УДК: 517.928
DOI: https://doi.org/10.52754/16948645_2024_1(4)_6

О МЕТОДЕ ГАЛЕРКИНА ПОСТРОЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ УРАВНЕНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Алымбаев Асангул Темиркулович доктор ф.-м.н., профессор
asangul1952@gmail.com
Государственный университет им. И. Арабаева
Бишкек, Кыргызстан
Бапа кызы Айнура, магистр математики, ст.преподаватель
abapakyzy@gmail.com
Иссык-Кульский государственный университет им.К.Тыныстанова
Каракол, Кыргызстан

Аннотация. *В статье рассматривается задача построения и установления существования, приближенного* 2π- *периодического решения квазилинейного интегро-дифференциального уравнения второго порядка с периодической правой частью. Решение ищется в виде ряда Фурье. Построена система квазилинейных алгебраических уравнений относительно ряда Фурье. Доказано однозначной разрешимости системы алгебраического уравнения, что равносильно существованию* 2π- *периодического решения квазилинейного интегро-дифференциального уравнения второго порядка. Оценена погрешность разности между точным и приближенными решениями.*

Ключевые слова: *Метод Галеркина,* 2π- *периодическое решение, квазилинейное интегро-дифференциальное уравнение второго порядка, точное и приближенное решение.*

ЭКИНЧИ ТАРТИПТЕГИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕНИН МЕЗГИЛДИК ЧЫГАРЫЛЫШЫН ГАЛЕРКИНДИН МЕТОДУ МЕНЕН ЧЫГАРУУ

Алымбаев Асангул Темиркулович, ф.-м.и.доктору, профессор
asangul1952@gmail.com
И.Арабаев атындагы КМУ
Бишкек, Кыргызстан
Бапа кызы Айнура, математиканын магистри, ага окутуучу
abapakyzy@gmail.com
К.Тыныстанов атындагы ЫМУ
Каракол, Кыргызстан

Аннотация. *Макалада экинчи тартиптеги квазисызыктуу интегро-дифференциалдык теңдеменин* $2\pi-$ *мезгилдүү жакындаштырылган чыгарылышын табуу жана анын жашашын далилдөө маселеси каралат. Чыгарылыш Фурьенин катары түрүндө изделет. Катардын коэффициенттерине карата квазисызыктуу алгебралык теңдеме түзүлүп, анын бир маанилүү чечилиши далилденет жана тыянак катары квазисызыктуу интегро-дифференциалдык теңдеменин Галеркиндин ыкмасы боюнча тургузулган,* $2\pi-$мезгилдик *чыгарылышынын жашашы далилденет. Так жана жакындаштырылган чыгарылыштардын ортосундагы айырманын чени аныкталат.*

Негизги сөздөр: *Галеркиндин методу,* $2\pi-$*мезгилдүү чыгарылыш, экинчи тартиптеги квазисызыктуу интегро-дифференциалдык теңдеме, так жана жакындаштырылган чыгарылыштар.*

ON GALERKIN'S METHOD FOR CONSTRUCTING PERIODIC SOLUTIONS OF A SECOND-ORDER QUASILINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION

Alymbaev Asangul Temirkulovich, Doctor of Ph. and Math. Sc., Professor
asangul1952@gmail.com
State University named after I. Arabaev
Bishkek, Kyrgyzstan
Bapa kyzy Ainura, Master of Physics and Mathematics Education, Senior Lecturer
abapakyzy@gmail.com
Issyk-Kul State University named after K. Tynystanov
Karakol, Kyrgyzstan

Annotation. *The paper considers the problem of constructing and establishing the existence of an approximate 2π-periodic solution of a second-order quasilinear integro-differential equation with a periodic right-hand side. The solution is sought in the form of a Fourier series. A system of quasilinear algebraic equations with respect to the Fourier series is constructed. The unique solvability of a system of an algebraic equation is proved, which is equivalent to the existence of a 2π-periodic solution of a second-order quasilinear integro-differential equation. The error of the difference between the exact and approximate solutions is estimated.*
Keywords: *Galerkin method, 2π-periodic solution, second-order quasilinear integro-differential equation, exact and approximate solution.*

