниченных областях изучены в [2]. Значительно менее изученными являются обратные задачи для уравнений смешанного типа первого рода второго порядка в неограниченных областях [4, С. 3606-3615], [5, С. 1-12], а для уравнений смешанного типа второго рода второго порядка в неограниченных областях обратные задачи практически не исследованы.

Для решения данной проблемы в настоящей работе, по исследованию однозначной разрешимости обратных задач для уравнений смешанного типа второго рода второго порядка в неограниченном параллелепипеде предлагается метод, который основан на приведении обратных задач к прямым с полунелокальным краевым условием периодического типа для семейства нагруженных интегро-дифференциальных уравнений смешанного типа второго рода второго порядка в ограниченной прямоугольной области. Напомним, что нагруженным уравнением принято называть уравнение с частными производными, содержащее в коэффициентах или в правой части значения тех или иных функционалов от решения уравнения [6, С.86-94].

В области

$$G=(0,1)\times(0,T)\times R=Q\times R=\{(x,t,z);\quad x\in(0,1), 0<t<T<+\infty, z\in R.\}$$

рассмотрим трехмерное уравнение смешанного типа второго рода:

$$Lu=k(t)u_{tt}-\Delta u+a(x,t)u_t+c(x,t)u=\psi(x,t,z), \tag{1}$$

где $\Delta u=u_{xx}+u_{zz}$- оператор Лапласа и пусть $k(0)\le 0\le k(T)$. Здесь $\psi(x,t,y)=g(x,t,y)+h(x,t)\cdot f(x,t,y)$, $g(x,t,y)$ и $f(x,t,y)$ -заданные функции, а функция $h(x,t)$ подлежит определению.

Уравнение (1) относится к уравнениям смешанного типа второго рода, так как на знак функции $k(t)$ по переменной t внутри области Q не налагается никаких ограничений [1, С.100].

Линейная обратная задача. Найти функции $(u(x,t,z), h(x,t))$ удовлетворяющие уравнению (1) в области G , такие что, функция $u(x,t,z)$ удовлетворяет следующим полу нелокальным краевым условием периодического типа

$$\gamma u\big|_{t=0}=u\big|_{t=T}\,, \tag{2}$$

$$D_x^p u\big|_{x=0}=D_x^p u\big|_{x=1}, p=0,1, \tag{3}$$

Далее будем считать, что $u(x,t,z)$ и $u_z(x,t,z)\to 0$ при $|z|\to\infty$, $u(x,t,z)$ абсолютно интегрируема по z на R при любом (x,t) в $\overline{Q}$. (4)

Кроме того, решение задачи (1)-(4) удовлетворяет дополнительному условию

$$u(x,t,\ell_0)=\varphi_0(x,t),\quad \text{где}\quad \ell_0\in R \tag{5}$$

а функции $u(x,t,z)$ и $h(x,t)$ принадлежит классу

$$U=\{(u,h)|\, u\in W_2^{2,3}(G);h\in W_2^2(Q).\}$$

Здесь $W_2^{2,3}(G)$ Банахово пространство с нормой

$$\|u\|^2_{W_2^{2,3}(G)}=(2\pi)^{-1/2}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}(1+|\lambda|^2)^3\cdot\|\hat{u}(x,t,\lambda)\|^2_{W_2^2(Q)}\,d\lambda,$$

где $W_2^2(Q)-$ пространство Соболева с нормой

$$\|\vartheta\|_2^2=\|\vartheta\|^2_{W_2^l(Q)}=\sum_{|\alpha|\le 2}\int_Q\left|D^\alpha\vartheta\right|^2dxdt.$$

Здесь $\alpha-$мульти индекс, D^α –обобщённая производная по переменным x и t,

$$\hat{u}(x,t,\lambda)=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,t,z)e^{-i\lambda z}dz$$

преобразование Фурье по переменной z, функции $u(x,t,z)$.

Определение 1. Обобщённым решением задачи (1)-(5) будем называть функцию $u(x,t,z)\in U$, удовлетворяющую уравнению (1) почти всюду с условиями (2)-(5).

Пусть все коэффициенты уравнения (1) достаточно гладкие функции в области G, и пусть выполнены следующие условия относительно коэффициентов, правой части и заданной функции $\varphi_0(x,t)$;

Условие 1:

периодичность: $a(x,0)=a(x,T);\, c(x,0)=c(x,T)$.

