УДК 517.956
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_1(4)_7

ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Артыков Аамат Жакышович, к.ф.-м.н., доцент
aamat62@mail.ru
Зулпукаров Жакшылык Алибаевич, к.ф.-м.н., доцент
zulpukarov66@mail.ru
Ошский технологический университет
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *В работе исследован что, если функция* $f(t,x,u,\varepsilon)$ *аналитическая ффункция по аргументам* $u,\varepsilon,$ *то применяя вычетный метод показана что, при* $\alpha>1$ *n-мерный вектор C имеет малое решение. Тогда задача (1) либо имеет единственное периодическое решение, либо множество периодических решений с периодом* 2π *по t разлагающихся по целым и дробным степеням параметра* ε *.*
Ключевые слова: *нелинейных диффереципльных уравнений в частных производных второго порядка, аналитическая функция, периодическое решение.*

ЭКИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ЖЕКЕ ТУУНДУЛУ СЫЗЫКТУУ ЭМЕС ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН СИСТЕМАСЫНЫН МЕЗГИЛДҮҮ ЧЫГАРЫЛЫШТАРЫ

Артыков Аамат Жакышович, ф-м. и. к., доцент
Ош технологиялык университети
aamat62@mail.ru
Зулпукаров Жакшылык Алибаевич, ф-м. и. к., доцент
zulpukarov66@mail.ru
Ош технологиялык университети
Ош, Кыргызстан

Аннотация: *Илимий иште изилденген, эгерде* $f(t,x,u,\varepsilon)$ *функциясы* $u,\varepsilon,$ *аргументтери боюнча аналитикалык функция болсо, вычет методун колдонуп көрсөтүлдү,* $\alpha>1$ *болгон учурда n-өлчөмдү вектор C кичинекей чыгарылышка ээ болот. Ошондуктан берилген (1) маселе t аргументи боюнча* 2π *мезгилге ээ болгон жана* ε *параметри боюнча бүтүн жана бөлчөктүү даражалуу ажыратылган жалгыз мезгилдүү чыгарылышка, же чексиз мегилдүү чыгарылыштарга ээ болот.*
Орунтуу сөздөр: *экинчи тартиптеги жеке туундулуу сызыктуу эмес дифференциалдык теңдемелер, аналитикалык функция, мезгилдүү чыгарылыш.*

BRANCHING OF PERIODIC SOLUTIONS TO SYSTEMS OF NONLINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Artykov Aamat Zhakyshovich, can.ph.math.sc.docent
aamat62@mail.ru
Zulpukarov Zhakshylyk Alibaevich, cand.ph.math sc., docent
zulpukarov66@mail.ru
Osh technological university
Osh, Kyrgyzstan

Abstract: *In this work, it was investigated that if the function $f(t,x,u,\varepsilon)$ is analytical in terms of the arguments u,ε,, then using the residue method it is shown that, for α >1, the unknown n-dimensional vector C has a small solution. Then the problem (1) either has a unique periodic solution, since the set of periodic solutions with period 2π in t expands in integer and fractional powers of the parameter ε.*
Key words: *nonlinear partial differential equations of the second order, analytic function, periodic solution*

Рассмотрим систем0у уравнений в частных производных второго порядка

$$\begin{aligned} &u_{tt}-u_{xx}=f(x,t,u,\varepsilon) \\ &u(0,t)=0,\quad u_x(0,t)=\mu(t), \end{aligned} \tag{1}$$

где $f(x,t,u,\varepsilon)$ - n-мерная вектор-функция, непрерывные совокупности аргументов, 2π - периодические по аргументу t, $\mu(t)$ – n-мерная вектор –функция, причем $\mu(t+2\pi)=\mu(t)$. Подстановкой $u=C+V(x,t)$ где С-произвольная постоянная,n -мерный вектор, тогда из (1) имеем

$$\begin{aligned} &v_{tt}-v_{xx}=f(x,t,C+v(x,t),\varepsilon), \\ &v(0,t)=0,\quad v_x(0,t)=\mu(t,x). \end{aligned} \tag{2}$$

Теорема. Пусть функция $f(x,t,C+V,\varepsilon)$ определена в область $D=\left\{0\le x\le\pi,\, t\in R, |v|\angle 1, 0\angle\varepsilon\angle\varepsilon_0\right\}$ непрерывна по (x,t), 2π-периодическая по переменной t и $f(x,t,C+v,\varepsilon)\in Lip_v(K_0,D)$ $(0\angle K_0=const)$, и для каждой нечетной функции $v(x,t)$ по переменной t, функция $f(x,t,C+V,\varepsilon)$ – нечетная по переменной t. Тогда для каждой непрерывной нечетной и 2π-периодической функции $\mu(t)$, ,удовлетворяющей уравнению

$$v(\pi,\pi)=\int_0^{2\pi}v(0,s)ds-\int_0^{\pi}ds\int_s^{2\pi-s}f(s,\tau,C+v(s,\tau),\varepsilon)d\tau=\phi(C,\varepsilon)=0\,, \tag{3}$$

задача (2) при достаточно малых ε имеет единственное периодическое решение $v(x,t)$ непрерывно зависящее от одного произвольного вектора С и параметра ε.

Доказательство.

Доказательство проведено для случая $v_x(0,t)=0$.

Для того, чтобы задача (1) имела периодическое решение $u(x,t)$, достаточно определить вектор С.