Изучение периодических решений сильно нелинейных систем (систем, не содержащих малого параметра) классическими асимптотическими методами не всегда возможно. Для таких систем разработаны ряд аналитических и численно-аналитических методов. Среди существующих методов, имеются методы наряду с доказательством теорем существования периодических решений позволяет построить этих решений. Одним из подобных методов является метод Бубнова-Галеркина, получивший достаточно полное обоснование для нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений в работе М.Урабе [4] и Л.Чезари [7]. В дальнейшем идеи работы М.Урабе распространены для изучения периодических решений системы дифференциальных уравнений с запаздыванием, интегро-дифференциальных уравнений с конечным и бесконечным последействием, а также системы автономных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром [1,2,3,5,6]. Настоящая работа посвящена задаче построения и доказательству теоремы существования 2π-периодического решения квазилинейного интегро-дифференциального уравнения второго порядка с конечным последействием.

Рассмотрим 2π-периодическое по t и дифференцируемое по x, u функцию $f(t,x,u)$ в области $(t,x,u)\epsilon\mathcal{T}\times D_1\times D_2$, где $\mathcal{T}=(-\infty,+\infty), D_1, D_2$ – ограниченные области в $R=(-\infty,+\infty)$. Введем нормы:

$$|f(t,x,u)|_0=\max_{\mathcal{T}\times D_1\times D_2}\|f(t,x,u)\|,$$

$$\|f(t,x,u)\|_0=\left[\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\|f\|^2\,dt\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Пусть – $g(t)$ непрерывная 2π –периодическая и разлагающая в ряд Фурье функция

$$g(t)=c_0+\sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}(c_k coskt+d_k sinkt). \tag{1}$$

Введем на множестве периодических функций операторы S_m и R_m, такие, что

$$S_m g(t)= c_0+\sqrt{2}\sum_{k=1}^{m}(c_k coskt+d_k sinkt), \tag{2}$$

$$R_m g(t) = \sqrt{2} \sum_{k=m+1}^{\infty} (c_k coskt + d_k sinkt). \tag{3}$$

Заметим, что

$$R_m g(t) = g(t) - S_m g(t).$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = g(t), \tag{4}$$

где $g(t) - 2\pi$- периодическая функция, представимое в ряд Фурье вида (2).

С учетом (1) уравнение (4) записываем в виде

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \mathrm{c}_0 + \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}(c_k coskt + d_k sinkt). \tag{5}$$

Теорема 1. Пусть $x = x(t) - 2\pi$ периодическое решение (5). Если

$$\mathrm{c}_0 = 0, \qquad x(0) = -\sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{c}_k}{k^2}, \qquad \frac{dx(0)}{dt} = \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d_k}{k^2},$$

тогда $2\pi -$ периодическое решение $x = x(t)$ представимо в виде

$$x(t) = \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\,(-c_k coskt + d_k sinkt).$$

$$R_m x(t) = x(t) - S_m x(t) = -\sqrt{2}\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}(c_k coskt + d_k sinkt).$$

Теорема 2. Для разности $x(t) - x_m(t)$- справедлива оценка

$$|x(t) - S_m x(t)|_0 \le |x(t) - x_m(t)|_0 \le \sigma(m)|f|_0,$$
$$\|x(t) - x_m(t)\|_0 \le \sigma_1(m)\|f\|_0$$

где

$$\sigma(m) = \left[\frac{2}{(m+1)^4} + \frac{2}{(m+2)^4} + \cdots\right]^{1/2},$$

$$\sigma_1(m) = \frac{\sqrt{2}}{(m+1)^2} \quad , \qquad \frac{\sqrt{2}}{(m+1)^2} < \sigma(m) < \frac{\sqrt{2}}{m^2},$$

Рассмотрим интегро-дифференциальную уравнению второго порядка

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = Ax(t) + f(t, x(t), \int_{t-\tau}^{t}\varphi(t, s, x(s)ds), \tag{6}$$

где А-вещественное число, $f\big(t, x, u(t)\big), \varphi(t, s, x)$-периодическое по t, s с периодом 2π функции, $\tau = const > 0$.

