УДК 517.977.58
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_1(4)_8

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННОЙ ДИСКРЕТНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Аширбаев Бейшембек Ыбышевич, к.ф-м.н, доцент
Кыргызско-Российский Славянский Университет им. Б. Ельцина
ashirbaev-58@mail.ru
Алтымышова Жыргал Алымбековна, ст. преподаватель
Кыргызский Государственный Технический Университет им. И. Раззакова
jaltymyshova@gmail.com

Аннотация. *В статье исследуется линейная сингулярно-возмущенная дискретная задача оптимального программного управления с малым шагом. На основе совместного использования методов разделения движений и моментов предложен алгоритм построения равномерного нулевого асимптотического решения рассмотренной задачи. Алгоритм решения задачи построена для асимптотической линейной сингулярно-возмущенной дискретной системы, которая аппроксимирует эквивалентную систему, полученной при полном разделении переменных состояния исходной системы, и она состоит из двух подсистем низкого порядка, решения которых находится независимо, причем они связаны с управляющей функцией. Поправка к следующим приближениям не представляет трудности, так как все изложенные процедуры аналогично повторяются и для всех высших приближений.*

Ключевые слова: *линейные сингулярно-возмущенные дискретные системы с малым шагом, быстрые и медленные переменные, асимптотическая система, оптимальная траектория, оптимальное управление медленной и быстрой подсистемы, уравнения Риккати и Ляпунова, моментные соотношения.*

ДИСКРЕТТИК СИНГУЛЯРДЫК-КОЗГОЛГОН ОПТИМАЛДЫК ПРОГРАММАЛЫК БАШКАРУУ МАСЕЛЕСИНИН ЧЫГАРЫЛЫШЫНЫН АЛГОРИТМАСЫ

Аширбаев Бейшембек Ыбышевич, ф-м.и.к., доцент
Б. Ельцин атындагы Кыргыз-Россия Славян Университети
ashirbaev-58@mail.ru
Алтымышова Жыргал Алымбековна, ага окутуучу
И. Раззаков атындагы Кыргыз Мамлекеттик Техникалык Университети
jaltymyshova@gmail.com

Аннотация. *Макалада дискреттик майда кадам менен сызыктуу сингулярдык-козголгон оптималдык программалык башкаруу маселеси изилденди. Каралган маселенин бир калыпта асимптотикалык нөлдүк чыгарылышынын алгоритмасы кыймылды бөлүштүрүү жана моменттер методдорун биргеликте колдонуу менен сунушталды. Маселенин чыгарылышынын алгоритмасы изделип жаткан системанын абалдарынын өзгөрмөлөрүн толук бөлүү менен алынган эквиваленттик системага аппроксимацияланган асимптотикалык сингулярдык-козголгон дискреттик сызыктуу система үчүн түзүлдү жана ал система тартиби төмөн болгон, чыгарылыштары өз алдынча табылган жана бири бири менен башкаруу функциясы менен байланышып турган эки системанын алдындагы системалардан куралган. Кийинки жакындаштырууларды алуу татаал деле эмес, алынган жыйынтыктар кийинки чыгарылыштар үчүн аналогиялуу алынат.*

Ачкыч сөздөр: *майда кадам менен сызыктуу сингулярдык-козголгон дискреттик система, тез жана жай өзгөрмөлөр, асимптотикалык система, оптималдык траектория, жай жана тез системанын алдындагы системалардын оптималдык траекториялары, Риккати жана Ляпунов теңдемелери, моменттик катнаштар.*

ALGORITHM FOR SOLVING A SINGULARLY PERTURBED DISCRETE PROBLEM OF OPTIMAL PROGRAM CONTROL

Ashirbaev Beishembek Ybyshevich, Candidate of Ph. and Math. Sc., associate professor
ashirbaev-58@mail.ru
Kyrgyz-Russian Slavic University named after B. Yeltsin
Altymyshova Zhyrgal Alymbekovna, senior lecturer
jaltymyshova@gmail.com
Kyrgyz State Technical University named after I. Razzakov
Bishkek, Kyrgyzstan

