УДК 517.956.6
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_1(4)_11

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СОСТАВНОГО И ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПОВ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Бабаев Сайфулло, к.ф.-м.н., доцент
bsayfullo@internet.ru
Филиал Таджикского технологического университета
Исфара, Таджикстан
Бекмаматов Замирбек Молдошович, к.ф.-м.н., старший преподаватель
zbekmamatov@mail.ru
Баткенский государственный университет
Баткен, Кыргызстан

Аннотация: *В статье проводятся комплексное исследование задача сопряжения для уравнения составного и гиперболического типов четвертого порядка. При решении задачи сопряжения воспользуются методы теории уравнений смешанного типа и теории интегральных уравнений Вольтера и Фредгольма второго родов. Основная задача расщепляется на три самостоятельные задачи, каждая из которых рассматривается по отдельности. В ходе решения задач исследуются задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка и задачи типа Гурса. Следует отметить, что эти обыкновенные дифференциальные уравнения возникают на линии изменения типа и найдены для них краевые условия. Получены формулы решения основной задачи в соответствующих подобластях основной области. Доказано однозначной разрешимости задачи сопряжения.*

Ключевые слова: *Задача сопряжения, краевые условия, составного типа, задача Гурса, функция Грина и Римана, задача Дирихле.*

ТӨРТҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ КУРАМА ЖАНА ГИПЕРБОЛАЛЫК ТИПТЕГИ ТЕҢДЕМЕЛЕР ҮЧҮН БИР ЖАЛГАШТЫРУУ МАСЕЛЕСИ ЖӨНҮНДӨ

Бабаев Сайфулло, ф.-м.и.к, доцент
bsayfullo@internet.ru
Тажик технологиялык университетинин филиалы
Исфара, Таджикстан
Бекмаматов Замирбек Молдошович, ф.-м.и.к, ага окутуучу
zbekmamatov@mail.ru
Баткен мамлекеттик университети
Баткен, Кыргызстан

Аннотация: *Макалада төртүнчү тартиптеги курама жана гиперболалык типтеги теңдемелер үчүн жалгаштыруу маселесин комплекстүү изилдөө жүргүзүлөт. Жалгаштыруу маселесин чечүүдө аралаш типтеги теңдемелер теориясынын жана Вольтердин жана Фредгольмдун экинчи түрдөгү интегралдык теңдемелеринин теориясынын усулдары колдонулат. Негизги маселе ар бири өзүнчө каралуучу өз алдынча үч маселелерге ажырайт. Маселелерди чыгаруунун жүрүшүндө экинчи даражадагы кадимки дифференциалдык теңдемелер үчүн маселелер жана Гурса тибиндеги маселелер изилденет. Бул кадимки дифференциалдык теңдемелер тип өзгөрүү сызыгында пайда болуп, алар үчүн чектик шарттар табылганын белгилей кетүү керек. Негизги аймактын тиешелүү камтылуучу аймактарында негизги маселени чечүүнүн формулалары алынган. Жалгаштыруу маселесинин бир маанилүү чечилиши далилденген.*

Ачкыч сөздөр: *Жалгаштыруу маселеси, чектик шарттар, курама тип, Гурса маселеси, Грин жана Риман функциясы, Дирихле маселеси.*

ON ONE CONJUGATION PROBLEM FOR A FOURTH-ORDER COMPOSITE AND HYPERBOLIC TYPE EQUATION

Babaev Sayfullo, *Candidate of Ph. and Math. Sc., Associate Professor*
bsayfullo@internet.ru
Branch of the Tajik Technological University
Isfara, Tajikistan
Bekmamatov Zamirbek Moldoshovich, Candidate of Ph. and Math. Sc., Senior Lecturer
zbekmamatov@mail.ru
Batken State University
Batken, Kyrgyzstan

Abstract*: In the article a comprehensive study of the conjugation problem for the equation of the composite and hyperbolic types of the fourth order is carried out. When solving the conjugation problem, the methods of the theory of mixed type equations and the theory of Voltaire and Fredholm integral equations of the second kind will be used. The main problem is split into three independent problems, each of which is considered separately. In the course of solving problems, problems for second-order ordinary differential equations and problems of the Goursat type are studied. It should be noted that these ordinary differential equations arise on the line of type change and boundary conditions are found for them. The formulas for the solution of the main problem in the corresponding subdomains of the main domain are obtained. The one-valued solvability of the conjugation problem is proved.*