Предполагается, непрерывно-дифференцируемость $\big(t, x, u(t)\big), \varphi(t, s, x)$- по своим переменным. Периодическое решение уравнения (6) ищем в виде

$$x_m(t) = a_0 + \sqrt{2}\sum_{k=1}^{m}(a_k coskt + b_k sinkt). \tag{7}$$

Поставляя (7) в (6) получим равенство

$$\sqrt{2}\sum_{k=1}^{m}(-k^2 a_k coskt - k^2 b_k sinkt) = Aa_0 + \sqrt{2}\sum_{k=1}^{m}(Aa_k coskt + Ab_k sinkt) +$$

$$+A_0^{(m)} + \sqrt{2}\sum_{k=1}^{m}\left(A_k^{(m)}coskt + B_k^{(m)}sinkt\right), \tag{8}$$

где

$$A_0^{(m)} = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi}\int_0^{2\pi} f\left(t, x_m(t), u_m(t)\right)dt,$$

$$A_k^{(m)} = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi}\int_0^{2\pi} f\left(t, x_m(t), u_m(t)\right)cosktdt,$$

$$B_k^{(m)} = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi}\int_0^{2\pi} f\left(t, x_m(t), u_m(t)\right)sinktdt,$$

$$u_m(t) = \int_{t-\tau}^{t} \varphi\left(t, s, x_m(s)\right)ds, \qquad k = \overline{1, m}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках функции $coskt, sinkt$ получим из (8) систему алгебраических уравнений относительно неизвестных a_0, a_k, b_k разложении (7).

$$\begin{cases} Aa_0 + 0 \cdot a_k + 0 \cdot b_k + A_0^{(m)} = 0, \\ 0 \cdot a_0 + (A + k^2)a_0 + 0 \cdot b_k + A_k^{(m)} = 0, \\ 0 \cdot a_0 + 0 \cdot a_k + (A + k^2)b_k + B_k^{(m)} = 0. \end{cases}$$

или в матричной форме

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A + k^2 & 0 \\ 0 & 0 & A + k^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_k \\ b_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_0^{(m)} \\ A_k^{(m)} \\ B_k^{(m)} \end{pmatrix} = 0\,,$$

Отсюда получим

$$D^{(m)}\alpha + F^{(m)}(\alpha) = 0\,, \tag{9}$$

где

$$D^m = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A + k^2 & 0 \\ 0 & 0 & A + k^2 \end{pmatrix}, \quad F^{(m)}(\alpha) = \begin{pmatrix} A_0^{(m)} \\ A_k^{(m)} \\ B_k^{(m)} \end{pmatrix}, \; \alpha = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_k \\ b_k \end{pmatrix}. \quad k = \overline{1, m}.$$

Обозначим через $\hat{x} = \hat{x}(t)$, $2\pi -$ периодическое решение уравнения (6) и представим его в виде ряда Фурье

$$\hat{x}(t) = \hat{a}_0 + \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\hat{a}_k coskt + \hat{b}_k sinkt\right). \tag{10}$$

Поставляя (10) в уравнение (6) и с учётом свойства оператора S_m, получим следующее равенство

$$S_m\,\frac{d^2\hat{x}(t)}{dt^2} = \frac{d^2\hat{x}_m(t)}{dt^2} = A\hat{x}_m(t) + S_m f\left(t, \hat{x}_m(t), \int_{t-\tau}^{t}\varphi\left(t, s, x_m(s)\right)ds\right) +$$

$$+S_m\left(f\left(t,\hat{x}(t),\int\limits_{t-\tau}^{t}\varphi\big(t,s,\hat{x}(s)\big)ds\right)-S_m f\left(t,\hat{x}_m(t),\int\limits_{t-\tau}^{t}\varphi\big(t,s,\hat{x}_m(s)\big)ds\right)\right).$$

Отсюда имеем

$$D^{(m)}\hat{\alpha}+F^{(m)}(\hat{\alpha})=$$

$$=-S_m\left(f\left(t,\hat{x}(t),\int\limits_{t-\tau}^{t}\varphi\big(t,s,\hat{x}_m(s)\big)ds\right)-f\left(t,\hat{x}_m(t),\int\limits_{t-\tau}^{t}\varphi\big(t,s,\hat{x}_m(s)\big)ds\right)\right)=-\rho(m),$$

где $\quad\hat{\alpha}=\big(\hat{a}_0,\hat{a}_k,\hat{b}_k\big),\qquad k=\overline{1,m}.$