Annotation. *The article investigates a linear singularly perturbed discrete problem of optimal programmed control with a small step. Based on the joint use of methods for separating motions and moments, an algorithm for constructing a uniform zero asymptotic solution of the considered problem is proposed. An algorithm for solving the problem is constructed for an asymptotic linear singularly perturbed discrete system that approximates the equivalent system obtained by completely separating the state variables of the original system and it consists of two low-order subsystems, the solutions of which are found independently, and they are associated with the control function. The correction to the next approximations is not difficult, since all the above procedures are similarly repeated for all higher approximations.*

Key words: *singularly perturbed small step discrete systems, fast and slow variables, asymptotic system, optimal trajectory, optimal control of slow and fast subsystems, Riccati and Lyapunov equations, moment relations.*

Введение. Работа посвящена построению асимптотических решений линейной сингулярно-возмущенной дискретной задачи оптимального управления. Задачи оптимизации сингулярно-возмущенных дискретных систем в различных постановках исследовались многими авторами.

В [1], [2] формальное асимптотическое разложение решения дискретной сингулярно-возмущенной линейно-квадратичной задачи с фиксированным левым концом и свободным правым построено с помощью асимптотического разложения решения системы, вытекающей из условий оптимальности управления. Во многих работах для построения решений задачи использовались «прямая схема» - метод построения асимптотического разложения решений задачи оптимального управления. В [3], [4], [5] прямая схема использовалась для дискретных задач оптимального управления с малым шагом. В [6] для дискретных слабоуправляемых систем и [7] дискретной периодической сингулярно-возмущенной линейно-квадратичной задачи. Дискретная задача о регуляторе состояния с малым шагом рассмотрена в [8], [9] путем построения асимптотики по малому шагу решения начальной задачи для соответствующего дискретного уравнения Риккати.

Данная работа является продолжением исследований теории сингулярно-возмущенной дискретной задачи оптимального управления. Такие исследования сохраняют свою актуальность и в настоящее время, так как многие задачи техники, экономики, биологии и других наук описываются дискретными моделями. Кроме того, дискретные задачи возникают при численной реализации непрерывных задач оптимального управления.

Постановка задачи. Пусть движения объекта управления описывается линейной сингулярно-возмущенной дискретной системы с малым шагом

$$y(t+T) = Ay(t) + Bu(t), \tag{1}$$

где $y(t) = \big(x(t)\; z(t)\big)'$, $x(t) \in R^n$, $z(t) \in R^m$ −векторы переменных состояния, $A(\mu)$, $B(\mu)$ − постоянные матрицы:

$$A(\mu) = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ \frac{1}{\mu}A_3 & \frac{1}{\mu}A_4 \end{pmatrix}, B(\mu) = \begin{pmatrix} B_1 \\ \frac{1}{\mu}B_2 \end{pmatrix},$$

$A_1(t) - (n \times n), A_2(t) - (n \times m), A_3(t) - (m \times n), A_4(t) - (m \times m),$

$B_1(t) - (n \times r), B_2(t) - (m \times r), u(t) \in R^r$ −вектор управления,

t −время переходного процесса:

$t \in \Sigma_T = \{t\colon\ t = kT,\ \ k = 0,\ 1, \cdots, M-1\} \subset \{t\colon 0 \le t \le 1\}$,

T −малый шаг, $T = 1/M$, μ −малый параметр, $0 < \mu < 1$, штрих обозначает транспонирование.

Систему (1) перепишем в виде:

$$x(t+T) = A_1x(t) + A_2z(t) + B_1u(t), \tag{2}$$

$$\mu z(t+T) = A_3x(t) + A_4z(t) + B_2u(t).$$

Заданы начальные и конечные состояния системы (2):

$$y(t_0) = y_0 = \big(x(t_0)\ \ z(t_0)\big)' = \big(x(0)\ \ z(0)\big)' = (x_0\ \ z_0)' \tag{3}$$

$$y(t_1) = y_1 = \big(x(t_1)\ \ z(t_1)\big)' = \big(x(MT)\ \ z(MT)\big)' = (x_1, z_1)'. \tag{4}$$

Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J = \sum_{i=0}^{M-1} u'(iT)u(iT) \tag{5}$$

при ограничениях (2) – (4).

