УДК 517. 928
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_1(4)_10

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Аширбаева Айжаркын Жоробековна, д.ф.-м.н., профессор
aijarkyn.osh@mail.ru
Жолдошова Чебире Буркановна, преподаватель
chebire86@mail.ru
Ошский технологический университет имени М. Адышева
Ош, Кыргызстан

***Аннотация**: В последнее время расширяется область применения метода дополнительного аргумента, разработанного кыргызскими учеными. Метод дополнительного аргумента дает принципиальные возможности приводить различные виды уравнений в частных производных к интегральным уравнениям. В данной работе рассматривается применение указанного метода для интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка. С помощью метода дополнительного аргумента начальная задача для интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка сводится к интегральному уравнению. Получены с помощью принципа сжимающих отображений достаточные условия существования и единственности решения интегрального уравнения, эквивалентного начальной задаче для интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка.*

***Ключевые слова:** Интегро-дифференциальное, частные производные, метод дополнительного аргумента, начальная задача, интегральное уравнение, принцип сжатых отображений.*

ТӨРТҮНЧҮ ТАРТИПТЕГИ ЖЕКЕЧЕ ТУУНДУЛУУ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕНИН ЧЫГАРЫЛЫШЫН ИЗИЛДӨӨ

Аширбаева Айжаркын Жоробековна, ф.-м.и.д., профессор
aijarkyn.osh@mail.ru
Жолдошова Чебире Буркановна, окутуучу
chebire86@mail.ru
М. Адышев атындагыОш технологиялык университети
Ош, Кыргызстан

***Аннотация:** Акыркы мезгилде кыргыз окумуштуулары тарабынан иштелип чыккан кошумча аргумент кийирүү усулунун колдонуу областары кеңейүүдө. Кошумча аргумент кийирүү усулу жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелердин ар кандай түрлөрүн интегралдык теңдемелерге келтирүүгө негизги мүмкүнчүлүктөрдү берет. Бул макалада биз төртүнчү тартиптеги жекече туундулуу интегро-дифференциалдык теңдеме үчүн бул усулду колдонууну карайбыз. Кошумча аргумент кийирүү усулунун жардамында төртүнчү тартиптеги жекече туундулуу интегро-дифференциалдык теңдеме үчүн баштапкы маселе интегралдык теңдемеге келтирилет. Төртүнчү тартиптеги жекече туундулуу интегро-дифференциалдык теңдеме үчүн баштапкы маселеге эквиваленттүү болгон интегралдык теңдеменин чыгарылышынын жашашынын жана жалгыздыгынын жетиштүү шарттары кысып чагылтуу принцибинин жардамы менен алынган.*

***Ачкыч сөздөр:** Интегро-дифференциалдык, жекече туундулар, кошумча аргумент кийирүү усулу, баштапкы маселе, интегралдык теңдеме, кысып чагылтуу принциби.*

INVESTIGATION OF SOLUTIONS TO THE INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION IN FOURTH-ORDER PARTIAL DERIVATIVES

Ashirbayeva Aizharkyn Zhorobekovna, d.ph-m.s., professor
aijarkyn.osh@mail.ru
Zholdoshova Chebire Burkanovna, teacher
chebire86@mail.ru
Osh Technological University named after M. Adyshev
Osh, Kyrgyzstan

Abstract: *Recently, the scope of the additional argument method developed by Kyrgyz scientists has been expanding. The method of an additional argument gives fundamental possibilities to reduce various types of partial differential equations to integral equations. In this paper, we consider the application of this method for a fourth-order integro-differential equation in partial derivatives. Using the method of an additional argument, the initial problem for a fourth-order integro-differential equation in partial derivatives is reduced to an integral equation. Sufficient conditions for the existence and uniqueness of a solution to an integral equation equivalent to the initial problem for a fourth-order partial differential integro-differential equation are obtained using the contraction mapping principle.*

Keywords: *Integro-differential, partial derivatives, additional argument method, initial problem, integral equation, contraction mapping principle.*

В [2,3] рассмотрено применение метода дополнительного аргумента (МДА) для начальной задачи для дифференциального уравнения в частных производных второго порядка**.**

В [4] рассмотрен новый способ построения решений уравнений в частных производных четвертого порядка гиперболического типа.