Представим разность

$$f\big(t,\hat{x}(t),\textstyle\int_{t-\tau}^{t}\varphi\big(t,s,\hat{x}(s)\big)ds\big)-f\left(t,\hat{x}_m(t),\textstyle\int_{t-\tau}^{t}\varphi\big(t,s,\hat{x}_m(s)\big)ds\right)$$

в виде

$$f\left(t,\hat{x}(t),\textstyle\int_{t-\tau}^{t}\varphi\big(t,s,\hat{x}(s)\big)ds\right)-f\left(t,\hat{x}_m(t),\textstyle\int_{t-\tau}^{t}\varphi\big(t,s,\hat{x}_m(s)\big)ds\right)=$$

$$=f\left(t,\hat{x}(t),\textstyle\int_{t-\tau}^{t}\varphi\big(t,s,\hat{x}(s)\big)ds\right)-f\left(t,\hat{x}_m(t),\textstyle\int_{t-\tau}^{t}\varphi\big(t,s,\hat{x}(s)\big)ds\right)+$$

$$+f\left(t,\hat{x}_m(t),\int\limits_{t-\tau}^{t}\varphi\big(t,s,\hat{x}(s)\big)ds\right)-f\left(t,\hat{x}_m(t),\int\limits_{t-\tau}^{t}\varphi\big(t,s,\hat{x}_m(s)\big)ds\right)=$$

$$=\frac{\partial f\left(t,\hat{x}_m+\theta_1(\hat{x}-\hat{x}_m),\int_{t-\tau}^{t}\varphi\left(t,s,\int_{t-\tau}^{t}\varphi\big(t,s,\hat{x}(s)\big)ds\right)\right)}{\partial x}\big(\hat{x}(t)-\hat{x}_m(t)\big)-$$

$$-\frac{\partial f\big(t,\hat{x}_m(t),\hat{u}+\theta_2(\hat{u}-\hat{u}_m)\big)}{\partial u}\int\limits_{t-\tau}^{t}\frac{\partial\varphi\big(t,s,\hat{x}(s)+\theta_2(\hat{x}(s)-\hat{x}_m(s))\big)}{\partial x}(\hat{x}(s)-\hat{x}_m(s))ds$$

$$0<\theta_1<1,\quad 0<\theta_2<1,\qquad 0<\theta_3<1.$$

Оценим разность:

Оценим разность:

$$\left|S_m\left(f\big(t,\hat{x}(t),\hat{u}(t)\big)-f\big(t,\hat{x}_m(t),\hat{u}_m(t)\big)\right)\right|_0\le\left|\frac{\partial f\big(t,\hat{x}_m+\theta_1(\hat{x}-\hat{x}_m),\hat{u}(t)\big)}{\partial x}\right|_0|\hat{x}(t)-$$

$$\hat{x}_m(t)|_0+\left|\frac{\partial f\big(t,\hat{x}_m(t),\hat{u}+\theta_2(\hat{u}-\hat{u}_m)\big)}{\partial u}\right|_0\int_{t-\tau}^{t}\left|\frac{\partial\varphi\big(t,s,\hat{x}(s)+\theta_3(\hat{x}(s)-\hat{x}_m(s))\big)}{\partial x}\right|_0|\hat{x}(s)-\hat{x}_m(s)|_0ds.\quad(11)$$

Так как, согласно теореме 2, для разности $\hat{x}(t)-\hat{x}_m(t)$ имеют место оценки:

$$|\hat{x}(t)-\hat{x}_m(t)|_0\le\sigma(m)|f)|_0,$$

$$\|\hat{x}(t)-\hat{x}_m(t)\|\le\sigma_1(m)\|f\|_0,$$

С учетом этих оценок, из (2.4.6) получим

$$\|\rho(m)\|\le\sigma(m)[|f|_0|f|_1+|f|_1|\varphi|_1|f|_0\tau]=\sigma(m)|f|_0|f|_1(1+|\varphi|_1\tau)\qquad(12)$$