Предположим, что

I. Собственные значения матрицы A_4 удовлетворяют неравенству

$|Re\lambda_j| \le \gamma < 1,\ \ j = \overline{1,m},$ где $\gamma -$ некоторая постоянная.

При условии I как показано в [10] систему (2) можно заменить эквивалентной системой, у которой разделены медленные $x(t)$ и быстрые $z(t)$ составляющие вектора состояния:

$$\tilde{x}(t+T) = \tilde{A}_1(\mu)\tilde{x}(t) + \tilde{B}_1(\mu)u(t), \tag{6}$$

$$\mu\tilde{z}(t+T) = \tilde{A}_4(\mu)\tilde{z}(t) + \tilde{B}_2(\mu)u(t) \tag{7}$$

где

$$\tilde{x}(t,\mu) = x(t,\mu) + \mu N(\mu)\tilde{z}(t,\mu), \qquad \tilde{z}(t,\mu) = z(t,\mu) - H(\mu)x(t,\mu), \tag{8}$$

$\tilde{A}_1(\mu) = A_1 + A_2H(\mu), \quad \tilde{A}_4(\mu) = A_4 - \mu H(\mu)A_2,$

$\tilde{B}_1(\mu) = B_1 + N(\mu)\tilde{B}_2(\mu), \quad \tilde{B}_2(\mu) = B_2(\mu) - \mu H(\mu)B_1,$

Матрицы $\boldsymbol{H(\mu)}$ и $\boldsymbol{N(\mu)}$ соответственно удовлетворяют следующим матричным уравнениям Риккати и Ляпунова:

$$\boldsymbol{\mu H(\mu)A_1 + \mu H(\mu)A_2H(\mu) = A_3 + A_4H(\mu)}, \tag{9}$$

$$\mu\tilde{A}_1N(\mu) - N(\mu)\tilde{A}_4 - A_2 = 0. \tag{10}$$

Уравнения (9), (10) имеют решения, которые могут быть представлены в виде равномерно сходящихся степенных рядов [10], [11]:

$$H(\mu) = \sum_{i=0}^{\infty} H_i\mu^i, \quad N(\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} N_k\mu^k. \tag{11}$$

Матрицы H_i и N_k $(i,k = 0,1,\cdots)$ определяются путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях μ в уравнениях (9), (10):

$$H_0 = -A_4^{-1}A_3, H_1 = A_4^{-1}(H_0A_1 + H_0A_2H_0), \tag{12}$$

$$H_i = A_4^{-1}\big(H_{i-1}A_1 + \textstyle\sum_{j=0}^{i-1} H_jA_2H_{v-1}\big),\ i = 2,\cdots, v = i, i-1, i-2,\cdots.$$

$$N_0 = -A_2A_4^{-1},\ N_1 = (A_1N_0 + A_2H_0N_0 + N_0H_0A_2)A_4^{-1},$$

$$N_k = \big[A_1N_{k-1} + A_2\big(\textstyle\sum_{j=0}^{k-1} H_jN_{s-1}\big) + \big(\sum_{j=0}^{k-1} N_jH_{s-1}\big)A_2\big]A_4^{-1},$$

$$k = 2,\cdots, s = i, i-1, i-2,\cdots.$$

Граничные условия системы (6) и (7) определяются соотношениями:

$$\tilde{x}(t_0) = \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0, \ \ \tilde{z}(t_0) = \tilde{z}(0) = \tilde{z}_0, \qquad (13)$$

$$\tilde{x}(t_1) = \tilde{x}(MT) = \tilde{x}_1, \ \ \tilde{z}(t_1) = \tilde{z}(MT) = \tilde{z}_1, \qquad (14)$$

где

$$\tilde{x}_0(\mu) = x_0 + \mu N_0 \tilde{z}_0, \ \tilde{z}_0 = z_0 - H_0 x_0, \qquad (15)$$

$$\tilde{x}_1(\mu) = x_1 + \mu N_M \tilde{z}_1, \qquad \tilde{z}_1 = z_1 - H_M x_1.$$

Теперь задачу (2) – (5) сформулируем в форме: среди всех допустимых управлений требуется найти управление $u^*(t,\mu)$ доставляющие минимум функционалу (5) при ограничениях (6) - (15).