Keywords: *Conjugation problem, boundary conditions, composite type, Goursat problem, Green and Riemann function, Dirichlet problem.*

I. Постановка задачи. В области D состоящий из прямоугольников $D_1=\{0\le x\le l_1, 0\le y\le h_1\}$, $D_2=\{0\le x\le l_1, -h_2\le y\le 0\}$, $D_3=\{-l_2\le x\le 0, -h_2\le y\le 0\}$ рассматриваются уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0, \qquad (x,y)\in D_1, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}+du=0, \qquad (x,y)\in D_2, \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0, \qquad (x,y)\in D_3, \tag{3}$$

где d - постоянное число, $l_1, l_2, h_1, h_2>0.$

Нетрудно убедиться, что уравнения (1), (3) принедлажать к составному, а (2) к гиперболическому типов.

Рассмотрим следующую задачу:

Задача А. Ищется функция $u(x,y)\in C(\bar{D})\cap C^3(D)\cap[C^{4+0}(D_1)\cup C^{2+2}(D_1)\cup$ $\cup C^{2+2}(D_2)\cup C^{2+2}(D_3)\cup C^{4+0}(D_3)]$ удовлетворяющий уравнения (1) - (3) соответственно в $D_j\,(j=\overline{1,3})$ при краевых условиях

$$u(0,y)=\varphi_1(y), \quad u(l_1,y)=\varphi_2(y), \tag{4}$$

$$u_{xx}(0,y)=\varphi_3(y), \quad u_{xx}(l_1,y)=\varphi_4(y), \quad 0\le y\le h_1, \tag{5}$$

$$u(x,h_1)=\varphi(x), \quad 0\le x\le l_1, \tag{6}$$

$$u(l_1,y)=\psi_1(y), \quad -h_2\le y\le 0, \tag{7}$$

$$u(x,-h_2)=\psi(x), \quad 0\le x\le l_1, \tag{8}$$

$$u(x,0)=\chi_1(x), \tag{9}$$

$$u(x,-h_2)=\chi_2(x), \tag{10}$$

$$u_{yy}(x,0)=\chi_3(x), \tag{11}$$

$$u_{yy}(x,-h_2)=\chi_4(x), \quad -l_2\le x\le 0, \tag{12}$$

$$u(-l_2,y)=\chi(y), \quad -h_2\le y\le 0\,, \tag{13}$$

где

$$\begin{gathered}\varphi_j\in C^3\left[0,h_1\right] \ \ (j=1,2), \varphi_j\in C^2\left[0,h_1\right] \ \ (j=3,4), \varphi,\psi\in C^3\left[0,l_1\right], \psi_1(y)\in C^2\left[-h_2,0\right],\\ \chi_1(x),\chi_2(x)\in C^2\left[-l_2,0\right], \chi_3(x),\chi_4(x)\in C^2\left[-l_2,0\right], \chi(y)\in C^3\left[-h_2,0\right].\end{gathered} \tag{14}$$

Из постановки задачи A вытекают следующие условия согласования и сопряжения

$$\begin{gathered}\varphi(0)=\varphi_1(h_1), \varphi(l_1)=\varphi_2(h_1), \varphi_2(0)=\psi_1(0), \psi_1(-h_2)=\psi(l_1), \psi(0)=\chi_2(0), \varphi_1(0)=\chi_1(0),\\ \chi_1(-l_2)=\chi(0), \chi(-h_2)=\chi_2(-l_2)\end{gathered} \tag{15}$$

$$\begin{gathered}u(x,+0)=u(x,-0)=\tau_1(x),\ u_y(x,+0)=u_y(x,-0)=\nu_1(x),\\ u_{yy}(x,+0)=u_{yy}(x,-0)=\mu_1(x), \quad 0\le x\le l_1,\\ u(+0,y)=u(-0,y)=\tau_2(y),\ u_x(+0,y)=u_x(-0,y)=\nu_2(y),\\ u_{xx}(+0,y)=u_{xx}(-0,y)=\mu_2(y), \quad -h_2\le y\le 0,\end{gathered} \tag{16}$$

