УДК 517.928
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_1(4)_9

# РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО АРГУМЕНТА

*Ашырбаева Айжаркын Жоробековна, д.ф.-м.н., профессор*
*aijarkyn.osh@mail.ru*
*Бекиева Малика Раимжоновна, преподаватель*
*malikabekieva9@gmail.com*
*Ошский государственный университет*
*Ош, Кыргызстан*

***Аннотация***: *Применение метода дополнительного аргумента к системе уравнений в частных производных второго порядка является актуальным.Кыргызскими учеными рассмотрены применения этого метода к системе уравнений в частных производных первого порядка. В данной работе новым способом сначала система уравнений в частных производных второго порядка с начальными условиямиприводится к виду, удобному для использования метода дополнительного аргумента. Затем методом дополнительного аргумента начальная задача для системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка сводится к системе интегральных уравнений. Результаты работы можно использовать при решении систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.*

***Ключевые слова:*** *Метод дополнительного аргумента, система уравнений, второй порядок, частные производные, начальная задача, интегральное уравнение, сжатое отображение.*

# ЭКИНЧИ ТАРТИБИ ЖЕКЕЧЕ ТУУНДУЛУУ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕЛЕРДИН СИСТЕМАСЫН КОШУМЧА АРГУМЕНТ КИЙИРҮҮ УСУЛУ МЕНЕН ЧЫГАРУУ

*Ашырбаева Айжаркын Жоробековна, ф.-м.и.д., профессор,*
*aijarkyn.osh@mail.ru*
*Бекиева Малика Раимжоновна, окутуучу*
*malikabekieva9@gmail.com*
*Ош мамлекеттик университети*
*Ош, Кыргызстан*

***Аннотация:*** *Экинчи тартиптеги жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелер системасына кошумча аргумент кийирүү усулунколдонуу актуалдуу маселе. Кыргыз окумуштуулары бул усулду биринчи тартиптеги жекече туундулуудифференциалдык теңдемелердин системасына колдонууну карашкан. Бул эмгекте жаңы ыкма менен, биринчиден, баштапкы шарттары мененэкинчи тартиптеги жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелер системасы кошумча аргумент кийирүү усулунколдонуу үчүн ыңгайлуу формага келтирилген. Андан кийин кошумча аргумент кийирүү усулуменен экинчи тартиптеги жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелер системасы үчүн баштапкы маселе интегралдык теңдемелер системасына келтирилет. Иштин натыйжаларын экинчи даражадагы сызыктуу эмес жекече туундулуу дифференциалдык теңдемелердин системаларын чыгарууда колдонулушу мүмкүн.*

***Ачкыч сөздөр:*** *Кошумча аргумент кийирүү усулу, теңдемелер системасы, экинчи тартиптеги, жекече туундулар, баштапкы маселе, интегралдык теңдеме, кысып чагылтуу.*

# SOLUTION OF A SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS IN SECOND ORDER PARTIAL DERIVATIVES BY THE METHOD OF ADDITIONAL ARGUMENT

*Ashirbayeva Aizharkyn Zhorobekovna, Doctor of Ph. and Math. Sc., Professor*
*aijarkyn.osh@mail.ru*

*BekievaMalikaRaimjonovna, teacher*
*malikabekieva9@gmail.com*
*Osh State University*
*Osh, Kyrgyzstan*

***Abstract:*** *The application of the additional argument method to a system of partial differential equations of the second order is relevant. Kyrgyz scientists have considered applications of this method to a system of partial differential equations of the first order. In this paper, in a new way, first, the system of second-order partial differential equations with initial conditions is reduced to a form convenient for using the additional argument method. Then, by the method of an additional argument, the initial problem for the system of partial differential equations of the second order is reduced to a system of integral equations. The result soft he work can be used in solving systems of nonlinear partial differential equations of the second order.*

***Keywords:*** *Additional argument method, system of equations, second order, partial derivatives, initial problem, integral equation.*