Решение задачи

Наряду с задачей (5), (6) - (15) рассмотрим предельную задачу получающиеся из (2) при $\mu \to 0$:

$$\bar{x}(t+T) = A_0\bar{x}(t) + B_0\bar{u}(\dot{t}), \ \ \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0, \ \ \bar{x}(t_1) = \bar{x}_1, \qquad (16)$$

$$\bar{z}(t) = -A_4^{-1}A_3\bar{x}(t) - A_4^{-1}B_2\bar{u}(t),$$

где

$$A_0 = A_1 - A_2A_4^{-1}A_3, \ B_0 = B_1 - A_2A_4^{-1}B_2. \qquad (17)$$

Задача 1. Среди всех допустимых управлений требуется найти управление $u^*(t,\mu) = \bar{u}(t)$ доставляющие минимум функционалу

$$J_0 = \sum_{i=0}^{M-1} \bar{u}'(iT)\bar{u}(iT) \qquad (18)$$

при ограничениях (16), (17).

Поведение системы (2) или (6), (7) в окрестности граничных точек существенно отличается от поведения системы (16). В связи с этим рассмотрим систему

$$\bar{x}(t+T) = A_0\bar{x}(t) + B_0\bar{u}(t), \qquad (19)$$

$$\mu\tilde{z}(t+T) = A_4\tilde{z}(t,\mu) + B_2u(t,\mu). \qquad (20)$$

Система (19), (20) аппроксимирует систему (6), (7) с точностью порядка μ т.е., является асимптотической системой с точностью $O(\mu)$ и получается из (6), (7) при следующих приближениях:

$$H \approx H_0 = -A_4^{-1}A_3, \ N \approx N_0 = -A_2A_4^{-1}, \qquad (21)$$

$$\tilde{A}_1 = A_0 = A_1 - A_2A_4^{-1}A_3, \ \tilde{A}_4 \approx A_4,$$

$$\tilde{B}_1 \approx B_0 = B_1 - A_2A_4^{-1}B_2, \tilde{B}_2 \approx B_2, \tilde{z}(\mathrm{t}) = \bar{z}(\mathrm{t}) + A_4^{-1}A_3\bar{x}(\mathrm{t}).$$

Граничные условия системы (19), (20) определяются соотношениями:

$$\bar{x}(t_0) = \bar{x}(0) = \bar{x}_0, \ \ \tilde{z}(t_0) = \tilde{z}(0) = \tilde{z}_0, \ \tilde{z}_0 = z_0 - H_0x_0, \qquad (22)$$

$$\bar{x}(t_1) = \bar{x}(MT) = \bar{x}_1, \ \tilde{z}(t_1) = \tilde{z}(MT) = \tilde{z}_1, \ \tilde{z}_1 = z_1 - H_Mx_1. \qquad (23)$$

Системы (16) и (19), (20) отличаются только вторыми уравнениями. Начальное решение задачи (5), (6) - (15) построим для системы (19), (20).

Задача 2. Среди всех допустимых управлений требуется найти управление $u^*(t,\mu)$ доставляющие минимум функционалу (5) при ограничениях (19) - (23).