В данной работе используя классы и пространства функций из [1], рассмотрим следующую задачу:

$$D^2[-a(t,x)]D^2[a(t,x)]u(t,x) = f(t,x,u,\int_{-\infty}^{\infty} K(t,x,\xi)u(t,\xi)d\xi), \tag{1}$$

$(t,x) \in G_2(T)=[0,T]\times R,$

где

$$D[\omega] = \frac{\partial}{\partial t} + \omega\frac{\partial}{\partial x} - \text{дифференциальный оператор,}$$

Рассмотрим уравнение (1) с начальными условиями

$$u(0,x) = \psi_0(x), \tag{2}$$

$$\frac{\partial^k u(0,x)}{\partial t^k} = \lambda_k(x), \quad k = 1,2,3, \tag{3}$$

где

$$\psi_0(x), \quad \lambda_k(x) \in \overline{C}^{(4)}(R), \quad (k = 1,2,3).$$

Пусть $a(t,x) \in \overline{C}^{(4)}(G_2(T)),$

$$f(t,x,u,I) \in \overline{C}^{(4)}(G_2(T)) \times R^2) \cap Lip(L\big|_u, N\big|_I, \quad K(t,x,s) \in \overline{C}^{(4)}(G_2(T)\times R),$$

причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|K(t,x,s\right|ds < \gamma = const.$$

Используя начальные данные, введем обозначения:

$$D[-a(t,x)]D^2[a(t,x)]u(t,x)\big|_{t=0} = \varphi_1(x),$$

$$D^2[a(t,x)]u(t,x)\big|_{t=0}=\varphi_0(x),$$
$$D\ [a(t,x)]u(t,x)\big|_{t=0}=\psi_1(x).$$

Обозначим через $p(s,t,x),\quad q(s,t,x)-$соответствующие решения интегральных уравнений (ИУ):

$$p(s,t,x)=x+\int_s^t a(\nu,p(\nu,t,x))d\nu, \tag{4}$$

$$q(s,t,x)=x-\int_s^t a(\nu,q(\nu,t,x))d\nu, \tag{5}$$

$$(s,t,x)\in Q_2(T)=\{(s,t,x)\big|\ 0\le s\le t\le T,\ x\in R\}.$$

Следует отметить, ИУ (5), (6) с $a(t,x)\in\overline{C}^{(1)}(G_2(T))$ имеют единственные решения с условием соответственно $p(s,s,x)=x,\quad q(s,s,x)=x.$

Из (4) и (5) вытекают соответственно соотношения

$$D\ [-a(t,x)]p(s,t,x)=0, \tag{6}$$

$$D\ [a(t,x)]q(s,t,x)=0, \tag{7}$$

Лемма 1. Задача (1), (2), (3) эквивалентна ИУ:

$$u(t,x)=\sum_{k=0}^{1}\psi_k(q(0,t,x))\frac{t^k}{k!}+\int_0^t(t-s)\sum_{k=0}^{1}\ \varphi_k(p(0,s.q(s,t,x))\frac{s^k}{k!}ds+$$
$$\int_0^t(t-s)\times\int_0^s(s-\tau)\,f\big(\tau,\,p(\tau,s,q(s,t,x),u(\tau,\,p(\tau,s,q)),\tag{8}$$
$$\left.\int_{-\infty}^{\infty}K(\tau,\,p(\tau,s,q),\xi)u(\tau,\xi)d\xi\right)d\tau ds.$$

Доказательство.

Обозначая через $z(t,x;u)=D^2[a(t,x)]u(t,x),\quad b(t,x)=-a(t,x),$ запишем уравнение (1) в виде:

$$D^2[b(t,x)]z(t,x;u)=\ f(t,x,u,I)). \tag{9}$$

Введем функцию

$$z_1(t,x;u)=D[b(t,x)]z(t,x;u). \tag{10}$$

Тогда уравнение (9) принимает вид:

$$D[b(t,x)]z_1(t,x;u)=\ f(t,x,u,I)). \tag{11}$$

Уравнение (11) с условиями (2), (3) с помощью МДА сводится к решению интегро-дифференциального уравнения

$$\begin{gathered}z_1(t,x;u)=\varphi_1(p(0,t,x))+\\ +\int_0^t f(s,p(s,t,x),u(s,p(s,t,x)),\int_{-\infty}^{\infty}K(s,p(s,t,x),\xi)u(s,\xi))d\xi)ds.\end{gathered}\tag{12}$$

В самом деле, дифференцируя (12), получаем (11).

$$D[b(t,x)]z_1(t,x;u)=\varphi_1'(p(0,t,x))D[b(t,x)]p(0,t,x)+$$
$$+\int_0^t\left[\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial I}\frac{\partial I}{\partial x}\right]D[b(t,x)]p(s,t,x))ds+\ f(t,x,u,I).$$

Из последнего равенства в силу (5) получаем (11). Полагая $t=0$ в (12), получаем $z_1(0,x;u)=\varphi_1(x).$

Если функция $z\ (t,x;u)$ –решение уравнения

$$z(t,x;u)=\varphi_0(p(0,t,x))+\varphi_1(p(0,t,x))t+$$
$$+\int_0^t (t-s)\,f(s,p(s,t,x),u(s,p(s,t,x)),\int_{-\infty}^{\infty} K(s,p(s,t,x),\xi)u(s,\xi))d\xi)ds, \qquad (13)$$

то она является решением задачи (12), (2), (3).