где τ_j, ν_j, μ_j $(j=1,2)$ – пока неизвестные функции, причем

$$\begin{gathered}\tau_1(0)=\varphi_1(0),\ \tau_1(l_1)=\varphi_2(0),\ \mu_1(0)=\varphi_3(0), \mu_1(l_1)=\varphi_4(0), \tau_2(0)=\varphi_1(0),\ \tau_2(-h_2)=\chi_2(0),\\ \tau_2(-h_2)=\psi(0), \mu_2(0)=\varphi_3(0).\end{gathered} \tag{17}$$

В работе получены достаточные условия однозначной разрешимости задачи A и даны формулы представления решения задачи в явном виде в соответствующих подобластях области D. Отметим, что основная задача расщепляется на самостоятельные задачи. Изучению задачи сопряжения для уравнения составного и гиперболического типов четвертого порядка посвящены работы [1] - [3].

Следуя методы теории уравнений смешанно-составного типов [4], после определения функции τ_j,ν_j,μ_j задача A распадется на следующие самостоятельные задачи:

Задача 1. Ищется в области D_1 решение уравнения (1) $u(x,y)\in C^2(\overline{D}_1)\cap$ $\cap[C^{4+0}(D_1)\cup C^{2+2}(D_1)]$ при краевых условиях (4) - (6) и условии

$$u(x,+0)=\tau_1(x), \quad 0\le x\le l_1. \tag{18}$$

Задача 2. Ищется в области D_2 решение уравнения (2) $u(x,y)\in C^1(\overline{D}_2)\cap$ $\cap C^{2+2}(D_2)$ при краевых условиях (7), (8) и условии

$$u(x,-0)=\tau_1(x), \quad u(+0,y)=\tau_2(y), \quad 0\le x\le l_1, \quad -h_2\le y\le 0, \tag{19}$$

Задача 3. Ищется в области D_3 решение уравнения (3) $u(x,y)\in C^2(\overline{D}_3)\cap$ $\cap[C^{2+2}(D_3)\cup C^{0+4}(D_3)]$ при краевых условиях (9) - (13) и условии

$$u(-0,y)=\tau_2(y), \quad -h_2\le y\le 0. \tag{20}$$

1. **Соотношение полученное из области D_1.** Перепишем уравнение (1) в виде

$$z_{xx}=0 \tag{21}$$

где $z(x,y)$ – новая неизвестная функция и

$$u_{xx}+u_{yy}=z(x,y). \tag{22}$$

Общее решение уравнения (2) имеет вид

$$z(x,y)=x\omega_1(y)+\omega_2(y), \tag{23}$$

где $\omega_1(y),\ \omega_2(y)$ – произвольные гладкие функции.

Для определения $\omega_1(y)$ и $\omega_2(y)$ воспользуемся краевыми условиями (4), (5). Тогда представляя эти значения в (23) найдем $z(x,y)$. Таким образом в (22) определено правая часть $z(x,y)=z_0(x,y)$. В (22) переходя к пределу при $y\to 0$ имеем соотношение, полученное из области D_1:

$$\tau_1''(x)+\mu_1(x)=z_0(x,0),\ 0\le x\le l_1, \tag{24}$$

Для уравнения (24) решаем задачу $\tau_1(0)=\varphi_1(0),\quad \tau(l_1)=\psi_1(0)$, и получим

$$\tau_1(x)=p_1(x)+\int_0^{l_1}G_1(x,t)\mu(t)dt, \tag{25}$$

где $G_1(x,t)$ – функция Грина, а $p_1(x)$ - вполне определенная функция.

2. Соотношения, полученные из области D_3. По аналогии как в пункте 1 перепишем уравнение (3) в виде $\zeta_{yy}(x,y)=0$,

общее решение, которого имеет вид

$$\zeta(x,y)=yw_1(x)+w_2(x), \tag{26}$$

где $\zeta(x,y)=u_{xx}+u_{yy}$, $w_1(x)$ и $w_2(x)$ – произвольные гладкие функции.