или

$$\|\rho(m)\|\le\sigma_1(m)\|f\|_0|f|_1(1+|\varphi|_1\tau).\qquad(13)$$

Представим уравнение (9) в виде

$$\alpha+\big(D^{(m)}\big)^{-1}F^{(m)}(\alpha)=0,\qquad(14)$$

и положив $\alpha=\hat{\alpha}$, отсюда имеем

$$\hat{\alpha}+\big(D^{(m)}\big)^{-1}F^{(m)}(\hat{\alpha})=-\big(D^{(m)}\big)^{-1}\rho(m),$$

из которого следует оценка

$$\left\|\hat{\alpha} + \left(D^{(m)}\right)^{-1} F^{(m)}(\hat{\alpha})\right\| \le K\|\rho(m)\| \le \sigma(m) K |f|_0 |f|_1 (1 + |\varphi|_1 \tau) \qquad (15)$$

или

$$\left\|\hat{\alpha} + \left(D^{(m)}\right)^{-1} F^{(m)}(\hat{\alpha})\right\| \le K\|\rho(m)\| \le \sigma_1(m) K \|f\|_0 |f|_1 (1 + |\varphi|_1 \tau), \qquad (16)$$

где $K = \left\|\left(D^{(m)}\right)^{-1}\right\|$.

Решаем уравнение (14) методом последовательных приближений

$$\alpha_{k+1} = -\left(D^{(m)}\right)^{-1} F^{(m)}(\alpha_k), \quad k = 0,1,2,\dots \quad , \qquad (17)$$

За начальное приближение берем число $\alpha_0 = \hat{\alpha}$ т.е коэффициенты частной суммы ряда

$$\hat{x}_m(t) = \hat{a}_0 + \sqrt{2}\sum_{k=1}^{m}\left(\hat{a}_k coskt + \hat{b}_k sinkt\right).$$

Докажем равномерную сходимость итерационного процесса (17). Представим разность $\alpha_{k+1} - \alpha_k$ в виде

$$\alpha_{k+1} - \alpha_k = -\left(D^{(m)}\right)^{-1}\left(F^{(m)}(\alpha_k) - F^{(m)}(\alpha_{k-1})\right) =$$

$$= -\left(D^{(m)}\right)^{-1} \frac{\partial F^{(m)}\left(\alpha_{k-1} + \theta(\alpha_k - \alpha_{k-1})\right)}{\partial \alpha}(\alpha_k - \alpha_{k-1}). \qquad (18)$$

Предположим, что существует достаточно большое число m_0, такое, что при $m \ge m_0$ выполняется условие

$$\left\|\frac{\partial F^{(m)}(\alpha)}{\partial \alpha}\right\| \le \frac{\chi}{K}, \quad \text{при } 0 < \chi < 1. \qquad (19)$$

Тогда из (18) следует оценка

$$\|\alpha_{k+1} - \alpha_k\| \le \left\|\left(D^{(m)}\right)^{-1}\right\| \left\|\frac{\partial F^{(m)}\left(\alpha_{k-1} + \theta(\alpha_k - \alpha_{k-1})\right)}{\partial \alpha}\right\| \|\alpha_k - \alpha_{k-1}\| \le$$

$\le K\frac{\chi}{K_1}|\alpha_k - \alpha_{k-1}| \le \chi|\alpha_k - \alpha_{k-1}|$.

Отсюда получим

$$\|\alpha_{k+1} - \alpha_k\| \le \chi\|\alpha_k - \alpha_{k-1}\| \le \chi^2\|\alpha_{k-1} - \alpha_{k-2}\| \le \dots \le \chi^k\|\alpha_1 - \alpha_0\|. \qquad (20)$$

Оценим разность $\alpha_1 - \alpha_0$, положив $\alpha_0 = \hat{\alpha}$. Из (17) при $k = 0$ имеем

$$\alpha_1 - \alpha_0 = -\left[\alpha_0 + \left(D^{(m)}\right)^{-1} F^{(m)}(\alpha_0)\right] = -\left[\hat{\alpha} + \left(D^{(m)}\right)^{-1} F^{(m)}(\hat{\alpha})\right] = -\left(D^{(m)}\right)^{-1}\rho(m).$$

Отсюда с учетом неравенства (15) или (16) получим

$$\|\alpha_1 - \alpha_0\| \le \left\|\left(D^{(m)}\right)^{-1}\right\| \|\rho(m)\| \le \sigma(m) K |f|_0 |f|_1 (1 + |\varphi|_1 \tau) \qquad (21)$$