Вернемся к (3). Пусть вектор-функция $f(x,t,u,\varepsilon)$ аналитичны по u, ε в окрестности точки u=0, ε=0, $f(x,t,0,0)=0$. Разлагаем функцию $\phi(C,\varepsilon)$ в ряд Тейлора по степеням С:

$$\phi(C,\varepsilon)=\phi_0(\varepsilon)+\phi_1(\varepsilon)C+\phi_2(\varepsilon)C^2+...+\phi_n(\varepsilon)C^n+...\quad, \tag{4}$$

где $\phi_n(\varepsilon)=\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{\partial^n\phi(0,\varepsilon)}{\partial C^n}$,

$$\phi_0(\varepsilon)=\int_0^{\pi}ds\int_s^{2\pi-s}f(s,\tau,v(s,\tau,0),\varepsilon)d\tau\,,$$

$$\phi_C^{!}(0,\varepsilon)=\int_0^{\pi}ds\int_s^{2\pi-s}f_u(s,\tau,v(s,\tau,0),\varepsilon)(1+v_C(s,\tau,0))d\tau\,,$$

$$\phi_C^{!!}(0,\varepsilon)=\int_0^{\pi}ds\int_s^{2\pi-s}(f_{uu}(s,\tau,v(s,\tau,0),\varepsilon)(1+v_C(s,\tau,0))^2+f_u(s,\tau,0)v_{CC}(s,\tau,0))d\tau$$

$\phi_0(\varepsilon) - N\times 1$-вектор, $\phi_1(\varepsilon) - N\times N$ -матрицы, $\phi_n(\varepsilon) - n -$ линейные формы в Евклидовом пространстве E_N, причем $\phi_n(\varepsilon)$ в свою очередь аналитичны по ε, в частности,

$$\phi_1(\varepsilon) = T(0) + \varepsilon T_1(0) + \varepsilon^2 T_2(0) + ... + \varepsilon^n T_n(0) + ... = T_0 + \varepsilon T_1 + \varepsilon^2 \tilde{\psi} \quad (5)$$

С учетом обозначений (4),(5) уравнение (3) перепишим в виде

$$(T_0 + \varepsilon T_1)C = \phi_0(\varepsilon) + \varepsilon^2 \tilde{\psi}_1(\varepsilon)C + \phi_2(\varepsilon)C^2 + ... + \phi_n(\varepsilon)C^n + ... \quad (6)$$

Теперь применяем вычетный метод в [2],[3] для системы (6).

В данном статьи изложение ведется для случая $\kappa_0 = 1$.

Воздействуя на обе части (6) оператором (матрицей) $\dfrac{H(\varepsilon)}{\varepsilon}$, получим

$$\Delta_0(\varepsilon)C = \varepsilon^{-1}H(\varepsilon)\phi_0(\varepsilon) + \varepsilon H(\varepsilon)\tilde{\psi}_1(\varepsilon) \ + \varepsilon^{-1}H(\varepsilon)\phi_2(\varepsilon)C^2 + ... \quad (7)$$

где

$$(T_0 + \varepsilon T_1)^{-1} = \frac{H(\varepsilon)}{\Delta(\varepsilon)} = \frac{H(\varepsilon)}{\varepsilon\Delta_0(\varepsilon)} \quad , H(0) \neq 0, \Delta(\varepsilon) = \det(T_0 + \varepsilon T_1) \neq 0, \quad \kappa_0 = 1,$$

$$\det T_0 = 0, \quad \Delta(\varepsilon) = \varepsilon^{\kappa_0}\Delta_0(\varepsilon), \quad \Delta_0(0) \neq 0.$$

Дале поступим так,

$$C = C(\varepsilon) = \varepsilon^{\alpha} y(\varepsilon) = \varepsilon^{\alpha} y(0) + 0(\varepsilon^{\alpha}) \quad , \quad \alpha > 0, \quad (8)$$

произвольно фиксированное малое решение (6).

Подставив (8) в (7) и разделив обе части полученного тождества на ε^{α}, получим

$$\Delta_0(\varepsilon)y(\varepsilon) = \varepsilon^{-(\alpha+1)}H(\varepsilon)\phi_0(\varepsilon) + \varepsilon H(\varepsilon)\tilde{\psi}_1(\varepsilon)y(\varepsilon) + \varepsilon^{\alpha-1}H(\varepsilon)\phi_2(\varepsilon)y^2(\varepsilon) + ... \quad (9)$$

Выводы о существовании малых решений делаются на основе анализа (9), как это делается в [1].

Если $\alpha > 1$, то имеем

$$\Delta_0(0)y\ (0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-(\alpha+1)}H(\varepsilon)\phi_0(\varepsilon), \quad \alpha > 1,$$

Из [1] известно, что в случае $\Delta^{\mathrm{I}}(0) \neq 0$ для существования у уравнения (6) малого решения с некоторым $\alpha > 1$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$b_i = \frac{1}{i}\left[H(\varepsilon)\phi_0(\varepsilon)\right]^{(i)}_{\varepsilon=0} = 0, \quad i = 0,1,2. \quad (10)$$

α -определяется из условий $b_i = 0, \quad i = 0, \alpha, \quad b_{\alpha+1} \neq 0$.

Отсюда определяется произвольный вектор С.

Таким образом доказана следующая

Теорема. Если вектор-функция $f(x,t,u,\varepsilon)$ аналитичны по u, ε. Тогда задача (1) либо имеет единственное периодическое решение, либо множество периодических решений с периодом 2π по t разлагающихся по целым и дробным степеням параметра ε.

Литература

1. Боташев А.И. Периодические решения интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра // Москва:Изд-во МФТИ, 1998. – 90 с.
2. Боташев А.И., Артыков А.Ж. Метод выделения особенностей в теории возмущений .// Исслед.по интегро-дифференц.уравнениям. – Бишкек: Илим,1994. – Вып.25. – С. 211-221.
3. Артыков А.Ж. Вычетный метод для линейных интегральных уравнений Фрегольма. // Вестник Кыргызск.гос.нац.ун-та, Серия естественно-тех. науки. –Бишкек,1997. – Вып.1. – С. 214-216.