Используя условия (9) - (13) из (26) находим неизвестные функции

$$\begin{aligned} &w_2(x)=\chi_1''(x)+\chi_3(x),\\ &w_1(x)=\frac{1}{h_2}\left(\chi_1''(x)+\chi_3(x)-\chi_2''(x)-\chi_4(x)\right),\quad -l_2\le x\le 0. \end{aligned} \tag{27}$$

Исходя из этого уравнение (3) представим в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\zeta_0(x,y),\qquad (x,y)\in D_3, \tag{28}$$

где $\zeta_0(x,y)$ – известная функция.

В (28) переходя к пределу при $x\to 0$ будем иметь соотношение, полученное из области D_3

$$\tau_2''(y)+\mu_2(y)=\zeta_0(0,y). \tag{29}$$

Решение задачи $\tau_2(0)=\varphi_1(0),\quad \tau_2(-h_2)=\chi_2(0)$ для уравнение (29) дается формулой

$$\tau_2(y)=p_2(y)+\int_{-h_2}^{0}G_2(y,t)\mu_2(t)dt, \tag{30}$$

где $G_2(y,t)$ – функция Грина, а $p_2(y)$ - вполне определенная функция.

3. Решение задачи Гурса для уравнения (2). Для доказательства существование решение задачи 2, рассмотрим задачу Гурса: ищется решение уравнение (2), удовлетворяющее условиям (19) и

$$\begin{aligned} &u_y(x,-0)=\nu_1(x), \quad -l_2\le x\le 0,\\ &u_x(-0,y)=\nu_2(y), \quad -h_2\le y\le 0, \end{aligned} \tag{31}$$

где $\tau_j,\nu_{j,}\ \ (j=1,2)$ - пока неизвестные функции.

При $\tau_1,\nu_1\in C^2\left[-l_2,0\right],\ \tau_2,\nu_2\in C^2\left[-h_2,0\right]$ решение задачи Гурса существует, единственно и имеет вид [5]:

$$u(x,y)=\vartheta_{\eta\xi}(x,y;0,y)\tau_2(y)-\vartheta_\eta(x,y;0,y)\nu_2(y)-\int_0^y\left[\vartheta_{\eta\eta}(x,y;0,\eta)\,\nu_2(\eta)-\vartheta_{\xi\eta\eta}(x,y;0,\eta)\,\tau_2(\eta)\right]d\eta-$$

$$-\int_0^y\left[\vartheta(x,y;\xi,0)\,\nu_1''(\xi)-\vartheta_\eta(x,y;\xi,0)\,\tau_1''(\xi)\right]d\xi, \tag{32}$$

где

$$\vartheta(x,y;\xi,\eta)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n d^n}{((2n+1)!)^2}(\xi-x)^{2n+1}(\eta-y)^{2n+1} \text{ – функция Римана.} \tag{33}$$

Используя краевые условия (7) и (8) для определения неизвестные функции $\nu_1(x)$ и $\nu_2(y)$ в (32) будет получено система интегральных уравнений типа Вольтерра-Фредгольма. После некоторых преобразований в этом уравнении, будет обращено Вольтеровская часть и сводиться к интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$\nu_1''(x)+\int_0^{l_1}K(x,\xi)\nu_1''(\xi)d\xi=\Psi_0(x), \tag{34}$$

с достаточным условием разрешимости, которого является условие

$$M(l_1)\cdot l_1<1, \tag{35}$$

где

$M(l_1)=\max\limits_{0\le\frac{x}{\xi}\le l_1}\left|K(x,\xi)\right|,\ K(x,\xi)$ - вполне определенная функция,

$\Psi_0(x)=F_2(x)+\int_0^x R_1(x,\xi)F_2(\xi)d\xi,\ R_1(x,\xi)$ - резольвента ядра $-\frac{1}{h_2}\vartheta_{xx}(x,-h_2;\xi,0),$

$F_2(x)=F_1(x)+\int_{-h_2}^0\vartheta_{\eta\eta x}(x,-h_2;0,\eta)F_1(\eta)d\eta,$