или

$$\|\alpha_1 - \alpha_0\| \le \sigma_1(m) K |f|_0 |f|_1 (1 + |\varphi|_1 \tau), \quad \text{при } m \to \infty. \qquad (22)$$

С учётом неравенств (21), (22), получим из (20) оценку

$\|\alpha_{k+1} - \alpha_k\| \le \chi^k \sigma_1(m) K |f|_0 |f|_1 (1 + |\varphi|_1 \tau)$, для $k = 0,1,2,\dots$

Нетрудно показать справедливости выполнения неравенства

$$\left\|\alpha_{k+p} - \alpha_k\right\| \le \frac{\chi^k}{1-\chi}\sigma_1(m)|f|_0|f|_1(1 + |\varphi|_1 \tau).$$

Отсюда, при $p \to \infty$ получим

$$\|\bar{\alpha} - \alpha_k\| \le \frac{\chi^k}{1-\chi}\sigma_1(m) K \|f\|_0 |f|_1 (1 + |\varphi|_1 \tau), \qquad (23)$$

которая обеспечивает равномерную сходимость последовательности (17) к решению уравнения (14) т.е. $\alpha = \bar{\alpha}$. Так как $\bar{\alpha} = (\bar{a}_0, \bar{a}_k, \bar{b}_k)$, $k = \overline{1,m}$, то приближенное решение интегро-дифференциального уравнения (6) согласно по методу Галеркина записывается в виде

$$\bar{x}_m(t) = \bar{a}_0 + \sqrt{2}\sum_{k=1}^{m}\left(\bar{a}_k coskt + \bar{b}_k sinkt\right).$$

Из (23) при $k = 0$

$$\|\hat{\alpha} - \bar{\alpha}\| \leq \frac{\sigma_1(m)K\|f\|_0|f|_1(1 + |\varphi|_1\tau)}{1-\chi}. \tag{24}$$

Оценим разность $\|\hat{x}_m(t) - \bar{x}_m(t)\|_0$:

$$\|\hat{x}_m(t) - \bar{x}_m(t)\|_0^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|\hat{x}_m(t) - \bar{x}_m(t)\|^2 dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(a_0 + \sqrt{2}\sum_{k=1}^{m}\left((\hat{a}_k - \bar{a}_k)coskt + (\hat{b}_k - \bar{b}_k)sinkt\right)\right)^2 dt =$$

$$= \frac{(\hat{a}_0 - \bar{a}_0)^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}(\sqrt{2}\,(\hat{a}_k - \bar{a}_k)^2 + \sqrt{2}(\hat{b}_k - \bar{b}_k)^2) = \frac{(\hat{a}_0 - \bar{a}_0)^2}{2} +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\left(\left\|\sqrt{2}\hat{a}_k - \sqrt{2}\bar{a}_k\right\|^2 + \left\|\sqrt{2}\hat{b}_k - \sqrt{2}\bar{b}_k\right\|^2\right) = \frac{1}{2}\|\hat{\alpha}_k - \bar{\alpha}_k\|^2.$$

Следовательно

$$\|\hat{x}_m(t) - \bar{x}_m(t)\|_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\|\hat{\alpha} - \bar{\alpha}\|,$$

то с учетом неравенства (24) получим оценку

$$\|\hat{x}_m(t) - \bar{x}_m(t)\|_0 \leq \frac{\sigma_1(m)K\|f\|_0|f|_1(1 + |\varphi|_1\tau)}{\sqrt{2}(1-\chi)}.$$

Так как, согласно теореме (2)

$$|\hat{x}(t) - \hat{x}_m(t)|_0 \leq \sigma(m)|f|_0$$

а также

$$\|\hat{x}(t) - \hat{x}_m(t)\|_0 \leq \sigma_1(m)|f|_0,$$

тогда для разности $|\hat{x}(t) - \hat{x}_m(t)|$ справедлива оценка:

$$|\hat{x}(t) - \bar{x}_m(t)|_0 = |\hat{x}(t) - \hat{x}_m(t) + \hat{x}_m(t) - \bar{x}_m(t)|_0 \leq |\hat{x}(t) - \hat{x}_m(t)|_0 +$$

$$+\|\hat{x}_m(t) - \bar{x}_m(t)\|_0 \leq\leq \sigma(m)|f|_0 + \frac{\sigma_1(m)K\|f\|_0|f|_1(1+|\varphi|_1\tau)}{\sqrt{2}(1-\chi)}. \tag{25}$$