В самом деле, из (13)следует

$$D[b(t,x)]z(t,x;u)=[\varphi_0'(p(0,t,x))+\varphi_1'(p(0,t,x))t]D[b(t,x)]p(0,t,x)+$$
$$+\int_0^t (t-s)\left[\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial I}\frac{\partial I}{\partial x}\right]D\,[b(t,x)\,p(s,t,x))ds+z_1(t,x;u).$$

Следовательно, в силу (5) получаем справедливость (12).

Таким образом, введя функцию $z_1(t,x;u)$, из (9) вывели (13).

Обратно применяя 2 раза оператор $D[b(t,x)]$ для уравнения (13), получаем справедливость (9), (2), (3). Далее, введем еще следующее обозначение

$$\theta(t,x;u)=D[a(t,x)]u(t,x).$$

Тогда уравнение (13) принимает вид:

$$D[a(t,x)]\theta(t,x;u)=\sum_{k=0}^{1}\varphi_k(p(0,t,x))\frac{t^k}{k!}+\int_0^t (t-\tau)\times$$
$$\times f(\tau,p(\tau,t,x),u(\tau,p(\tau,t,x)),\int_{-\infty}^{\infty} K(\tau,p(\tau,t,x),\xi)u(\tau,\xi))d\xi)d\tau\,.$$

(14)

Задача (14), (2), (3) с помощью МДА сводится к решению ИУ

$$\theta(t,x;u)=\psi_1(q(0,t,x))+\int_0^t\sum_{k=0}^{1}\varphi_k(p(0,s,q(s,t,x))\frac{s^k}{k!}ds+$$
$$\int_0^t\int_0^s (s-\tau)f(\tau,p(\tau,s,q(s,t,x)),u(\tau,p(\tau,s,q(s,t,x))), \qquad (15)$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} K(\tau,p(\tau,s,q),\xi)u(\tau,\xi))d\xi)d\tau ds.$$

В самом деле, дифференцируя (15), получаем

$$D[a(t,x)]\theta(t,x;u)=\psi_1'(q)D[a(t.x)]q(0,t,x)+\int_0^t\sum_{k=0}^{1}\varphi_k'(p(0,s,q))\frac{\partial p}{\partial x}\times$$
$$\times D[a(t,x)]q(s,t,x)ds+\int_0^t\int_0^s (s-\tau)\left[\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial I}\frac{\partial I}{\partial x}\right]\frac{\partial p}{\partial x}\times$$

$$\times D[a(t,x)]q(s,t,x)d\tau ds+\sum_{k=0}^{1}\phi_k(p(0,t,x))\frac{t^k}{k!}+$$

$$+\int_0^t (t-\tau)f(\tau,p(\tau,t,x),u(\tau,p),\int_{-\infty}^{\infty}K(\tau,p(\tau,t,x),\xi)u(\tau,\xi))d\xi)d\tau.$$

В силу (6) доказано выполнение (13). Полагая $t=0$ в (15), получаем $\theta(0,x;u)=\psi_1(x).$

Если функция $u(t,x)$ – решение ИУ

$$u(t,x)=\psi_0(q(0,t,x))+t\psi_1(q(0,t,x))+\int_0^t(t-s)\sum_{k=0}^{1}\varphi_k(p(0,s.q(s,t,x)))\frac{s^k}{k!}ds+$$
$$+\int_0^t(t-s)\int_0^s(s-\tau)f(\tau,p(\tau,s,q(s,t,x)),u(\tau,p(\tau,s,q(s,t,x))),I)d\tau ds, \tag{16}$$

то она является решением задачи (15), (2), (3).

Дифференцируя (16) по t и по x, получаем (15).

$$D[a(t,x)]u(t,x)=[\psi_0'(q)+\psi_1'(q)t]D[a(t.x)]q(0,t,x)+$$

$$+\int_0^t(t-s)\sum_{k=0}^{1}\varphi_k'(p(s,t,q))\frac{\partial p}{\partial x}D[a(t,x)]q(s,t,x)+$$

$$+\int_0^t(t-s)\int_0^s(s-\tau)\left[\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial I}\frac{\partial I}{\partial x}\right]\frac{\partial p}{\partial x}D[a(t,x)]q(s,t,x)d\tau ds+\theta(t,x;u).$$

В силу (6) доказана справедливость (15).

В (16) при $t=0,\quad u(0,x)=\psi_0(x).$

Таким образом, введя функцию $\theta(t,x;u),$, из (13) вывели (16).