$F_1(x)=-\frac{1}{h_2}F(y)-\frac{1}{h_2}\int_y^0 R(y,\eta)F(\eta)d\eta,\ R(y,\eta)$ - резольвента ядра $-\frac{1}{l_1}\vartheta_{\eta\eta}(l_1,y;0,\eta),$

$F(y)=\vartheta_{\eta\xi}(l_1,y;0,y)\tau_2(y)-\psi_1(y)+\int_y^0\vartheta_{\xi\eta\eta}(l_1,y;0,\eta)\tau_2(\eta)d\eta-\int_0^{l_1}\vartheta(l_1,y;\xi,0)\tau_1''(\xi)d\xi.$

Неизвестная функция $\nu_2(y)$ будет определено по формуле

$$\nu_2(y)=\Phi_0(y)+\int_0^{l_1}K_1(y,\xi)\nu_1''(\xi)d\xi, \tag{36}$$

где

$\Phi_0(y)$ и $K_1(y,\xi)$- вполне определенные функции. Следует отметить, что $\nu_1(x)$ является решением задачи

$$\nu_1''(x)=\rho(x), \qquad \nu_1(0)=\varphi_1'(0) \qquad \nu_1(l_1)=\varphi_2'(0), \tag{37}$$

и, оно дается формулой

$$\nu_1(x)=\varphi_1'(0)+\frac{x}{l_1}(\varphi_2'(0)-\varphi_1'(0))+\int_0^{l_1}G_3(x,\xi)\rho(\xi)d\xi,$$

(38)

где

$$G_3(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{\xi(x-l_1)}{l_1}, & 0\le\xi<x,\\[2mm] \dfrac{x(\xi-l_1)}{l_1}, & x\le\xi\le l_1\end{cases}$$ - функция Грина.

$\rho(x)$ - вполне определенная функция.

4. Соотношения полученные из области D_2 к областям D_1 и D_3.

С учетом постановки задачи А, и устремляя $y\to-0$ и $x\to-0$ из уравнения (2) получаем следующие задачи:

$$\mu_1''(x)=-d\tau_1(x), \qquad \mu_1(0)=\chi_3(0), \qquad \mu_1'(0)=\chi_3'(0), \tag{39}$$

$$\mu_2''(y)=-d\tau_2(y), \qquad \mu_2(0)=\varphi_3(0), \qquad \mu_2'(0)=\varphi_3'(0), \tag{40}$$

соответственно. Решения задачи (39) и (40) представляются соответственно

$$\mu_1(x)=\chi_3(0)+\chi_3'(0)x-d\int_0^x(x-\xi)\tau_1(\xi)d\xi, \tag{41}$$

$$\mu_2(y)=\varphi_3(0)+\varphi_3'(0)y-d\int_0^y(y-\eta)\tau_2(\eta)d\eta. \tag{42}$$

Далее, подставляя выражения (25) и (30) для $\tau_1(x)$ и $\tau_2(y)$ в (41) и (42) имеем

$$\mu_1(x)=\chi_3(0)+x\chi_3'(0)+\int_0^{l_1}Q_1(x,t)\mu_1(t)dt-d\int_0^{l_1}P_1(t)dt, \tag{43}$$

$$\mu_2(y)=\varphi_3(0)+y\varphi_3'(0)+\int_{-h_2}^{0}Q_2(y,t)\mu_2(t)dt-d\int_{-h_2}^{0}P_2(t)dt, \tag{44}$$

где

$$Q_1(x,t)=\int_0^x(x-\xi)G_1(\xi,t)d\xi, \qquad Q_2(y,t)=\int_0^y(y-\eta)G_2(\eta,t)d\eta. \tag{45}$$

Уравнения (44) и (45) представляют собой интегральные уравнения Фредгольма второго рода, достаточные условия разрешимости, которых являются соответственно

$$\begin{aligned} &l_1\cdot M_1(l_1)<1, \qquad M_1(l_1)=\max_{0\le\frac{x}{t}\le l_1}|Q_1(x,t)|,\\ &h_2\cdot M_2(h_2)<1, \qquad M_2(h_2)=\max_{0\le\frac{y}{t}\le h_2}|Q_2(y,t)|. \end{aligned} \tag{46}$$

Таким образом, подставляя найденные значения функции $\tau_1(x)$, $\tau_2(y)$, $\nu_1(x)$, $\nu_2(y)$ в правую часть формулы (32), находим решение задачи 2.