Поскольку $\sigma(m) < \frac{\sqrt{2}}{m^2}$, $\sigma_1(m) < \frac{\sqrt{2}}{m^2}$ и $\|f\|_0 < |f|_0$ то из (25) следует неравенства

$$|\hat{x}(t) - \bar{x}_m(t)|_0 \leq \frac{\sqrt{2}}{m^2}|f|_0\left(1 + \frac{K|f|_1(1 + |\varphi|_1\tau)}{\sqrt{2}(1-\chi)}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{m^2}|f|_0\frac{\sqrt{2}(1-\chi) + K|f|_1(1 + |\varphi|_1\tau)}{\sqrt{2}(1-\chi)} \leq \frac{|f|_0\left[\sqrt{2} + K|f|_1(1 + |\varphi|_1\tau)\right]}{m^2(1-\chi)},$$

при $m \to \infty$.

Таким образом доказано утверждение.

Теорема 3. Пусть интегро-дифференциальное уравнение (6) имеет 2π –периодическое решение $\hat{x}(t)$ и удовлетворяет следующим требованиям:

а) выполняется требование теоремы 2;

б) $\left\|\hat{\alpha} + \left(D^{(m)}\right)^{-1} F^{(m)}(\hat{\alpha})\right\| \leq \sigma_1(m) K \|f\|_0 |f|_1 (1 + |\varphi|_1 \tau)$;

в) $\left\|\frac{\partial F^{(m)}(\alpha)}{\partial \alpha}\right\| \leq \frac{\chi}{K}, \quad 0 < \chi < 1, \quad \sigma_1(m) < \frac{\sqrt{2}}{m^2}$.

Тогда, алгебраическое уравнение (6) имеет единственное решение $\bar{\alpha} = \left(\bar{a}_0, \bar{a}_1, \bar{b}_1, \cdots, \bar{a}_m, \bar{b}_m\right)$, такое, что между точным $\hat{x}(t)$ и приближенным решением $\bar{x}_m(t)$ найденного методом Галеркина, справедлива оценка

$$|\hat{x}(t) - \bar{x}_m(t)|_0 \leq \frac{|f|_0\left[\sqrt{2} + K|f|_1(1 + |\varphi|_1 \tau)\right]}{m^2(1-\chi)}, \quad \text{при } m \to \infty.$$

Литература

1. Алымбаев А.Т. Метод Бубнова-Галеркина построения периодических решений автономных систем интегро-дифференциальных уравнений //А.Т.Алымбаев// Математическая физика. – Киев, 1993. – вып.22. – С.3-7.
2. Алымбаев А.Т. Численные, численно-аналитические и асимптотические методы исследования краевых задач: Монография // А.Т.Алымбаев. – Бишкек, 2015. – 205 с.
3. Алымбаев А.Т. О методе гармонического баланса построения периодического решения системы автономных интегро-дифференциальных уравнений с бесконечным последействием // А.Т. Алымбаев, Бапа кызы Айнура // Алатоо academic studies. –Бишкек, 2022. – №2. – С.459-464.
4. Урабе М. Метод Галеркина для нелинейных периодических систем. – Москва, 1966. – 97, №3. – С.3-34.
5. Самойленко А.М. Метод Бубнова-Галеркина построения периодических решений интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра // М.А.Самойленко., О.Д.Нуржанов// Дифференц.уравнения. – 1979. –15, №8. – С.1503-1517.
6. Мартынюк Д.Н. Метод Бубнова-Галеркина отыскания периодических и квазипериодических решений систем с запаздыванием. //Д.Н.Мартынюк// В кн.: Тр. Второй конф. «Дифференциальные уравнения и применения». – 1982. – ч.2. – С.445-448.
7. Cesari L. Functional analysis and periodic solutions of nonlinear differential equations// L. Cesari//In: Contributions to differential equations. – New-York, 1963,vol.1. – P.145-197.