нелокальное условие: $\gamma\cdot g(x,0,z)=g(x,T,z),\ \gamma\cdot f(x,0,z)=f(x,T,z),$

гладкость: $f(x,t,l_0)=f_0(x,t)\in C^{0,1}_{x,t}(Q),|f_0(x,t)|\ge\eta>0;\ f\in W_2^{3,3}(Q),g\in W_2^{1,3}(Q).$

Условие 2:

$$\varphi_0(x,t)\in W_2^3(Q);\gamma D_t^q\varphi_0\big|_{t=0}=D_t^q\varphi_0\big|_{t=T},q=0,1,2;\varphi_0\big|_{x=0}=\varphi_0\big|_{x=1}=0.$$

Теорема 1. Пусть выполнены вышеуказанные условия 1 и 2 для коэффициентов уравнение (1), кроме того, пусть $2a-|k_t|+\mu k\ge B_1>0$, $\mu c(x,t)-c_t(x,t)\ge b_2>0$, для всех $(x,t)\in\overline{Q}$, где $\mu=\frac{2}{T}\ln|\gamma|>0$ и $|\gamma|>1$, и пусть существует положительные числа $\sigma,c(\sigma^{-1})-$(коэффициенты неравенство Коши) такие, что для $b_0=\min\{B_1,\mu,b_2\}$ имеют оценки $b_0-c(\sigma^{-1})=\delta>0$, $c(\sigma^{-1})=11\mu^2\sigma^{-1}>0$, $q=M\|f\|^2_{W_2^{3,3}(G)}<\frac{1}{2}$, где $M=const(\sigma\mu^2m\delta^{-1}\eta^{-2}\|f_0\|_{C^{0,1}_{x,t}(Q)})$, $m=10c_1c_2c_3$, $c_1=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\lambda^4d\lambda}{(1+|\lambda|^2)^3}<+\infty$, $c_i(i=2,3)$ коэффиценты теорема вложения Соболева.

Тогда функции

$$u(x,t,z)=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{u}(x,t,\lambda)e^{i\lambda z}d\lambda,$$

$$h(x,t)=\frac{1}{f_0(x,t)}[\Phi_0+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\lambda^2 e^{i\lambda\ell_0}\hat{u}(x,t,\lambda)d\lambda],$$

здесь $\Phi_0=L_0\varphi_0-g_0$; $L_0\varphi_0=k(t)\varphi_{0tt}-\varphi_{0xx}+a(x,t)\varphi_{0t}+c(x,t)\varphi_0$, являются единственным решением линейной обратной задачи (1)-(5) из указанного класса U, где функция $\hat{u}(x,t,\lambda)$ подлежит к определению.

Однозначное разрешимость задачи (1)-(5) докажем с помощью преобразованием Фурье, т.е. для нахождение решение задачи (1)-(5), применяем преобразование Фурье по переменной z, для задачи (1)-(5) и в прямоугольнике $Q=(0,1)\times(0,T)$ получим для нагруженных интегро-дифференциальных уравнений Трикоми вспомогательную задачу:

$$L\hat{u}=k(t)\hat{u}_{tt}-\hat{u}_{xx}+a(x,t)\hat{u}_t+(c(x,t)+\lambda^2)\hat{u}=\hat{g}(x,t,\lambda)+$$
$$+\frac{\hat{f}(x,t,\lambda)}{f_0(x,t)}[\Phi_0+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\xi^2 e^{i\xi\ell_0}\hat{u}(x,t,\xi)d\xi]\equiv\hat{F}(\hat{u}), \tag{6}$$

с полунелокальными краевыми условиями:

$$\gamma\hat{u}\big|_{t=0}=\hat{u}\big|_{t=T}; \tag{7}$$

$$\hat{u}\big|_{x=0}=\hat{u}\big|_{x=1}=0, \tag{8}$$

где, $\lambda\in R=(-\infty,\infty)$,

$$\hat{f}(x,t,\lambda)=(2\pi)^{-1/2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x,t,z)e^{-i\lambda z}dz$$

-преобразование Фурье по переменной z, функции $f(x,t,z)$.

Сначала методами "ε-регуляризации", априорных оценок и сжимающихся отображение доказывается единственность и существование обобщённого решения вспомогательной задачи (6)-(8). Используя эти методы, и равенство Парсеваля, доказывается однозначное разрешимость обобщённого решения обратной задачи с полу нелокальными краевыми условиями периодического типа для трехмерного уравнения смешанного типа второго рода второго порядка в неограниченном параллелепипеде.

Литература

1. Врагов, В.Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики / В.Н. Врагов. - Новосибирск: НГУ, 1983. 216 с.
2. Джамалов, С.З. Нелокальные краевые и обратные задачи для уравнений смешанного типа: монография / С.З. Джамалов. - Ташкент. 2021. 176 с.
3. Лаврентьев, М.М. Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений / М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, В.Г. Васильев. - Новосибирск. Наука, 1969. 67 с.
4. S.Z. Dzhamalov. The Linear Inverse Problem for the Three- Dimensional Tricomi Equation in a Prismatic Unbounded Domain / S.Z. Dzhamalov, R.R. Ashurov, Kh.Sh. Turakulov // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. T.42. №15. P. 3606-3615.
5. S.Z. Dzhamalov, M.G. Aliev, Kh.Sh. Turakulov. On a linear inverse problem for the three-dimensional Tricomi equation with nonlocal boundary conditions of periodic type in a prismatic unbounded domain / S.Z. Dzhamalov, M.G. Aliev, Kh.Sh. Turakulov // Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. Math. 2022. T.42. №1. P.1-12.
6. Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их приложения / А. М. Нахушев // Дифференц, уравнения. 1983. Т.19. №1. С.86-94.