Пусть система (19), (20) вполне управляема, т.е., выполняются условия [12]:

II. $rank(B_0 \ \ A_0 \cdot B_0 \cdots A_0^{n-1} \cdot B_0) = n.$

III. $rank(B_2 \ \ A_4 \cdot B_2 \cdots A_4^{m-1} \cdot B_2) = m.$

Решения задачи (19), (20), (22) можно представить в виде

$$\bar{x}(kT) = A_0^k\bar{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A_0^{k-i-1}B_0\bar{u}(iT), \qquad (24)$$

$$\tilde{z}(kT) = \mu^{-k}A_4^k\tilde{z}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \mu^{-k+i}A_4^{k-i-1} B_2u(iT). \qquad (25)$$

где $A_0^k, \ A_4^k$ −переходные матрицы однородных систем:

$$\bar{x}(t+T) = A_0\bar{x}(t), \tag{26}$$
$$\mu\tilde{z}(t+T) = A_4\tilde{z}(t,\mu).$$

При условиях II и III оптимальное управление задачи 2 будем искать в виде

$$u_0^*(t,\mu) = \begin{cases} \bar{u}(t), & t_0 \le t \le t_1, \\ V(S), & 0 \le S \le S_1 < +\infty, \end{cases} \tag{27}$$

где $S = \frac{t-t_0}{\mu}$, $S_1 = \frac{t_1-t_0}{\mu}$.

Согласно теории проблемы моментов в силу соотношения (23) ограничение $\bar{x}(t_1) = \bar{x}_1$ для медленной подсистемы (19) приводит к тому, что искомое оптимальное управление $u_0^*(t,\mu) = \bar{u}(t)$ должно удовлетворять условию [13], [14]

$$\sum_{i=0}^{M-1} A_0^{M-i-1} B_0\bar{u}(iT) = \bar{\alpha}_1 \tag{28}$$

где $\bar{\alpha}_1 = \bar{x}_1 - A_0^M\bar{x}_0$.

Из (28) следует, что удовлетворяющее моментному соотношению (28) и доставляющее минимум функционалу (5) оптимальное управление $\bar{u}(t)$ равна [13], [14]:

$$\bar{u}(kT) = B_0'\left(A_0^{k-i-1}\right)'\bar{W}^{-1}(kT)(\bar{x}_1 - A_0^M\bar{x}_0), \tag{29}$$

где

$$\bar{W}(kT) = \sum_{i=0}^{k-1} A_0^{k-i-1} B_0 B_0'\left(A_0^{k-i-1}\right)'. \tag{30}$$

Тогда оптимальные траектории задачи 1, соответствующее оптимальному управлению (29) определяются соотношениями:

$$\bar{x}(kT) = A_0^k\bar{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} A_0^{k-i-1} B_0\bar{u}(iT), \tag{31}$$

$$\tilde{z}^*(kT) = -A_4^{-1}B_2\bar{u}(kT), \tag{32}$$

где $\tilde{z}^*(kT) = \bar{z}(kT) + A_4^{-1}A_3\bar{x}(kT)$.

При $t = t_0$ и $t = t_1$ из (32) получаем:

$$\tilde{z}^*(t_0) = -A_4^{-1}B_2\bar{u}(t_0), \qquad \tilde{z}^*(t_1) = -A_4^{-1}B_2\bar{u}(t_1). \tag{33}$$

Из теории сингулярных возмущений [15] следует, что оптимальная траектория соответствующее оптимальному управлению (29) определяются из разности векторов $\tilde{z}(t) - \tilde{z}^*(t)$. Этот разность с учетом (32) и (33) записывается в виде:

$$\tilde{z}(\mathrm{kT}) = \mu^{-k}A_4^k\left(\tilde{z}_0 + A_4^{-1}(t_0)B_2(t_0)\bar{u}(t_0)\right) + \sum_{i=0}^{k-1} \mu^{-k+i}A_4^{k-i-1}\, B_2u(iT) - A_4^{-1}B_2\bar{u}(kT). \tag{34}$$

Оптимальное управление $u_0^*(t,\mu) = \bar{u}(t)$, имеющее минимальную норму и переводящее медленную подсистему (19) из начального состояния $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$ в конечное состояние $\bar{x}(t_1) = \bar{x}_1$ известно. Переходим к построению оптимального управления $u_0^*(t,\mu) = V(S)$ и соответствующую оптимальную траекторию $\tilde{z}_0(\mathrm{t},\mu)$ быстрой подсистемы (20).