Рассматривается система линейных уравнений в частных производных второго порядка вида:

$$\begin{cases} u_{tt} = k^2(t,x)u_{xx} + a_1(t,x)u + b_1(t,x)\omega \\ \omega_{tt} = k^2(t,x)\omega_{xx} + a_2(t,x)u + b_2(t,x)\omega \end{cases} \tag{1}$$

с начальными условиями

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0} = u_k(x), \quad k = 0,1, \quad x \in R. \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial^k \omega}{\partial t^k}\right|_{t=0} = \omega_k(x), \quad k = 0,1, \quad x \in R. \tag{3}$$

Используем пространства функций $\overline{C}^{(k)}(\Omega)$, $Q_m(T)$ из [1], где $k, m -$ натуральны е числа. .

Исследование решений различных классов систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с помощью МДА рассмотрены в работах [2-6].

Пустьзаданные функции:

$u_k(x), \omega_k(x) \in \overline{C}^{(2-k)}(R), (k = 0,1),\ a_i(t,x), b_i(t,x) \in \overline{C}^{(2)}(Q_1(T)).$

Решение следующих ИУ обозначим через $p(s,t,x), \quad q(s,t,x)$:

$$p(s,t,x) = x - \int_s^t k(\nu, p(\nu,t,x))d\nu, \tag{4}$$

$$q(s,t,x) = x + \int_s^t k(\nu, q(\nu,t,x))d\nu, \quad (s,t,x) \in Q_2(T). \tag{5}$$

Используем обозначения:

$$D[\omega] = \frac{\partial}{\partial t} + \omega \frac{\partial}{\partial x},$$

$$\vartheta_1(t,x) = D[-k(t,x)]u(t,x), \tag{6}$$

$$\vartheta_2(t,x) = D[-k(t,x)]\omega(t,x), \tag{7}$$

$$g(t,x)=\frac{-1}{k(t,x)}[k_t(t,x)+k(t,x)k_x(t,x)],$$

$$\beta(t,x)=D[k(t,x)]g(t,x).$$

**Лемма 1.** Задача (1)-(3) эквивалентна системе ИУ

$$\begin{aligned}\vartheta_1(t,x)=\frac{1}{2}\varphi_1(q(0,t,x))+\frac{1}{2}g(t,x)u-\frac{1}{2}\int_0^t g(s,q)\vartheta_1(s,q)ds-\\-\frac{1}{2}\int_0^t \beta(s,q)u(s,q)ds+\int_0^t a_1(s,q)u(s,q)ds+\int_0^t b_1(s,q)\omega(s,q)ds,\end{aligned}\tag{8}$$

$$\begin{aligned}\vartheta_2(t,x)=\frac{1}{2}\varphi_2(q(0,t,x))+\frac{1}{2}g(t,x)\omega-\frac{1}{2}\int_0^t g(s,q)\vartheta_2(s,q)ds-\\-\frac{1}{2}\int_0^t \beta(s,q)\omega(s,q)ds+\int_0^t a_2(s,q)u(s,q)ds+\int_0^t b_2(s,q)\omega(s,q)ds,\end{aligned}\tag{9}$$

где

$\left[2\vartheta_1(t,x)-g(t,x)u(t,x)\right]_{t=0}=\varphi_1(x)$,

$\left[2\vartheta_2(t,x)-g(t,x)\omega(t,x)\right]_{t=0}=\varphi_2(x)$.

**Доказательство**. Из (6), (7) методом дополнительного аргумента (МДА) соответственно получаем:

$$u(t,x)=u_0\big(p(0,t,x)\big)+\int_0^t \vartheta_1\big(s,p(s,t,x)\big)ds\,,\tag{10}$$

$$\omega(t,x)=\omega_0\big(p(0,t,x)\big)+\int_0^t \vartheta_2\big(s,p(s,t,x)\big)ds\tag{11}$$

Пусть $\vartheta_i(t,x),\ (t,x),\ \omega(t,x)\quad i=1{,}2$ - решение системыИУ (8)-(11).