Обратно, последовательно применяя для уравнения (16) сначала 2 раза оператор $D[a]$, затем 2 раза оператор $D[-a]$, получаем справедливость (1), (2), (3).

Таким образом, по схеме применения МДА, приведенной в [1], задача (1), (2), (3) сводится к эквивалентному ИУ (16). Из (16) следует (8).

Лемма 2. ИУ (8) имеет единственное решение.

Доказательство. Введем обозначение

$$g(t,x)=\sum_{k=0}^{1}\psi_k(q(0,t,x))\frac{t^k}{k!}+\int_0^t(t-s)\sum_{k=0}^{1}\varphi_k(p(0,s,q(s,t,x))\frac{s^k}{k!}ds, \tag{17}$$

запишем уравнение (8) в виде оператора

$$u(t,x)=J(t,x;u)\equiv g(t,x)+\int_0^t(t-s)\int_0^s(s-\tau)\times$$
$$\times f\left(\tau,p(\tau,s,q),u(\tau,p(\tau,s,q)),\int_{-\infty}^{\infty}K(\tau,p(\tau,s,q),\xi)u(\tau,\xi)d\xi\right)d\tau ds. \tag{18}$$

Для уравнения (18) применяем принцип сжимающих отображений в пространстве $\overline{C}(G_2(T*))$.

Имеем:

$$|J(t,x;u_1)-J(t,x;u_2)|\le(L+N\gamma)\int_0^t(t-\nu)\int_0^{\nu}(\nu-\rho)d\rho d\nu\|u_1-u_2\|,$$

следовательно

$$\left\|J(u_1)-J(u_2)\right\|\le (L+N\gamma)\frac{t^4}{4!}\left\|u_1-u_2\right\|.$$

Отсюда следует, что при T^* таком, что $(L+N\gamma)\dfrac{T^{*4}}{4!}<1$, уравнение (19) имеет решение в $\overline{C}(G_2(T^*))$.

Пример. Пусть в уравнении (1) $a(t,x)=c-const,\ f(t,x,u,I)=f(t,x),$ т.е.

$$u_{tttt}(t,x)-2c^2u_{ttxx}(t,x)+c^4u_{xxxx}(t,x)=f(t,x). \tag{19}$$

Рассмотрим уравнение (19) с начальными условиями

$$u(0,x)=x^2,$$

$$u_t(0,x)=0,$$

$$u_{tt}(0,x)=x,$$

$$u_{ttt}(0,x)=0.$$

Запишем уравнение (19) в операторном виде:

$$D^2[-c]D^2[c]u(t,x)=f(t,x,u),$$

$$D[-c]D^2[c]u(t,x)\big|_{t=0}=[u_{ttt}+cu_{ttx}-c^2u_{txx}-c^3u_{xxx}]\big|_{t=0}=c=\varphi_1(x),$$

$$D^2[c]u(t,x)\big|_{t=0}=[u_{tt}+2cu_{tx}+c^2u_{xx}]\big|_{t=0}=x+2c^2=\varphi_0(x),$$

$$D[c]u(t,x)\big|_{t=0}=[u_t+cu_x]\big|_{t=0}=2xc=\psi_1(x),$$

$$u(0,x)=x^2=\psi_0(x).$$

Следовательно, из (8) получаем решение поставленной задачи в виде:

$$u(t,x)=\psi_0(q(0,t,x))+t\psi_1(q(0,t,x))+\int_0^t(t-s)\sum_{k=0}^{1}\varphi_k(p(0,s.q(s,t,x)))\frac{s^k}{k!}ds+$$

$$+\int_0^t(t-s)\int_0^s(s-\tau)f(\tau,p(\tau,s,q(s,t,x)))d\tau ds,$$

где $p(s,t,x)=x+c(t-s),\quad q(s,t,x)=x-c(t-s),\quad (s,t,x)\in Q_2(T).$

Литература

1. Аширбаева А.Ж. Решение нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка методом дополнительного аргумента. – Бишкек: Илим, 2013. – 134 с.
2. Аширбаева А.Ж. Решение нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных второго порядка гиперболического типа /Аширбаева А.Ж., Жолдошева Ч.Б. // Вестник ОшГУ, Серия естественных и медицинских наук. – 2012. – № 2. – Вып. 1. – С. 144–149.
3. Аширбаева А.Ж. Исследование решений интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка /Аширбаева А.Ж., Жолдошева Ч.Б. // Вестник ОшГУ, Серия естественных и медицинских наук. – 2012. – № 2. – Вып. 1. – С. 150–153.
4. Аширбаева А.Ж. Новый способ построения решений уравнений в частных производных четвертого порядка гиперболического типа / Аширбаева А.Ж., Мамазиаева Э.А. // Евразийское научное объединение. – 2019.– №2-1(48). – С.6-9.