Функционал (5) с учетом (27) записывается в виде

$$\sum_{i=0}^{\infty} V'(iT)V(iT) \to min. \tag{35}$$

Тогда при $t = t_1$ из (34) с учетом (27) и (35) имеем

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mu^{-M+i}A_4^{k-i-1}\, B_2V\left(\frac{iT-t_0}{\mu}\right) = \alpha_2, \tag{36}$$

где

$$\alpha_2 = \tilde{z}_1 - \mu^{-M}A_4^k\left(\tilde{z}_0 + A_4^{-1}B_2\bar{u}(t_0)\right) + A_4^{-1}B_2\bar{u}(MT). \tag{37}$$

Решение задачи (35), (36) согласно проблемы моментов [13], [14] записывается в виде

$$V(kT) = B_2'\left(A_4^{M-k-1}\right)'\mathrm{Q}^{-1}\alpha_2, \tag{38}$$

где

$$Q(M,\mu) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^{-M+i} A_4^{M-i-1}\, B_2 B_2' \left(A_4^{M-i-1}\right)'. \qquad (39)$$

Управление $u_0^*(t,\mu) = V(kT)$ переводит быструю подсистему (20) из начального состояния $\tilde{z}(t_0) = \tilde{z}_0$ в конечное состояние $\tilde{z}(t_1) = \tilde{z}_1$, имеет минимальную норму и при $\mu \to 0$ стремится к нулю. Оптимальная траектория $\tilde{z}_0(t,\mu)$ соответствующая оптимальному управлению (38) определяется из (34). С учетом (37) - (39) $\tilde{z}_0(t,\mu)$ равна:

$$\tilde{z}_0(kT,\mu) = \mu^{-k} A_4^k \left(\tilde{z}_0 + A_4^{-1}(t_0) B_2(t_0) \bar{u}(t_0)\right) +$$
$$+ \sum_{i=0}^{k-1} \mu^{-k+i} A_4^{k-i-1}\, B_2 B_2' \left(A_4^{M-k-1}\right)' Q^{-1} \alpha_2 + A_4^{-1} B_2 \bar{u}(kT). \qquad (40)$$

Оптимальная траектория $\tilde{z}_0(t,\mu)$ удовлетворяет всем граничным условиям (22), (23) и для нее имеет место предельное соотношение

$$\lim_{\mu\to 0} \tilde{z}_0(t,\mu) = \tilde{z}_0 + A_4^{-1} B_2 \bar{u}(t_0) - A_4^{-1} B_2 \bar{u}(t). \qquad (41)$$

Следует заметить, что быстрая подсистема (20) рассматривается на большом промежутке времени, т.е. коэффициенты этой подсистемы считаются медленно меняющимся функциями [16].

Оптимальная траектория $\tilde{z}_0(t,\mu)$ выходя из начальной точки направляется к траектории $\bar{x}(t)$ (31) и в течении достаточно долгого времени находится вблизи этой линии (при достаточно малых μ), и уходит с неё через точки переключения для достижения заданного конечного состояния. Точкой переключения является точка пересечения графиков функции $\tilde{z}_0(t,\mu)$ (40) выходящей из начальной и конечной точки.

Алгоритм решений задачи. В результате имеем следующий алгоритм решений задачи 1: 1) выбор данных системы (2): $A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, x_0, x_M, z_0, z_M, T, M$, и μ;

2) проверка условий I, если условие I выполняется, то переход осуществляется к пункту 3, в противном случае заново вводится новые данные системы (2);

3) по формулам (17) формируются матрицы A_0, B_0 и проверяется условия II и III, если эти условия выполняются, то переход осуществляется к пункту 4, в противном случае заново вводится новые данные системы (2);

4) в результате вычислений по формулам (29) – (31) имеем решения предельной задачи 1: $\bar{u}(kT)$, $\overline{W}(kT)$, $\bar{x}(kT)$;

5) в результате вычислений по формулам (38) – (40) получаем решения задачи 2 для быстрой подсистемы (20): $V(kT)$, $Q(M,\mu)$, $\tilde{z}(kT,\mu)$;

6) по результатам вычислений пункта 4 и 5 представляем графически функций: $\bar{x}(kT)$, $\tilde{z}(kT,\mu)$ выходящей из начальной и конечной точки: $\tilde{z}_0 = z_0 - H_0 x_0$, $\tilde{z}_1 = z_1 - H_M x_1$.