Дифференцируя (8), имеем:

$$\vartheta_{1t}(t,x)+k(t,x)\vartheta_{1x}(t,x)=k(t,x)g(t,x)u_x(t,x)+a_1(t,x)u(t,x)+b_1(t,x)\omega(t,x)\tag{12}$$

Из (12) с учетом (6) получаем первое уравнение системы (1). Следовательно, дифференцируя (9) с учетом (7) получается второе уравнение системы (1).Тем самым мы доказали что система ИУ (8)-(11) удовлетворяет систему (1) и начальному условию (2).

Докажем обратное, что, решение задачи (1), (2) является решением системы ИУ (8)-(11). Для этого запишем систему уравнений (1) в виде

$$D[k(t,x)]z_1(t,x;u)=-g(t,x)\vartheta_1(t,x)-\beta(t,x)u+2a_1(t,x)u+2b_1(t,x)\omega,\tag{13}$$

$$D[k(t,x)]z_2(t,x;u)=-g(t,x)\vartheta_2(t,x)-\beta(t,x)\omega+2a_2(t,x)u+2b_2(t,x)\omega\tag{14}$$

где

$$z_1(t,x;u)=2\vartheta_1(t,x)-g(t,x)u(t,x),$$

$$z_2(t,x;u)=2\vartheta_2(t,x)-g(t,x)\omega(t,x).$$

Для решения задачи (13), (14) используя МДА, получаем системуИУ (8),(9).

В систему уравнений (8), (9) подставляя (10), (11), получаем систему ИУ относительно неизвестных функций $\vartheta_1(t,x),\ \vartheta_2(t,x)$ в операторном виде:

$$A\vartheta_1=\vartheta_1(t,x)=\frac{1}{2}\varphi_1(q(0,t,x))+\frac{1}{2}g(t,x)\left(u_0\left(p(0,t,x)\right)+\int_0^t\vartheta_1\left(s,p(s,t,x)\right)ds\right)-$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^t g(s,q)\vartheta_1(s,q)ds-\frac{1}{2}\int_0^t \beta(s,q)\left(u_0\left(p(0,s,q(s,t,x))\right)+\int_0^s\vartheta_1\left(\tau,p(\tau,s,q)\right)d\tau\right)ds+$$
$$+\int_0^t a_1(s,q)\left(u_0\left(p(0,s,q(s,t,x))\right)+\int_0^s\vartheta_1\left(\tau,p(\tau,s,q)\right)d\tau\right)ds+$$
$$+\int_0^t b_1(s,q)\left(\omega_0\left(p(0,s,q(s,t,x))\right)+\int_0^s\vartheta_2\left(\tau,p(\tau,s,q)\right)d\tau\right)ds, \qquad (15)$$

$$A\vartheta_2=\vartheta_2(t,x)=\frac{1}{2}\varphi_2(q(0,t,x))+\frac{1}{2}g(t,x)\left(\omega_0\left(p(0,t,x)\right)+\int_0^t\vartheta_2\left(s,p(s,t,x)\right)ds\right)-$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^t g(s,q)\vartheta_2(s,q)ds-\frac{1}{2}\int_0^t \beta(s,q)\left(\omega_0\left(p(0,s,q(s,t,x))\right)+\int_0^s\vartheta_2\left(\tau,p(\tau,s,q)\right)d\tau\right)ds+$$
$$+\int_0^t a_2(s,q)\left(u_0\left(p(0,s,q(s,t,x))\right)+\int_0^s\vartheta_1\left(\tau,p(\tau,s,q)\right)d\tau\right)ds+$$
$$+\int_0^t b_2(s,q)\left(\omega_0\left(p(0,s,q(s,t,x))\right)+\int_0^s\vartheta_2\left(\tau,p(\tau,s,q)\right)d\tau\right)ds. \qquad (16)$$