5. Решение задачи 1 и 3 в областях D_1 **и** D_3**.** После определения функций $\tau_1(x)$, $\tau_2(y)$**,** не трудно видеть, что решения задачи 1 и 3 эквивалентно редуцируются к решению задачи Дирихле для уравнения (22) и (28) с краевыми условиями (4), (6), $u(x,0)=\tau_1(x)\ (0\le x\le l_1)$ и (9), (10), (13), $u(0,y)=\tau_2(y)$ соответственно.

Решение задачи Дирихле представимо в виде [6]:

а) для уравнения (22)

$$u(x,y)=\int_0^{l_1}G_{01\eta}(x,y;\xi,0)\tau_1(\xi)d\xi-\int_0^{l_1}G_{01\eta}(x,y;\xi,h_1)\varphi(\xi)d\xi+\int_0^{h_1}G_{01\xi}(x,y;0,\eta)\varphi_1(\eta)d\eta-$$
$$-\int_0^{h_1}G_{01\xi}(x,y;l_1,\eta)\varphi_2(\eta)d\eta-\int_0^{l_1}d\xi\int_0^{h_1}G_{01}(x,y;\xi,\eta)z(\xi,\eta)d\eta, \qquad (47)$$

б) для уравнения (28)

$$u(x,y)=\int_{-l_2}^{0}G_{02\eta}(x,y;\xi,-h_2)\chi_2(\xi)d\xi-\int_{-l_2}^{0}G_{02\eta}(x,y;\xi,0)\chi_1(\xi)d\xi+\int_{-h_2}^{0}G_{02\xi}(x,y;0,\eta)\tau_2(\eta)d\eta-$$
$$-\int_{-h_2}^{0}G_{02}(x,y;-l_2,\eta)\chi(\eta)d\eta-\int_{-l_2}^{0}d\xi\int_{-h_2}^{0}G_{02}(x,y;\xi,\eta)\zeta_0(\xi,\eta)d\eta, \qquad (48)$$

где

$$G_{01}(x,y;\xi,\eta)=\frac{4l_1h_1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{h_1^2n^2+l_1^2m^2}\sin\left(\frac{\pi n}{l_1}x\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi m}{h_1}y\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{l_1}\xi\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi m}{h_1}\eta\right),$$
$$G_{02}(x,y;\xi,\eta)=\frac{4l_2h_2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{h_2^2n^2+l_2^2m^2}\sin\left(\frac{\pi n}{l_2}x\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi m}{h_2}y\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi n}{l_2}\xi\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi m}{h_2}\eta\right)-$$

функции Грина.

Имеет место следующая

Теорема. Пусть выполнены условия (14), (15), (35), (46). Тогда задача А имеет решение, оно единственно и определяется в областях D_1-D_3 по формулам (47), (32) и (48) соответственно.

Литература

1. Бекмаматов З.М. Задачи сопряжения для уравнений составного и гиперболического типов четвертого порядка/ Дис.канд.физ.-мат. наук, Ош, 2022. – 105 с.
2. A. Sopuev, S. Babaev, Z.M. Bekmamatov Revisiting the Mixed Problem for Equations of Compound and Hyperbolic Types of Order Four [Text] / Revisiting the mixed problem for equations of compound end hyperbolic types of order four // Growth poles of the global economy: emergence, changes and future perspectives. Lecture notes in networks and system. – 2020. – 73, V.1. – P. 725-736.
3. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно–составного типов. – Ташкент: Фан, 1979. – 240 с.
4. Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. –М.: Изд-во АН СССР, 1959. – 164 с.
5. Сопуев А. Краевые задачи для уравнения четвертого порядка и уравнения смешанного типа / Дис.докт.физ.-мат. наук, Бишкек, 1996. – 235 с.
6. Полянин А.Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.