Заключение. В данной работе предложен асимптотический способ решения линейной сингулярно-возмущенной дискретной задачи оптимального управления с малым шагом. Для данной задачи предложен эффективный алгоритм нулевого равномерного асимптотического приближенного решения на основе совместного использования методов разделения движений и проблемы моментов. Поправка к следующему приближению не представляет трудности, так как алгоритм решений для системы (19), (20) аналогично повторяются.

Литература

1. Naidu D.S. Singular perturbation analysis of discrete control systems /D. S. Naidu, A. K. Rao. Lect. Notes Math, 1985. V. P. 1154.

2. Naidu D.S. Singular Perturbation Methodology in Control Systems /D. S. Naidu. - IEE control engineering

series, 1988. P. 34.

3. Гаипов М. А. Асимптотика решения нелинейной дискретной задачи оптимального управления с малым шагом без ограничений на управление (формализм) I /М. А. Гаипов. - Известия АН ТССР. Сер. ФТХ и ГН, 1990. — №1. — С. 9—16.

4. Глизер В. Я. Асимтотика решения некоторых дискретных задач оптимального управления с малым шагом /В.Я. Глизер, М.Г. Дмитриев. – Дифференц. уравнения. Т. 15, №9, 1979. – С.1681 – 1691.

5. Глизер В. Я. Об одной разностной задаче оптимального управления с малым шагом /В.Я. Глизер, – Дифференц. уравнения. Т. 21, №8, 1985. – С.1440 – 1442.

6. Курина Г. А. Асимптотика решения задач оптимального управления для дискретных слабо управляемых систем /Г. А. Курина. - Прикладная математика и механика, 2002. — Т. 66, вып. 2. — С. 214—227.

7. Kurina G.A. Asymptotic Solution of Discrete Periodic Singularly Perturbed Linear-Quadratic Problem /G. A. Kurina, N. V. Nekrasova //IFAC Generalized solution in control problem. — Pereslavl-Zalessky, 2004. — Elsevier Science Ltd. Oxford, 2004. — P. 169—175.

8. Глизер В. Я. Решение некоторых задач аналитического конструирования реулятора методом пограничного слоя.

/В.Я. Глизер, М.Г. Дмитриев. - Дифференц. уравнения и их приложения. - Днепропетровск, 1975, 3. - С. 63-70.

9. Глизер В. Я. Асимптотика решения некоторых дискретных задач оптимального управления с малым шагом /В.Я. Глизер, М.Г. Дмитриев. - Дифференц.уравнения,1979,15, №9. - С. 1681—1691.

10. Аширбаев Б.Ы., Алтымышова А.А. Декомпозиция линейной сингулярно-возмущенной дискретной управляемой системы с малым шагом

/Б.Ы. Аширбаев, А.А. Алтымышова. - Вестник КГУСТА № 2 (76), Бишкек, 2022. Том 1. – С.502-509.

11. Стрыгин В. В. Разделение движений методом интегральных многообразий /В.В. Стрыгин, В.А. Соболев. - Москва: Наука, 1988. - 256 с.

12. Kokotovic P.V. Controllability and time-optimal control of systems With slow and fast models /P.V. Kokotovic, A.H. Haddad. – Institute of Electrikal and Electronie Engineers. Trans. Automat. Control, 1975. 20. – No.1. – P. 111 – 113.

13. Красовский Н. Н. Теория управления движением /Н. Н. Красовский. - Москва: Наука, 1968.- 476 с.

14. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами /Ю.Н. Андреев. – Москва: Наука ,1976. – 424 с.

15. Васильева А.Б. Асимптотические разложение решений сингулярно возмущенных уравнений /А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. – Главная редакция физико-математической литературы. Москва: Наука, 1973. – 272 с.

16. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики /Н.Н. Моисеев. - Москва: Наука, 1981. – 400 с.