**Лемма 2.** Существует такое $T^*>0,$ что система ИУ (15), (16) имеет единственное решение в $\overline{C}(Q_1(T^*))$ .

**Доказательство.**

Покажем, что система ИУ (15), (16) имеет в области $Q_1(T)$ при $T<T_*$ единственное, непрерывное решение $\vartheta=(\vartheta_1,\vartheta_2)$, , удовлетворяющее неравенству

$$\|\vartheta-\phi\|\le M=const,\quad i=1,2,\quad \phi=(\phi_1,\phi_2),$$

$$\phi_1=\frac{1}{2}\varphi_1(q(0,t,x))+\frac{1}{2}g(t,x)u_0\left(p(0,t,x)\right)-\frac{1}{2}\int_0^t \beta(s,q)u_0\left(p(0,s,q(s,t,x))\right)ds+$$
$$+\int_0^t a_1(s,q)u_0\left(p(0,s,q(s,t,x))\right)ds+\int_0^t b_1(s,q)\omega_0\left(p(0,s,q(s,t,x))\right)ds,$$

$$\phi_2=\frac{1}{2}\varphi_2(q(0,t,x))+\frac{1}{2}g(t,x)\omega_0\left(p(0,t,x)\right)-\frac{1}{2}\int_0^t \beta(s,q)\omega_0\left(p(0,s,q(s,t,x))\right)ds+$$
$$+\int_0^t a_2(s,q)u_0\left(p(0,s,q(s,t,x))\right)ds+\int_0^t b_2(s,q)\omega_0\left(p(0,s,q(s,t,x))\right)ds.$$

Покажем, что при $T<T_*$ операторы $A_1,\ A_2$ являются операторами сжатия

$$\|A_i\vartheta-\phi_i\|\le\|g\|KT+(\|a_i\|+\|b_i\|+\frac{1}{2}\|\beta\|)K\frac{T^2}{2}=\Omega_i(T),\quad i=1,2,$$

где

$$\|\vartheta\|\le\|\phi\|+M=K.$$

Справедливы оценки:

$$\left\| A_i \vartheta^1 - A_i \vartheta^2 \right\| \le \theta_i(T) \left\| \vartheta^1 - \vartheta^2 \right\|, \quad i = 1,2,$$

где

$\theta_i(T) = \|g\| T + (\|a_i\| + \|b_i\| + \frac{1}{2}\|\beta\|)\frac{T^2}{2}, \quad i = 1,2.$ Обозначим через $T_i, i = 1,2,3,4$ – положительные корни уравнений $\Omega_i(T) = M$, $\theta_i(T) = 1, \quad i = 1,2.$

Отсюда следует, что оператор $A$ при $T < T^* = \min\{T_1, T_2, T_3, T_4\}$ осуществляет сжатое отображение. Тогдасистема уравнений (15), (16) определяет единственное решение и это решение может быть получено методом последовательных приближений.

## Литература


1. Аширбаева А.Ж. Решение нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высокого поря-дка методом дополнительного аргумента / А.Ж. Аширбаева. – Бишкек: Илим, 2013. – 134 с.
2. Иманалиев М.И. К теории систем нелинейных интегро-дифференци-альных уравнений в частных производных типа Уизема / М.И. Иманалиев, С.Н. Алексеенко // Доклады АН. – 1992. – Т. 325. – № 6. – С.1111–1115.
3. Аширбаева А.Ж.Решение системы интегро-дифференциальныхуравне-ний методом дополнительного аргумента / А.Ж. Аширбаева, Ж.И. Мамбетов // Вестник ОшГУ. Специальный выпуск – Ош, 2013. – № 1. –С. 91–94.
4. Аширбаева А.Ж. Метод дополнительного аргумента для системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со многими переменными / А.Ж. Аширбаева, Ж.И. Мамбетов // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. Биш-кек, 2017. –№5. – С. 87–90.
5. Садыкова Г. К. Исследование решения одной системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка / Г.К. Садыкова // Известия ВУЗов Кыргызстана. – Бишкек, 2019. – №11. – С.15-19.
6. Аширбаева А.Ж.Решение системы операторных уравнений в частных производных первого порядка / А.Ж. Аширбаева, Г.К. Садыкова // Евразийское научное объединение. – Москва, 2021.– № 11–1 (81). – С.1–5.